第 1 章 随机事件与概率

1.1 内容提要

本章讲述概率统计的基本概念——事件与概率及事件概率的计算方法. 下面我们将主要概念和计算公式总结如下.

1. 随机事件的概念与性质

<table>
<tr><td>随机试验</td><td colspan="2">具有以下三个特点的试验称为随机试验：
(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；
(2) 每次试验的结果具有多种可能性，而且在试验之前可以明确试验的全部可能结果；
(3) 试验之前不能准确预言该次试验将出现哪一种结果.</td></tr>
<tr><td>样本点与样本空间</td><td colspan="2">随机试验 E 的每一个不可再分的结果 ω，称为一个样本点；
样本点的全体所组成的集合 Ω，称为 E 的样本空间.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">随机事件</td><td rowspan="4">在一次试验中，可能发生也可能不发生，而在大量重复的试验中具有某种统计规律性的随机试验的结果，称为随机事件. 它是样本空间的某个子集.</td><td>由一个样本点构成的子集称为基本事件.</td></tr>
<tr><td>由多个样本点构成的子集称为复合事件.</td></tr>
<tr><td>样本空间 Ω 称为必然事件.</td></tr>
<tr><td>空集 $\varnothing$ 称为不可能事件.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">事件间的运算</td><td colspan="2">事件的和 $A+B$：表示事件 A 与 B 至少有一个发生.</td></tr>
<tr><td colspan="2">事件的积 AB：表示事件 A 与 B 同时发生.</td></tr>
<tr><td colspan="2">事件的差 $A-B$：事件 A 发生而事件 B 不发生.</td></tr>
<tr><td rowspan="6">事件间的关系</td><td colspan="2">事件的包含 $A\subset B$：事件 A 发生必然导致事件 B 发生.</td></tr>
<tr><td colspan="2">事件相等 $A=B$：$A\subset B$ 且 $B\subset A$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">互不相容事件：事件 A 与 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">对立事件 $\overline{A}$：事件 A 不发生，即 $\Omega-A$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">完备事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$：$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少一个发生且不同时发生，即
$$A_iA_j=\varnothing(1\leqslant i,j\leqslant n,i\neq j)\text{且 }A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega.$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">事件独立：事件 A 与 B 发生与否互相不受影响，即 $P(AB)=P(A)P(B)$.</td></tr>
</table>

2. 概率的定义与计算公式

概率的定义	统计定义	在相同的条件下重复进行 n 次试验.如果当 n 增大时,事件 A 出现的频率 $f_n(A)$ 稳定地在某一常数 p 附近摆动;且一般说来,n 越大,摆动幅度越小,则称常数 p 为事件 A 的概率.这样定义的概率称为统计概率.
	公理化定义	设 E 是随机试验,Ω 是它的样本空间,对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数,记为 $P(A)$,若它满足如下三个条件: (1) 对任何事件 A,$P(A)\geqslant 0$; (2) $P(\Omega)=1$; (3) 对于可列个两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots$,有 $P(A_1+A_2+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots.$ 则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.
	条件概率	设 A,B 为两个事件,且 $P(B)>0$,称比值 $P(AB)/P(B)$ 为事件 A 在事件 B 发生的条件下的条件概率,记作 $P(A\|B)$.
概率的计算公式	加法公式	$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$ $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$ 特别地,若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容,则 $P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$
	减法公式	设 A,B 为任意两个事件,则 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$. 若 $A\subset B$,则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.
	乘法公式	若 $P(A)>0,P(B)>0$,则 $P(AB)=P(A)P(B\|A)=P(B)P(A\|B).$ 若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\|A_1)P(A_3\|A_1A_2)\cdots P(A_n\|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$ 特别地,若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n).$
	全概率公式	如果事件 $A_1,A_2,\cdots$ 构成一个完备事件组且 $P(A_i)>0,i=1,2,\cdots$,则对任何一个事件 B,有 $P(B)=\sum_i P(A_i)P(B\mid A_i).$
	贝叶斯公式	若 $A_1,A_2,\cdots$ 构成一个完备事件组,且 $P(A_i)>0,i=1,2,\cdots$,则对任一事件 B,$P(B)>0$,有 $P(A_j\mid B)=\dfrac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum_i P(A_i)P(B\mid A_i)}\quad(j=1,2,\cdots).$

