

第 1 章 行 列 式

本章介绍用行列式的性质及展开定理计算行列式,介绍行列式在解特殊类型线性方程组中的应用.

本章重点 n 阶行列式的定义、性质、展开定理和计算方法及 Cramer 法则.

本章难点 行列式的计算.

一、主要内容

n 阶行列式的定义, n 阶行列式的性质, Laplace 定理, 代数余子式, Cramer 法则.

二、教学要求

1. 理解 n 阶行列式的定义.
2. 熟练掌握行列式的性质.
3. 熟练掌握行列式的计算方法.
4. 熟练掌握行列式按行(列)展开定理及 Laplace 定理.
5. 掌握 Cramer 法则.

三、例题选讲

例 1.1 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

分析 对于元素是数字的行列式,通常运用行列式的性质将其化为三角行列式来计算,或将其某一行(列)化成有较多 0 元素之后,再按该行(列)展开降阶.

解 方法 1

$$D \xrightarrow[\begin{smallmatrix} (-1)r_2 + r_4 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} r_1 + r_3 \end{smallmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{smallmatrix} r_3 + r_4 \end{smallmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

方法 2

$$\begin{aligned} D &\xrightarrow{\text{按第 1 列展开}} 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + (-1)A_{31} + 0 \cdot A_{41} \\ &= (-1)^{1+1}M_{11} - (-1)^{3+1}M_{31} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -1 - (-3) = 2. \end{aligned}$$

注 也可按第 2 列或第 2 行或第 4 行展开.

方法 3

$$D \xrightarrow{\begin{smallmatrix} r_1 + r_3 \end{smallmatrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{按第 1 列展开}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2.$$

例 1.2 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c+d & 1 \\ b & c & a+d & 1 \\ c & d & a+b & 1 \\ d & a & b+a & 1 \end{vmatrix}.$$

分析 将第 1 列、第 2 列加到第 3 列, 然后提取公因子.

解

$$\begin{aligned}
 D & \xrightarrow[c_2+c_3]{c_1+c_3} \begin{vmatrix} a & b & a+b+c+d & 1 \\ b & c & a+b+c+d & 1 \\ c & d & a+b+c+d & 1 \\ d & a & a+b+c+d & 1 \end{vmatrix} \\
 & = (a+b+c+d) \begin{vmatrix} a & b & 1 & 1 \\ b & c & 1 & 1 \\ c & d & 1 & 1 \\ d & a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.
 \end{aligned}$$

例 1.3 计算 5 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 8 & -2 & -3 \\ 2 & -8 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -6 \\ -4 & 3 & -5 & 6 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 由

$$\begin{aligned}
 D = D^T & = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -8 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 6 \\ 4 & -3 & 5 & -6 & 0 \end{vmatrix} \\
 & = (-1)^5 D,
 \end{aligned}$$

故 $D=0$.

注 若行列式 $D=|a_{ij}|$ 满足 $a_{ij}=-a_{ji}$ ($i, j=1, 2, \dots, n$), 则称 D 为反对称行列式. 此题是奇数阶反对称行列式, 故 $D=0$.

例 1.4 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

分析 各行元素之和相等.

解

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{\text{各列加到}}{\text{第 1 列}} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
 &\quad \frac{\text{后 3 行分别减}}{\text{去第 1 行}} x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} \\
 &\quad \frac{\text{按第 1 列展开}}{x} \begin{vmatrix} 0 & x & -x \\ x & 0 & -x \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} \\
 &= x^4.
 \end{aligned}$$

例 1.5 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}, \quad \text{其中 } a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n.$$

解 方法 1

$$D \stackrel{\text{c}_i \times \frac{1}{a_{i-1}}}{i=2,3,\cdots,n+1} = \prod_{i=1}^n a_i \begin{vmatrix} a_0 & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\left(-\frac{1}{a_{i-1}}\right)^{r_i+r_1}}{i=2,3,\cdots,n+1} \prod_{i=1}^n a_i \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right) \prod_{i=1}^n a_i.$$

注 也可用第 1 列减去后 $n-1$ 列的和变成上三角行列式.

方法 2

$$D \frac{r_i \times \left(-\frac{1}{a_{i-1}}\right) + r_1}{i=2,3,\cdots,n+1} \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= \left(a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right) \prod_{i=1}^n a_i.$$

注 此题的行列式结构称之为三对角行列式,一些行列式的计算都可先化成三对角行列式,再按照此题的方法计算,如例 1.6.

例 1.6 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix},$$

其中 $x_i \neq a_i, i=1,2,\cdots,n$.

分析 行列式的特点为第 j 列 ($j=1,2,\cdots,n$) 除元素 x_j ($j=1,2,\cdots,n$) 外都相同,所以后 $n-1$ 行分别减去第 1 行化成例 1.5 行列式的结构,再用例 1.5 的方法求解.

解 后 $n-1$ 行分别减去第 1 行,则

$$\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 - x_1 & x_2 - a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 - x_1 & 0 & x_3 - a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 - x_1 & 0 & 0 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^n (x_i - a_i) \begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1 - a_1} & \frac{a_2}{x_2 - a_2} & \frac{a_3}{x_3 - a_3} & \cdots & \frac{a_n}{x_n - a_n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^n (x_i - a_i) \begin{vmatrix} 1 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x_i - a_i} & \frac{a_2}{x_2 - a_2} & \frac{a_3}{x_3 - a_3} & \cdots & \frac{a_n}{x_n - a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
&= \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x_i - a_i}\right) \prod_{i=1}^n (x_i - a_i).
\end{aligned}$$

例 1.7 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ a & a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}.$$

分析 行列式中行(列)各元素之和相等,故将第 $2, 3, \dots, n$ 列(行)加到第 1 列(行),提出公因子 $x + (n-1)a$,然后再用后 $n-1$ 行分别减去第 1 行.

