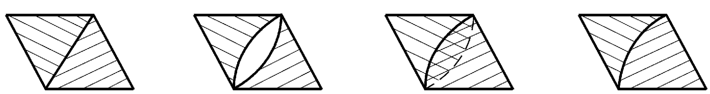
在所考察的物体的全部体积内，材料是均匀、连续分布的。这实际上是一种理想化的情形，称为**均匀连续性假定**。根据这一假定，物体内因受力和变形而产生的内力和位移都将是连续的，因而可以表示为各点坐标的连续函数，从而有利于建立相应的数学模型。

1.2.2 弹性体的受力与变形特点

由于整体平衡的要求，对于弹性体假想用一截面截开的每一部分也必须是平衡的。因此，作用在每一部分上的外力必须与截面上分布内力相平衡，组成平衡力系。这是弹性体受力、变形的第一个特征。这表明，弹性体由变形引起的内力不能是任意的。

在外力作用下，弹性体的变形应使弹性体各相邻部分，既不能断开，也不能发生重叠的现象，图 1-1 中为从一弹性体中取出的两相邻部分的变形前和三种变形状况，其中图 1-1(a)为变形前的情形；图 1-1(b)和(c)所示的是两种变形不协调的情形，对弹性来说是不正确的；只有图 1-1(d)中所示的变形是协调的，因而是正确的。这表明，弹性体受力后发生的变形也不是任意的，而必须满足**协调**一致的要求。这是弹性体受力、变形的第二个特征。此外，弹性体受力后发生的变形还与物性有关，这表明，受力与变形之间存在确定的关系，称为物性关系。



(a) 变形前　(b) 变形不协调　(c) 变形不协调　(d) 变形协调一致

图 1-1 弹性体变形后各相邻部分之间的相互关系

1.2.3 关于刚体静力学模型与材料力学模型

所有工程结构的构件，实际上都是可变形的弹性体，当变形很小时，变形对物体运动效应的影响甚小，因而在研究运动和平衡问题时一般可将变形略去，从而将弹性体抽象为刚体。从这一意义上讲，刚体和弹性体都是工程构件在确定条件下的简化力学模型。

1.2.4 关于刚体静力学概念与原理在材料力学中的可用性与限制性

工程中绝大多数构件受力后所产生的变形相对于构件的尺寸都是很小

的，这种变形通常称为“小变形”。在小变形条件下，刚体静力学中关于平衡的理论和方法能否应用于材料力学，下列问题的讨论对于回答这一问题是有益的：

（1）若将作用在弹性杆上的力（图 1-2（a）），沿其作用线方向移动（图 1-2（b））。

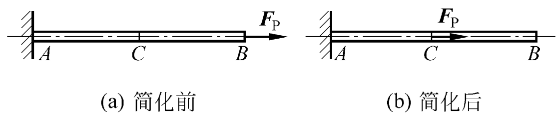


图 1-2　力沿作用线移动的结果

（2）若将作用在弹性杆上的力（图 1-3（a）），向另一点平移（图 1-3（b））。

请读者分析：上述两种情形对弹性杆的平衡和变形将会产生什么影响？

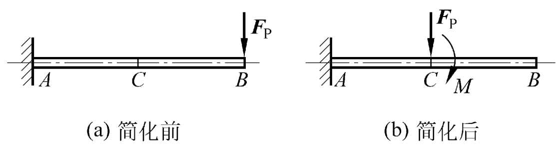


图 1-3　力沿作用线向一点平移的结果

1.3　学习建议

1. 从学习刚体静力学到学习弹性体静力学，最重要的是掌握从刚体到变形体的转变，绝对不能将刚体静力学的概念、原理原封不动地应用于材料力学。

2. 在材料力学中平衡的概念和方法依然是重要的，材料力学中的平衡概念和平衡原理是静力学中平衡原理的延伸和扩展，而且要比刚体静力学丰富得多。

3. 在材料力学中要特别注意弹性体的变形必须协调一致。

1.4　例题示范

例题 1-1　等截面直杆 AB 两端固定，C 截面处承受沿杆件轴线方向的力 $\boldsymbol{F}_P$，如图 1-4 所示。关于 A、B 两端的约束力有（A）、（B）、（C）、（D）四种答案，请判断哪一种是正确的。