续表

概率模型	古典概型	具有下列两个特点的概率模型称为古典概型(或等可能概型): (1) 样本空间只包含有限个基本事件; (2) 每个基本事件发生的可能性相同. 设在古典概型中共有 n 个基本事件,A 为包含其中 m 个基本事件的随机事件,则定义事件 A 的概率为 $$P(A)=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{m}{n}.$$
概率模型	*几何概率	将古典概型中的有限性推广到无限性而保留等可能性,就得到几何概型.一般来说,具有下列特点的概率问题称为几何概型: 有一个可度量的几何图形 Ω,试验 E 看成在 Ω 中随机地投掷一点,即 Ω 为样本空间. A 是 Ω 中可度量的图形,事件 $A=\{$投掷的点落入图形 A 中$\}$.则事件 A 的概率定义为 $$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}\quad(L\text{ 表示度量,指长度、面积、体积等}).$$
概率模型	伯努利概型	设试验 E 只有两种可能结果 A 和 $\overline{A}$,在相同的条件下独立地重复 n 次,这样的 n 次试验称为 n 重伯努利试验;描述 n 重伯努利试验结果的概率模型称为 n 重伯努利概型(也称独立试验序列).二项概率公式:在 n 重伯努利概型中,设每次试验事件 A 发生的概率为 $P(A)=p$,A 不发生的概率为 $P(\overline{A})=1-p=q(p,q>0)$,则在 n 次试验中 A 恰好发生 $k(0\leqslant k\leqslant n)$次的概率 $P_n(k)$ 为 $$P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}\quad(k=0,1,\cdots,n).$$

1.2 典型例题解析

题型 1:基本概念、公式与简单运算的填空、选择、判断;

题型 2:古典概型、几何概型、伯努利概型的概率计算;

题型 3:利用加法公式、乘法公式、条件概率公式及事件的独立性计算概率;

题型 4:利用全概率公式、贝叶斯公式计算概率.

例 1.1 写出下列随机试验的样本空间及下列事件所包含的样本点:

(1) 掷一颗骰子,出现奇数点;

(2) 在 1,2,3,4 四个数中可重复地取两个数,其中一个数是另外一个数的 2 倍;

(3) 将 a,b 两个球随机地放到三个盒子中去,盒子容量不限,第一个盒子中至少有一个球;

(4) 两人约定在某处会面,分别记录这两个人到达该处的时间,假定他们都在一个小时内到达.如果约定先到者应该等待另外一个人,等待时间超过 1 刻钟即可离去.事件 $A=\{$两人能见面$\}$;

(5) 从一批灯泡中任取一只,测试它的寿命.考虑事件 $A=\{$寿命大于 1000h$\}$.

解 (1) 掷一颗骰子，其结果有 6 种可能：出现 1 点，2 点，3 点，……，6 点，可以记样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，那么"出现奇数点"的事件为 $\{1,3,5\}$.

(2) 1,2,3,4 四个数中可重复地取两个数，共有 16 种可能，可记样本空间为 $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$. "一个数是另一个数的 2 倍"的事件为 $\{(1,2),(2,1),(2,4),(4,2)\}$.

(3) 我们记三个盒子分别为甲、乙、丙，依题意，将 a,b 两球随机放入三个盒子中共有 9 种可能结果，如果用(甲,乙)表示 a 球放入甲盒，b 球放入乙盒的可能结果，那么样本空间可表示为

$$\begin{aligned}\Omega=\{&(\text{甲},\text{甲}),(\text{甲},\text{乙}),(\text{甲},\text{丙}),(\text{乙},\text{甲}),\\&(\text{乙},\text{乙}),(\text{乙},\text{丙}),(\text{丙},\text{甲})(\text{丙},\text{乙}),(\text{丙},\text{丙})\}.\end{aligned}$$

"第一个盒子中至少有一球"的事件可记为

$$A=\{(\text{甲},\text{甲}),(\text{甲},\text{乙}),(\text{甲},\text{丙}),(\text{乙},\text{甲}),(\text{丙},\text{甲})\}.$$

