

第 1 章

CHAPTER 1

混沌理论简介

本章将回顾混沌理论的发展历史,概述混沌系统的基本理论,并对混沌系统的一些基本性质做分析和介绍。

1.1 混沌理论发展的简要历史

混沌被认为是继相对论和量子力学后,20 世纪物理学第三次重大革命,与前两次革命相似,混沌也一样冲破了牛顿力学的统治。第一次国际混沌会议主持人之一的物理学家 J. Ford 指出:相对论消除了关于绝对空间与时间的幻象,量子力学消除了关于可控测量过程的牛顿式之梦,而混沌则消除了拉普拉斯关于决定论式可预测性的幻想^[1]。

在混沌理论提出以前,没有人怀疑过精确预测能力从原则上讲是能够实现,一般认为只要能够收集足够的信息就可以达到这一能力。18 世纪法国数学家拉普拉斯宣称,如果已知宇宙中每一个粒子的位置与速度,他就可以预测宇宙在整个未来的状态。这种决定论首先被量子力学所打破。量子力学中的基本原理之一是海森堡测不准原理。该原理指出:对于粒子位置及速度的测量有着一个基本限度,不可能无限精确,预测能力首先受到了初始信息量的影响。量子力学虽然在微观上圆满地解决了一些随机现象,但一般认为在宏观尺度上,拉普拉斯的决定论原则上仍然是正确的,可以通过不同的初始信息获得精确度不同的预测结果。然而混沌现象的发现,却使得这种假设完全破灭。由于混沌系统对初始条件的敏感性使得系统在其运动的轨迹上几乎处处不稳定,初始条件的极小误差都会随着系统的演化呈指数式地增加,迅速地达到系统所在空间的大小,使得预测能力完全消失。

混沌理论的开端,最早可以追溯到 19 世纪末 20 世纪初法国科学家庞加莱(Jules Henri Poincaré)所做的一系列关于太阳系中三体问题的研究。庞加莱将动力学系统和拓扑学两大领域结合起来运用相图、拓扑学以及相空间的方法,分析了一类三体问题解的复杂性和高度不稳定性,指出了混沌存在的可能性,成为世界上最先了解存在混沌可能性的人。之后,前苏联概率论大师 A. N.

Kolmogorov 将香农(C. E. Shannon)在 1948 年提出的信息论引入到混沌理论的研究中,在混沌理论基础理论研究方面做了一系列贡献。1963 年, E. Lorenz 在《大气科学》杂志上发表了“决定性非周期流”一文,指出在气候不能精确演与长期天气不可预测之间存在必然联系,即非周期性不可预见性之间的联系。这些研究清楚地描述了“对初始条件敏感性”这一混沌的基本性质,这就是著名的蝴蝶效应。70 年代,众多科学家都开始在自己的研究领域发现和研究混沌现象。1975 年,中国学者李天岩和美国数学家 J. York 在 *America Mathematics* 杂志上发表了“周期三意味着混沌”的著名文章,深刻揭示了从有序到混沌的演变过程,并把“Chaos(混沌)”一词引入到了现代科学词汇中。1977 年在意大利召开的第一次国际混沌会议标志着混沌科学的诞生。在这之后,混沌科学就开始不断地与其他科学相互渗透,无论是在生物学、生理学、心理学、数学、物理学、化学电子学、信息科学,还是在天文学、气象学、经济学,甚至在音乐、艺术等领域,混沌都得到了广泛的应用,开始在现代科学技术中起着非常重要的作用。

在电路系统的工程实践和理论研究中,研究人员也注意到了在电路系统中出现的混沌现象。电子工程领域中混沌理论研究自 20 世纪 80 年代初,在近 20 年间得到迅速发展,经历了三个重要突破性进展^[2]。