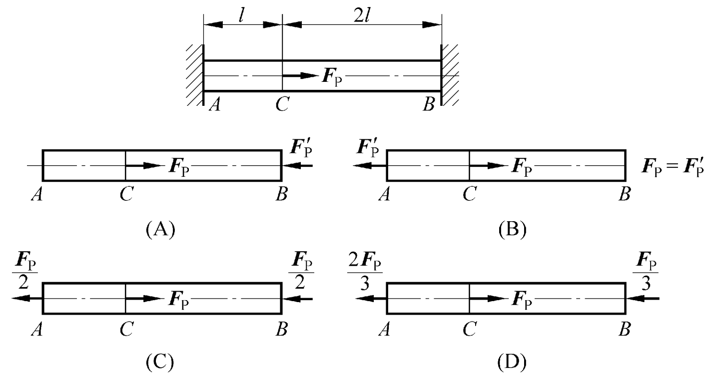


图 1-4　例题 1-1 图

解：根据约束的性质，以及外力 $\boldsymbol{F}_P$ 作用线沿着杆件轴线方向的特点，A、B 两端只有沿杆件轴线方向的约束力，分别用 $\boldsymbol{F}_A$ 和 $\boldsymbol{F}_B$ 表示，如图 1-5 所示。

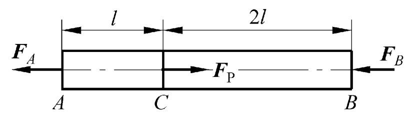


图 1-5　例题 1-1 解

根据平衡条件 $\sum F_x = 0$，有

$$F_A + F_B = F_P$$

其中 F_A 和 F_B 都是未知量，仅由平衡方程不可能求出两个未知量。对于刚体模型，这个问题是无法求解的。但是，对于弹性体，这个问题是有解的。

作用在弹性体上的力除了满足平衡条件外，还必须使其所产生的变形满足变形协调的要求。本例中，AC 段杆将发生伸长变形，CB 段杆则发生缩短变形，由于 AB 杆两端固定，杆件的总变形量必须等于零。

显然，图 1-4 中的答案(A)和(B)都不能满足上述条件，因而是不正确的。

对于满足胡克定律的材料，其弹性变形都与杆件受力以及杆件的长度成正比。在答案(C)中，平衡条件虽然满足，但 CB 段杆的缩短量大于 AC 段杆的伸长量，因而不能满足总变形量等于零的变形协调要求，所以也是不正确的。答案(D)的约束力，既满足平衡条件，也满足变形协调的要求，因此，答案(D)是正确的。

例题 1-2　等截面直杆的支承和受力如图 1-6 所示。关于其轴线在变形后的位置(图中虚线所示)，有四种答案，根据弹性体受力和变形的特点，试分

析哪一种是合理的。

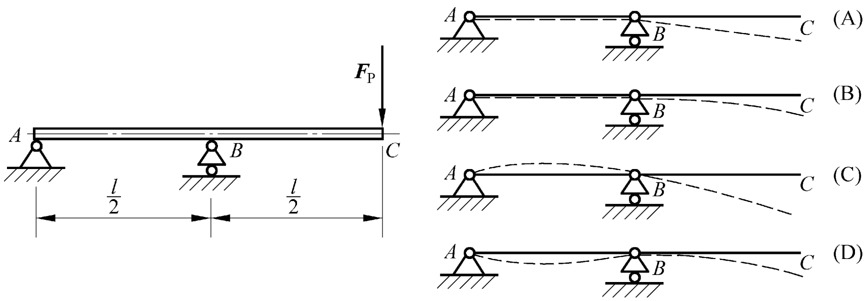


图 1-6　例题 1-2 图

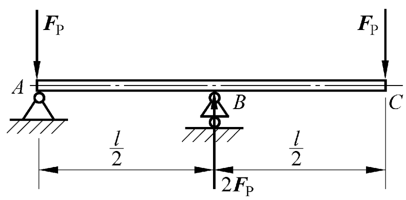


图 1-7　例题 1-2 的解

解：通过图 1-7 受力分析可以看出，杆件在 A 处受有向下的力 $\boldsymbol{F}_P$；在 B 处受有向上的力 $2\boldsymbol{F}_P$，在这两个力以及 C 处的外加载荷 $\boldsymbol{F}_P$ 的作用下，杆件将发生上面凸、下面凹的变形，而且因为是弹性的，所以变形应该是连续光滑的曲线。

答案(A)和(B)中的杆件在 AB 段都没有变形当然是不正确的；答案(D)中 AB 段的变形与受力不一致，因而也是不正确的。答案(C)中梁的变形与受力状况一致，而且是一条连续光滑曲线，符合变形协调的要求，所以这一答案是正确的。