(4) 如果用 t_1 表示第一人到达的时间，t_2 表示第二人到达的时间，那么样本空间是坐标为 (t_1,t_2) 的点组成的正方形，其中 $0\leqslant t_1,t_2\leqslant 1$. 可记为

$$\Omega=\{(t_1,t_2)\mid 0\leqslant t_1,t_2\leqslant 1\}.$$

那么事件 A 表示为

$$A=\left\{(t_1,t_2)\,\middle|\,|t_1-t_2|\leqslant\frac{1}{4},0\leqslant t_1,t_2\leqslant 1\right\}.$$

(5) 灯泡的使用寿命理论上可为任一非负实数. 因为上限不确定，可认为没有上限，所以样本空间 $\Omega=\{t\mid 0\leqslant t<+\infty\}$，事件 $A=\{t\mid t>1000\}$.

说明 在研究随机事件相应的样本点时，我们常要利用集合论中的概念与记法. 首先确定样本空间 Ω，然后写出要讨论的每个随机事件相应的集合.

例 1.2 设 A,B,C,D 为四个事件，试用这四个事件表示下列各事件：

(1) E_1：这四个事件至少发生一个；

(2) E_2：这四个事件都不发生；

(3) E_3：这四个事件至多发生一个；

(4) E_4：这四个事件至少发生两个；

(5) E_5：这四个事件恰好发生两个.

解 (1) A,B,C,D 至少发生一个，就是 A 发生或 B 发生或 C 发生或 D 发生，即 $E_1=A+B+C+D$；

(2) $E_2=\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}=\Omega-E_1$；

(3) 四个事件至多发生一个就是四个事件都不发生或一个事件发生而其余三个事件都不发生，即 $E_3=\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}+A\overline{B}\overline{C}\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}\overline{D}+\overline{A}\overline{B}C\overline{D}+\overline{A}\overline{B}\overline{C}D$；

(4) $E_4=AB+AC+AD+BC+BD+CD$；

(5) $E_5=AB\overline{C}\overline{D}+A\overline{B}C\overline{D}+A\overline{B}\overline{C}D+\overline{A}BC\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}D+\overline{A}\overline{B}CD$.

说明 (1) 注意事件 $AB\overline{C}\overline{D}$ 与事件 AB 的差别.前者表示 A,B 都发生而 C,D 都不发生;后者表示 A,B 都发生而 C,D 可发生可不发生.

事实上,$AB=AB\Omega=AB[C(D+\overline{D})+\overline{C}(D+\overline{D})]$

$$=AB(CD+C\overline{D}+\overline{C}D+\overline{C}\overline{D})$$

$$=ABCD+ABC\overline{D}+AB\overline{C}D+AB\overline{C}\overline{D}.$$

(2) 事件的运算和表示非常重要,一些常用记法和结论务必熟记,在后面的概率计算中经常用到.在分析事件的关系及进行事件运算时,除了熟练运用事件间关系及运算的公式外,还经常以文氏图和集合论中的运算法则为工具解决问题.

例 1.3 甲、乙、丙三人独自破译一个密码,设 A,B,C 分别表示甲、乙、丙独自译出,试分别表示下列事件:(1)$D=\{$密码被译出$\}$;(2)$E=\{$密码被译出但甲没译出$\}$;(3)$F=\{$甲、乙都译出但丙没译出$\}$.

解 (1) 密码被译出意即甲、乙、丙中至少有一人将密码译出,所以 $D=A+B+C$.

(2) 密码被译出但甲没译出可表示为 $E=D\overline{A}=(A+B+C)\overline{A}=(B+C)\overline{A}$.

(3) 甲、乙都译出但丙没译出表示为 $F=AB\overline{C}$.

例 1.4 在管理系学生中任选一名学生,令事件 A 表示选出的是男生,事件 B 表示选出的是二年级的学生,事件 C 表示该生是运动员.

(1) 叙述事件 $AB\overline{C}$ 的含义;

(2) 在什么时候 $ABC=C$ 成立?

(3) 在什么时候 $\overline{A}=B$ 成立?

解 (1) $AB\overline{C}$ 是指选出的学生是二年级的男生,但不是运动员.