解

$$D \xrightarrow[i=2, \dots, n]{c_i + c_1} \begin{vmatrix} x + (n-1)a & a & a & \cdots & a \\ x + (n-1)a & x & a & \cdots & a \\ x + (n-1)a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x + (n-1)a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= [x + (n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x & a & \cdots & a \\ 1 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \\
&= [x + (n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} \\
&= [x + (n-1)a](x-a)^{n-1}.
\end{aligned}$$

注 在行列式计算中,若(行)列之和相等,都可考虑此方法,如例 1.8.

例 1.8 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}.$$

分析 此行列式各行元素之和相同,所以将后 $n-1$ 列加到第 1 列,提取公

因式 $\sum_{i=1}^n x_i - m$.

解

$$D_n = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i - m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \sum_{i=1}^n x_i - m & x_2 - m & x_3 & \cdots & x_n \\ \sum_{i=1}^n x_i - m & x_2 & x_3 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i - m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{i=1}^n x_i - m \right) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2 - m & x_3 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2 & x_3 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n x_i - m \right) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m \end{vmatrix} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n x_i - m \right) (-m)^{n-1}.
\end{aligned}$$

例 1.9 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

分析 此行列式先按第 n 行(列)展开,再利用对角行列式的计算公式.
解

$$\begin{aligned}
D &\stackrel{\text{按第 } n \text{ 行展开}}{=} (-1)^{n+n} \cdot n \begin{vmatrix} & & & & 1 \\ & & & & 2 \\ & & & & 3 \\ & & \ddots & & \\ n-1 & & & & \end{vmatrix} \\
&= n(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (n-1)! \\
&= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n!.
\end{aligned}$$

例 1.10 计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} n & & & & & n+1 \\ & n-1 & & & & n \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & 2 & \\ & & & 3 & 4 & \\ & & \ddots & & & \\ & n+1 & & & & n+2 \\ n+2 & & & & & n+3 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{aligned}
& D_{2n} \xrightarrow[\text{展开}]{\text{按第1列}} n \begin{vmatrix} n-1 & & & & n & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & & \\ & & 1 & 2 & & & \\ & & 3 & 4 & & & \\ & \ddots & & & \ddots & & \\ n+1 & & & & & n+2 & \\ 0 & & & & & & n+3 \end{vmatrix} \\
& + (-1)^{2n+1} (n+2) \begin{vmatrix} & 0 & & & & & n+1 \\ n-1 & & & & & & n \\ & \ddots & & & \ddots & & \\ & & 1 & 2 & & & \\ & & 3 & 4 & & & \\ & \ddots & & & \ddots & & \\ n+1 & & & & & n+2 & 0 \end{vmatrix} \\
& = n(n+3)D_{2(n-1)} - (n+1)(n+2)D_{2(n-1)},
\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}
D_{2n} &= -2D_{2(n-1)} = (-2)^2 D_{2(n-2)} = \cdots \\
&= (-2)^{n-1} D_2 = (-2)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-2)^n.
\end{aligned}$$

注 此题方法称为递推法,即寻找递推公式降阶.

例 1.11 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ ax & a & -1 & \cdots & 0 \\ ax^2 & ax & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ax^n & ax^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & a \end{vmatrix}, \quad a \neq 0.$$

解 方法 1

$$D_{n+1} \xrightarrow[\text{展开}]{\text{按第1行}} aD_n + (-1)^{1+2}(-1) \begin{vmatrix} ax & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ ax^2 & a & -1 & \cdots & 0 \\ ax^3 & ax & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ax^n & ax^{n-2} & ax^{n-3} & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= aD_n + x \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ ax & a & -1 & \cdots & 0 \\ ax^2 & ax & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ax^{n-1} & ax^{n-2} & ax^{n-3} & \cdots & a \end{vmatrix} \\
&= aD_n + xD_n = (a+x)D_n.
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
D_{n+1} &= (a+x)D_n = (a+x)^2 D_{n-1} = \cdots = (a+x)^{n-1} D_2 \\
&= (a+x)^{n-1} \begin{vmatrix} a & -1 \\ ax & a \end{vmatrix} = a(a+x)^n.
\end{aligned}$$

方法 2

$$\begin{aligned}
D_{n+1} &\xrightarrow{c_1 \times \frac{1}{a}} a \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & a & -1 & \cdots & 0 \\ x^2 & ax & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^n & ax^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & a \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow{c_1 + c_2} a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & a+x & -1 & \cdots & 0 \\ x^2 & (a+x)x & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^n & (a+x)x^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & a \end{vmatrix} \\
&= a(a+x) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & a & -1 & \cdots & 0 \\ x^2 & ax & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^{n-1} & ax^{n-2} & ax^{n-3} & \cdots & a \end{vmatrix} \\
&\xrightarrow{\text{以此类推}} a(a+x)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & a & -1 & \cdots & 0 \\ x^2 & ax & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^{n-2} & ax^{n-3} & ax^{n-4} & \cdots & a \end{vmatrix} \\
&= \cdots
\end{aligned}$$