据材料均匀性的假定，杆件横截面上的应力均匀分布。这时横截面上的正应力为

$$\sigma = \frac{F_N}{A}$$

其中 F_N 为横截面上的轴力，由截面法求得；A 为横截面面积。

2. 变形计算

(1) 绝对变形　弹性模量

设一长度为 l、横截面面积为 A 的等截面直杆，承受轴向载荷后，其长度变为 $l+\Delta l$，其中 Δl 为杆的伸长量(图 2-1(a))。实验结果表明：如果所施加的载荷使杆件的变形处于弹性范围内，则杆的伸长量 Δl 与杆所承受的轴向载荷成正比，如图 2-1(b)所示。写成关系式为

$$\Delta l = \pm \frac{F_N l}{EA}$$

这是描述弹性范围内杆件承受轴向载荷时力与变形关系的**胡克定律**。其中，F_N 为杆横截面上的轴力，当杆件只在两端承受轴向载荷 F_P 作用时，$F_N = F_P$；E 为杆材料的弹性模量，它与正应力具有相同的单位；EA 称为杆件的拉伸(或压缩)刚度；式中"＋"号表示伸长变形；"－"号表示缩短变形。

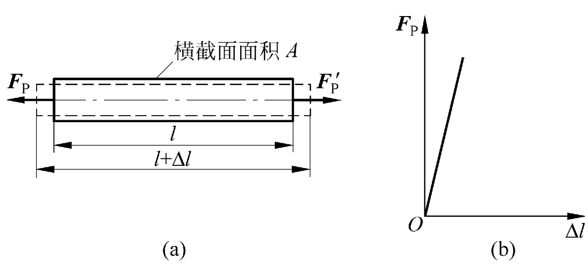


图 2-1　轴向载荷作用下杆件的变形

当拉、压杆有两个以上的外力作用时，需要先画出轴力图，然后按上式分段计算各段的变形，各段变形的代数和即为杆的总伸长量(或缩短量)：

$$\Delta l = \sum_i \frac{F_{Ni} l_i}{(EA)_i}$$

(2) 相对变形　正应变

对于杆件沿长度方向均匀变形的情形，其相对伸长量 $\Delta l / l$ 表示轴向变形的程度，是这种情形下杆件的正应变：

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\frac{F_N l}{EA}}{l} = \frac{\sigma_x}{E}$$

需要指出的是，上述关于正应变的表达式只适用于杆件各处均匀变形的情形。对于各处变形不均匀的情形，则必须考察杆件上沿轴向的微段 $\mathrm{d}x$ 的变形，并以微段 $\mathrm{d}x$ 的相对变形作为杆件局部的变形程度。这时

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{F_N \mathrm{d}x}{EA(x)}}{\mathrm{d}x} = \frac{\sigma_x}{E}$$

2.2.2　拉伸与压缩杆件的强度设计

1. 强度条件、安全因数与许用应力

所谓**强度设计**是指将杆件中的最大应力限制在允许的范围内，以保证杆件正常工作，不仅不发生强度失效，而且还要具有一定的安全裕度。对于拉伸与压缩杆件，也就是杆件中的最大正应力应满足：

$$\sigma_{\max} \leqslant [\sigma]$$

这一表达式称为拉伸与压缩杆件的**强度条件**，又称为**强度设计准则**。其中$[\sigma]$称为**许用应力**，与杆件的材料力学性能以及工程对杆件安全裕度的要求有关，由下式确定：

$$[\sigma] = \frac{\sigma^0}{n}$$

式中，σ^0 为材料的**极限应力**或**危险应力**，由材料的拉伸实验确定；n 为安全因数，对于不同的机器或结构，在相应的设计规范中都有不同的规定。

2. 三类强度计算问题

应用强度条件，可以解决三类强度问题：

(1) 强度校核——已知杆件的几何尺寸、受力大小以及许用应力，校核杆件或结构的强度是否安全，也就是验证设计准则是否满足。如果满足，则杆件或结构的强度是安全的；否则，是不安全的。

(2) 尺寸设计——已知杆件的受力大小以及许用应力，根据强度设计准则，计算所需要的杆件横截面面积，进而设计出合理的横截面尺寸。根据强度条件

$$\sigma_{\max} \leqslant [\sigma] \Rightarrow \frac{F_N}{A} \leqslant [\sigma] \Rightarrow A \geqslant \frac{F_N}{[\sigma]}$$