(2) 只有在 $C\subset AB$,即 $C\subset A,C\subset B$ 同时成立,即只有在管理系运动员都是二年级男生时才有 $ABC=C$ 成立.

(3) $\overline{A}=B$ 成立,必有 $\overline{A}\subset B$ 且 $B\subset\overline{A}$ 条件满足,即选出的女生一定是二年级的学生且选出的二年级学生一定是女生,换句话说,当管理系二年级学生全是女生而其他年级的学生都是男生时,$\overline{A}=B$ 成立.

例 1.5 指出下列各式成立的等价条件:

(1) $ABC=A$;　　(2) $A+B=AB$;

(3) $(A+B)-A=B$;　　(4) $A+B=\overline{A}$.

解 (1) $ABC=A\Leftrightarrow\begin{cases}ABC\subset A\\A\subset ABC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A\subset B\\A\subset C.\end{cases}$

(2) $A+B=AB\Leftrightarrow A+B\subset AB\Leftrightarrow\begin{cases}A\subset AB\\B\subset AB\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A\subset B\\B\subset A\end{cases}\Leftrightarrow A=B$.

(3) $(A+B)-A=(A+B)\overline{A}=B\overline{A}=B\Leftrightarrow B\subset\overline{A}\Leftrightarrow AB=\varnothing$.

(4) $A+B=\overline{A}\Leftrightarrow\begin{cases}A\subset\overline{A},B\subset\overline{A}\\ \overline{A}\subset A+B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\varnothing,\overline{A}=\Omega\\ \overline{A}\subset B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\varnothing\\ B=\Omega.\end{cases}$

例 1.6 是非判断题

(1) 做 n 次随机试验，事件 A 发生 m 次，则事件 A 发生的频率 m/n 就是事件 A 发生的概率.

(2) 我们声称的某中学今年高考升学率为 40%，这个百分率是频率，但不是概率.

解 (1) 不正确.

频率和概率是两个不同的概念，不能说频率就是概率. 因为频率不能脱离具体的 n 次试验，而概率是指一次试验中，事件发生的可能性大小，它与试验的次数 n 无关. 频率是概率的近似，概率是频率的某种极限(参见第 5 章中的大数定律).

(2) 不正确.

这个百分率一般是指该校 n 个毕业生中有 m 个考取，则 $m/n=0.4$，它既是频率也可以说是今年该校任一毕业生升学的概率. 假若升学率 40% 是通过抽样调查得出的，则此百分率只能是频率.

例 1.7 某批产品中有 a 件正品，b 件次品. 从中用(1)有放回抽取；(2)不放回抽取两种抽样方式抽取 n 件产品，问其中恰有 $k(k\leqslant\min(b,n))$ 件次品的概率是多少？

解 (1) 有放回抽取

从 $a+b$ 件产品中有放回地抽取 n 件产品，所有可能的取法有 $(a+b)^n$ 种. 取出的 n 件产品中有 k 件次品，它们可以出现在 n 个位置中 k 个不同的位置，所有可能的取法有 C_n^k 种. 对于取定的一种位置，由于取正品有 a 种可能，取次品有 b 种可能，即有 $a^{n-k}b^k$ 种可能. 于是取出的 n 件产品中恰有 k 件次品的可能取法共有 $\mathrm{C}_n^k a^{n-k}b^k$ 种，故所求概率为

$$p_1=\frac{\mathrm{C}_n^k a^{n-k}b^k}{(a+b)^n}=\mathrm{C}_n^k\left(\frac{a}{a+b}\right)^{n-k}\left(\frac{b}{a+b}\right)^k.$$

在我们学习了伯努利概型后将会更好地理解这个结果.

(2) 不放回抽取

从 $a+b$ 件产品中抽取 n 件(不计次序)的所有可能的取法有 C_{a+b}^n 种. 在 a 件正品中取 $n-k$ 件的所有可能的取法有 C_a^{n-k} 种，在 b 件次品中取 k 件的所有可能的取法有 C_b^k 种，于是取出的 n 件产品中恰有 k 件次品的所有可能的取法有 $\mathrm{C}_a^{n-k}\mathrm{C}_b^k$ 种. 故所求概率为

$$p_2=\frac{\mathrm{C}_a^{n-k}\mathrm{C}_b^k}{\mathrm{C}_{a+b}^n}.$$

这个公式就是第 2 章将要介绍的超几何分布的概率公式.

说明 此例属于摸球问题(产品的随机抽样问题). 解答这类习题时，需注意次序应一致，如果计算样本点总数时，样本空间中的元素考虑了次序，则事件中的元素也要考虑次序；或者两者都不考虑次序.

例 1.8 任意投掷可以区别的四颗均匀的骰子,求下列事件的概率.

A=\{四颗骰子出现的点数全都相同\};

B=\{四颗骰子出现的点数全不相同\};

C=\{四颗骰子恰有三个出现的点数相同\};

D=\{四颗骰子恰有两个出现的点数相同\};

E=\{四颗骰子出现的点数恰成两对\}.

解 每个骰子可以取 1～6 点中的任意一个点数,由乘法原理知,任意投掷可以区别的四个骰子的全部样本点数为 6^4.

若使四颗骰子出现的点数完全相同,则只需四颗骰子同取 1 点,2 点,3 点,4 点,5 点,6 点中的任一个,共 6 种可能,故 $P(A)=\frac{6}{6^4}=\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}$;

四颗骰子出现的点数全不相同,即第一颗骰子可以取 1～6 点中的任意一个,共 6 种可能,第二颗骰子只能取其他 5 个点中的任一点,共 5 种可能,以此类推,事件 B 所包含的基本事件数为 P_6^4.

$$P(B)=\frac{\mathrm{P}_6^4}{6^4}=\frac{6\times5\times4\times3}{6^4}=\frac{5}{18};$$

四颗骰子分成两组,其中一组三个骰子取同一点,另一组一个骰子取不同的一点,其分法有 C_4^3(或 C_4^1)种.第一组骰子可以取 1～6 点中的任一点数,共 6 种取法,则第二组有 5 种取法,故事件 C 包含的基本事件数为 $\mathrm{C}_4^3\mathrm{P}_6^2$.所以

$$P(C)=\frac{\mathrm{C}_4^3\mathrm{P}_6^2}{6^4}=\frac{4\times6\times5}{6^4}=\frac{5}{54};$$

同理,事件 D 包含的基本事件数为 $\mathrm{C}_4^2\mathrm{P}_6^3$,

$$P(D)=\frac{\mathrm{C}_4^2\mathrm{P}_6^3}{6^4}=\frac{6\times6\times5\times4}{6^4}=\frac{5}{9};$$

四颗骰子恰成两对的分法共$\frac{1}{2}\mathrm{C}_4^2$ 种,于是事件 E 包含的基本事件数为$\frac{1}{2}\mathrm{C}_4^2\mathrm{P}_6^2$,则

$$P(E)=\frac{\frac{1}{2}\mathrm{C}_4^2\mathrm{P}_6^2}{6^4}=\frac{\frac{1}{2}\times6\times6\times5}{6^4}=\frac{5}{72}.$$

说明 掷 n 颗骰子与 n 个人的生日,n 封信装入 n 个信箱,n 只球投入 n 个盒子,n 个人分配到 n 个房间等同属于“分房问题”(分配问题),处理这类问题时,要分清什么是“人”,什么是“房子”,一般不可颠倒.例如,本例可以看成 4 个人分配到 6 个房间,房间容量不限,事件 A 可相应地看成“4 个人分配到同一间房”.为了更好地使读者理解此类问题,下面再举出一例.

例 1.9 某班有 n 名学生，求至少两人同一天生日的概率是多少？

解 这个问题实质上是分房问题，这里关键是将生日作为“房子”. 因为每个人的生日都可能是 365 天中的任何一天，且是等可能的，因此基本事件总数 $n=365^n$，设 $A=\{$至少两人同一天生日$\}$，注意到 $\overline{A}=\{n$ 个人生日各不相同$\}$，由于 $\overline{A}$ 包含的基本事件为 P_{365}^n，则 A 包含的基本事件数为 $365^n-\mathrm{P}_{365}^n$. 所以

$$P(A)=\frac{365^n-\mathrm{P}_{365}^n}{365^n}.$$

下面是 n 取不同的值时 $P(A)=p$ 的数值：

n	10	15	20	25	30	40	45	50	55
p	0.117	0.253	0.414	0.569	0.706	0.891	0.94	0.97	0.99

当 $n=64$ 时，$P(A)\approx 0.997$，“至少两人生日相同”几乎是必然的了. 可见，一年 365 天，55 件大事是有的，所以不管“双喜临门”还是“祸不单行”也就没什么奇怪的了.