式中，F_N 和 A 分别为产生最大正应力的横截面上的轴力和面积。

(3) 确定杆件或结构所能承受的**许用载荷**——根据强度设计准则，确定杆件或结构所能承受的最大轴力，进而求得所能承受的外加载荷。

$$\sigma_{\max} \leqslant [\sigma] \Rightarrow \frac{F_{\mathrm{N}}}{A} \leqslant [\sigma] \Rightarrow F_{\mathrm{N}} \leqslant [\sigma]A \Rightarrow [F_{\mathrm{P}}]$$

式中，$[F_{\mathrm{P}}]$为许用载荷。

2.2.3 拉伸和压缩静不定问题

1. 多余约束与静不定次数

所有静不定结构都是在静定结构上加了**多余约束**而形成的。所谓多余约束是指这些约束对于保证结构的平衡与几何不变都不是必须的。但是，对于满足结构对强度和刚度的要求而言却又是必须的，因而也不是多余的。

在静定结构中，约束的数目正好等于平衡方程的数目。在这样的结构上，加几个多余约束，就多几个未知数，求解静不定问题时就需要几个补充方程。

因此，为了判断结构是静定的还是静不定的；必须正确分析约束和约束力，然后将约束力的个数与平衡方程的数目相比较。二者相等时，结构是静定的；前者大于后者时，则结构是静不定的。

约束力的个数与平衡方程个数的差数，就是多余约束力的个数，通常称为静不定的**次数**，也就是求解静不定问题所需的补充方程的数目。

2. 求解静不定问题的基本方法与解题步骤

由于附加了多余约束，使结构由静定的变为静不定的，由静力学可解变为静力学不可解的，这是问题的一方面。

另一方面，因为多余约束对结构的变形有着某种限制作用，而变形和力又是紧密相连的，即多余约束也对作用在静不定结构上的力有着确定的限制。所以它又为求解静不定问题提供了条件。

因此，求解静不定问题时，除了根据静力学平衡的方法列出**平衡方程**外，还必须解除多余约束，使结构变成静定的，在多余约束处寻找各构件变形之间的几何关系，即**变形协调方程**（又称**变形条件**），然后再根据反映力与变形关系的物性关系方程（又称物理条件），即可建立求解静不定问题所需的补充方程。这就是求解静不定问题的基本方法。

根据上述方法，解题时，一般应按下列步骤进行：

(1) 根据约束性质，正确分析约束力，列出可能提供的独立的平衡方程，并确定静不定次数。

(2) 解除多余约束使结构变成静定的，根据变形协调要求及变形前后各部分(或各杆件)的几何位置，在多余约束处寻找变形条件，建立变形协调方程。

(3) 根据胡克定律，建立力和变形之间的物性关系方程，并将其代入变形条件，得到以作用在构件上的未知力的形式表示的补充方程。

(4) 将补充方程与平衡方程联立，解出全部未知力，进而进行应力计算和强度计算。

3. 静不定结构的特性——温度应力与装配应力的概念

由于附加了多余约束，使静不定结构中各构件上的约束力不仅要满足平衡条件，而且必须满足变形条件，因而使静不定结构具有与静定结构不同的一些特性。

(1) 静不定结构中各构件之间的内力分配与各构件的刚度有关(拉压杆件静不定结构中则与杆件的拉压刚度 EA 有关)。

因为各杆的内力除满足平衡条件外，还必须满足变形条件，而变形又与构件的刚度有关，所以内力必然与刚度有关。

一般情形下，静不定结构中构件的刚度越大，其所承受的力也越大。

(2) 静不定结构中由于温度变化或者各构件由于制造误差在安装时都要产生应力。前者称为**温度应力**，后者称为**装配应力**。

静不定结构中，由于多余约束的存在，各个构件之间的变形是互相牵制的，而不像静定结构那样是自由的。因而当温度改变时，不能自由地膨胀或收缩，于是在构件中产生应力。

求解温度应力和装配应力的方法和步骤，与求解一般静不定问题基本相同，只是变形条件稍微复杂一些，求解温度应力时的物理条件还需包括由温度引起的热变形。

2.3　学习建议

2.3.1　用截面法计算内力

计算杆件的应力和变形时，切忌凭主观判断将截面附近作用的外力当作截面上的内力。特别是在拉、压杆计算中，不少初学者都很容易出现这一类错误。为了避免这类错误，初学者一定要用假想截面将杆件截开，然后考察其中某一部分的平衡，由平衡条件求得轴向力，从而进行应力、变形计算和强度计