例 1.10（随机取数问题） 从 0，1，…，9 共 10 个数字中随机有放回地接连取 4 个数字，按其出现的先后排成一列. 试求下列各事件的概率：

（1）$A_1=\{$四个数字排成一个偶数$\}$；

（2）$A_2=\{$四个数字排成一个四位数$\}$；

（3）$A_3=\{$四个数字中 0 恰好出现两次$\}$；

（4）$A_4=\{$四个数字中 0 不出现$\}$.

解 因为是有放回抽取，所以样本空间含 10^4 个样本点.

（1）若使四个数字组成偶数，只需末位数字为偶数即可. 这有 5 个可能，即 0，2，4，6，8，而前三位数是任意的，有 10^3 种取法，于是 A_1 共含有 $\mathrm{C}_5^1 10^3$ 个基本事件，从而

$$P(A_1)=\frac{\mathrm{C}_5^1 10^3}{10^4}=0.5.$$

（2）若使四个数字组成一个四位数，则只需第一位数字不是 0 即可，而后三位数是任意的，于是 A_2 共有 $\mathrm{C}_9^1 10^3$ 个基本事件，从而

$$P(A_2)=\frac{\mathrm{C}_9^1 10^3}{10^4}=0.9.$$

（3）若使 0 恰好出现两次，则只需某两次取数为 0，另两次不为 0 即可. 于是 A_3 共含 $\mathrm{C}_4^2 9^2$ 个基本事件，从而

$$P(A_3)=\frac{\mathrm{C}_4^2 9^2}{10^4}=0.0486.$$

（4）若使取出的四位数字中不含 0，则共有 9^4 种不同的取法，于是

$$P(A_4)=\frac{9^4}{10^4}=0.6561.$$

例 1.11 在桥牌游戏中(4 个人各从 52 张牌中分得 13 张),求 4 张 A 集中于一个人手中的概率.

解法 1 基本事件总数为 $C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}$. 有利于此事件的基本事件数为 $C_4^1C_4^4C_{48}^9C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}$,故

$$P=\frac{C_4^1C_4^4C_{48}^9C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}}{C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}}=\frac{4C_{48}^9}{C_{52}^{13}}\approx 0.0106.$$

解法 2 因 4 张 A 集中在特定的一人手中的概率为$\frac{C_4^4C_{48}^9}{C_{52}^{13}}$,故所求概率为

$$P=C_4^1\frac{C_4^4C_{48}^9}{C_{52}^{13}}=4\frac{C_{48}^9}{C_{52}^{13}}\approx 0.0106.$$

可见,考虑玩牌的人时,先固定 1 人来考虑,再乘上 C_4^1 较为简便.

例 1.12 从 n 双不同的鞋子中任取 $2r(2r<n)$只,求下列事件发生的概率:

(1) 无成对的鞋子;(2) 恰有两对鞋子;(3) 有 r 对鞋子.

解 (1) 因从 n 双中取 $2r$ 只,即从 $2n$ 只中取 $2r$ 只,故样本点总数为 C_{2n}^{2r}. 要所取的 $2r$ 只中无成对的必须只须这 $2r$ 只来自不同的 $2r$ 双,因此可认为先从 n 双不同鞋子中取 $2r$ 双,然后每双取一只. 因此,有利场合数为 $C_n^{2r}(C_2^1)^{2r}$,故

$$P_1=\frac{C_n^{2r}(C_2^1)^{2r}}{C_{2n}^{2r}}=\frac{2^{2r}C_n^{2r}}{C_{2n}^{2r}}.$$

(2) 样本点总数仍为 C_{2n}^{2r},有利场合数可如下考虑,即先从 n 双中取 2 双,再从 $n-2$ 双中取 $2r-4$ 双,然后每双取一只. 从而有利场合数为 $C_n^2(C_2^2)^2C_{n-2}^{2r-4}(C_2^1)^{2r-4}$,故

$$P_2=\frac{C_n^2(C_2^2)^2C_{n-2}^{2r-4}(C_2^1)^{2r-4}}{C_{2n}^{2r}}=\frac{2^{2r-4}C_n^2C_{n-2}^{2r-4}}{C_{2n}^{2r}}.$$

(3) 样本点总数仍为 C_{2n}^{2r}. 有 r 对即取出 $2r$ 只全配对,故有利场合数为 $C_n^r(C_2^2)^r=C_n^r$,于是所求概率为

$$P_3=\frac{C_n^r}{C_{2n}^{2r}}.$$

***例 1.13** 某路公共汽车每 5min 发出一辆,求乘客到达站点后,等待时间不超过 3min 的概率.

解 乘客到达站点的时刻 $t(0\leqslant t\leqslant 5)$可视为向时间段[0,5]投掷一随机点. 事件$A=\{2\leqslant t\leqslant 5\}$表示“等待时间不超过 3min”,而 $\Omega=\{0\leqslant t\leqslant 5\}$,因此事件 A 的概率决定于线段[2,5]与[0,5]的长度比,即

$$P(A)=\frac{3}{5}.$$

*例 1.14 甲、乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头,它们在一昼夜内到达的时间是等可能的.如果甲船停泊的时间是 1h,乙船停泊的时间是 2h,求两艘船都不需要等候码头空出的概率是多少?

解 设甲、乙两艘船到达的时刻分别为 x, y,则样本空间 $\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x,y\leqslant 24\}$,即 Ω 是边长为 24 的正方形,如图 1.1 所示.

由题意,若使两艘船都不需要等候,则必有:若甲船先到,乙船应该晚来 1h 以上,即 $y-x\geqslant 1$ 或 $y\geqslant 1+x$;若乙船先到,甲船应晚来 2h 以上,即 $x-y\geqslant 2$ 或 $y\leqslant x-2$,所以当 (x,y) 落在区域 $G=\{(x,y)\mid 1+x\leqslant y\leqslant 24$ 或 $0\leqslant y\leqslant x-2, 0\leqslant x\leqslant 24\}$(图 1.1 中阴影部分)内时,两艘船都不需要等候.

由于 G 的面积$=\frac{1}{2}(24-1)^2+\frac{1}{2}(24-2)^2=\frac{1013}{2}$,所以 $P=\frac{S_G}{S_\Omega}=\frac{1013}{2\times 24^2}=0.88$.

*例 1.15 在长度为 a 的线段内任取两点将其分成三段,求它们可以构成一个三角形的概率.

解 设线段被分成的三段长度分别为 x, y 和 $a-x-y$,则样本空间

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<a, 0<y<a, 0<x+y<a\}.$$

Ω 为一个三角形区域(如图 1.2),其面积为 $\frac{1}{2}a^2$.

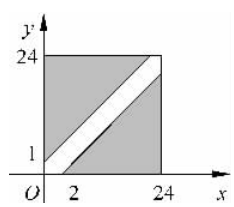

图 1.1

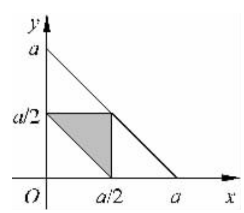

图 1.2

由三角形两边之和大于第三边的性质有

$$\begin{cases} x+y>a-x-y, \\ x+(a-x-y)>y, \\ y+(a-x-y)>x, \end{cases} \quad 即 \begin{cases} x+y>a/2, \\ y<a/2, \\ x<a/2, \end{cases}$$

即 $G=\{(x,y)\mid 0<x<a/2, 0<y<a/2, 0<x+y<a/2\}$ 就是所讨论的事件发生的区域 G(如图 1.2 中阴影部分).

G 的面积$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{a}{2}\right)^2$,因此所求事件的概率为

$$P=\frac{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}a\right)^2}{\frac{1}{2}a^2}=\frac{1}{4}.$$