算。只有当这一方法已经掌握得比较牢固时，才可以不必在纸面上一一画出，但仍然必须有严格的截面法概念。

截面法的要点是：

(1) 在需要计算内力处用假想截面将杆件截开，并分成两部分；

(2) 在截开的截面上建立直角坐标系；

(3) 考察截开的某一部分的平衡，由平衡方程计算各个内力分量的大小并确定其方向；

(4) 考察截开的另一部分的平衡，以校核上述计算结果的正确性。

2.3.2 关于应力和变形公式的应用条件

本章得到了承受拉伸或压缩时杆件横截面上的正应力公式与变形公式

$$\sigma = \frac{F_{\mathrm{N}}}{A}$$

$$\Delta l = \frac{F_{\mathrm{N}} l}{EA}$$

其中，正应力公式只有杆件沿轴向均匀变形时才是适用的。怎样从受力或内力判断杆件沿轴向均匀变形是均匀的呢？这一问题请读者对图 2-2 中所示之二杆加以比较、分析和总结。

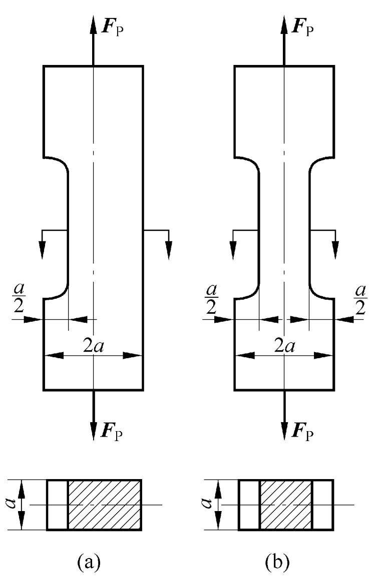


图 2-2 拉伸与压缩正应力公式的适用性

图 2-2(b)中所示之直杆，载荷作用线沿着直杆杆件的轴线方向，所有横截面上的轴力作用线都通过横截面的中心。因此，这一杆件的所有横截面上的应力都是均匀分布的，这表明正应力公式 $\sigma=\dfrac{F_{\mathrm{N}}}{A}$ 对所有横截面都是适用的。

而图 2-2(a)中所示之直杆则不然。这种情形下，对于某些横截面上轴力的作用线通过横截面中心；而另外的一些横截面，当将外力向截面中心简化时，不仅得到一个轴力，而且还有一个弯矩。请读者想一想，这些横截面将会发生什么变形？哪些横截面上的正应力可以应用 $\sigma=\dfrac{F_{\mathrm{N}}}{A}$ 计算？哪些横截面则不能应用上述公式计算？

对于变形公式 $\Delta l=\dfrac{F_{\mathrm{N}}l}{EA}$，应用时必须注意两点：(1)因为导出这一公式时应用了胡克定律，因此，只有杆件在弹性范围内加载时，才能应用上述公式计算杆件的变形；(2)公式中的 F_{N} 为一段杆件内的轴力，只有当杆件仅在两端受力时 F_{N} 才等于外力 F_{P}。当杆件上有多个外力作用时，则必须先计算各段轴力，再分段计算变形然后按代数值相加。

读者还可以思考：为什么变形公式只适用于弹性范围，而正应力公式就没有弹性范围的限制呢？

2.3.3　拉伸与压缩杆件斜截面上的应力

一橡皮拉杆模型表面画有一正置小方格和一斜置小方格，分别如图 2-3(a)和(b)所示。受力后，正置小方格的直角并未发生改变，而斜置小方格变成了菱形，直角发生变化。这种现象表明，在拉、压杆件中，虽然横截面上只有正应力，但在斜截面方向却产生剪切变形，这种剪切变形必然与斜截面上的剪应力有关。

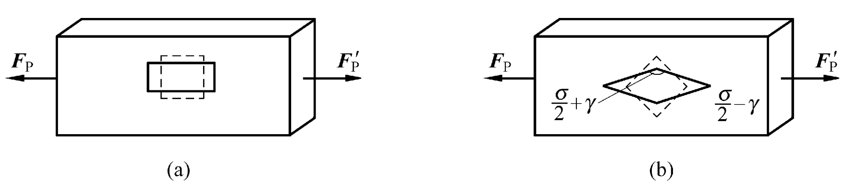


图 2-3　拉杆中的剪切变形

为确定拉(压)杆斜截面上的应力，可以用假想截面沿斜截面方向将杆截开(图 2-4(a))，斜截面法线与杆轴线的夹角设为 θ。考察截开后任意部分的平衡，求得该斜截面上的总内力为 $F_{\mathrm{R}}=F_{\mathrm{P}}$，如图 2-4(b)所示。力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 对斜截