第一个进展是在 20 世纪 80 年代初 L. O. Chua(蔡少棠)发现一个简单的电路系统也可以产生复杂现象。他设计了一系列用于产生混沌现象的简单电路。这些电路后来称为 Chua 电路。Chua 的工作证明了一个简单的电路系统也可以产生非周期的复杂现象。由于电路系统的可实现性、可分析性和可预见性,使得混沌在电路系统中研究迅速展开,产生和控制混沌现象的方法不断被提出。Chua 所作的一系列工作为混沌研究在电子工程领域逐步展开奠定了基础。1987 年 Chua 主编了 IEEE 关于混沌系统的专集,该专集对科学界产生了重大影响,它标志着复杂性科学和混沌已经从数学的抽象理论进入到电子工程领域的研究中。

第二个重要进展是 20 世纪 90 年代初 Peroca 和 Carroll 通过实验证明了互相耦合的混沌系统,在一定条件下会出现同步现象,即混沌同步。混沌同步的发现引发了研究人员开始将混沌信号作为一种用来传信息的载波,并在 20 世纪 90 年代激发了混沌通信的研究热潮。由于混沌信号的表面随机性和不可预测性,使其在保密通信领域得到了进一步的研究与应用。混沌信号在频谱上的宽带特性,也使其具有抗频率选择性衰落和窄带干扰的能力。

第三个进展是在工程应用研究中,人们逐渐发现混沌系统同时兼有确定性和随机性的特点,因此可以同时通过描述确定性的动力学方法和描述随机性的概率统计学方法对混沌系统进行刻画。这为从工程角度分析、研究和设计非线性系统提供了一系列定量模型和工具。一些曾经被认为是随机运动的系统,有可能通过混沌理论找到新的分析方法和处理手段。而一些被认为是复杂、难以分析的非线性混沌系统,则有望基于其具有某些统计特征,利用概率统计工具进行分析研究,从而给出一些有益的结果。

1.2 非线性和混沌系统

本节将概括介绍非线性和混沌系统,说明非线性系统的产生及其分析困难性,并介绍混沌系统的特点。

1.2.1 非线性

非线性是一种普遍存在于自然界和工程应用中现象,但是由于非线性现象复杂性,目前还没有找到一种统一、普遍适用描述方法来对其进行分析和处理。非线性现象来自于非线性系统内在复杂性。对于一个系统,如果其输出与输入之间不存在线性比例关系(见图 1-1),则该系统就是一个非线性系统。

从数学上看,非线性系统是一个不满足叠加性原理的系统,即系统两个解之和并不是该系统解。非线性系统不满足叠加性原理原因主要有两个:

(1) 系统本身是非线性。例如单摆动力学方程为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + (g/L)\sin\theta = 0$$

式中, θ 是单摆与垂线之间夹角, L 为摆长, g 为重力加速度。该方程本身是一个非线性方程,仅在 $\theta=0$ 附近近似满足线性。

(2) 系统本身是线性,但由于边界条件未知或不断变化使其呈现非线性现象。在满足线性拉普拉斯方程 $\nabla^2 P=0$ 域中,由于其边界条件不定,也会呈现非线性现象。

非线性系统具有很强奇异性,所以对于这类系统分析也变得非常困难,这是由于以下三个原因所造成。

(1) 对于一个非线性系统,微小扰动(如初始条件微小改变)都会使得整个系统随着时间发生很大变化。这使非线性系统变得非常复杂,混沌系统就是具有这种特性非线性系统。

(2) 非线性系统是不可分解的。在分析线性系统时,常常可以将一个线性系统分解为几个级联或并联子系统,首先分析每个简单子系统,然后可以获得整个系统知识,从而简化了线性系统分析。但在非线性系统中,很难找到这样分解方法,能够将一个非线性系统分解为简单子系统。因此只能从整体上对各个不同非线性系统进行分析,找不到一种通用分析方法能够同时对各种非线性系统进行分析 and 处理。

(3) 在许多情况下,非线性系统动力学方程描述是无法知道或根本不存在的,例如复杂分形结构、一些经济系统(如股票市场)、复杂互联网流量系统等。

所有这些复杂性都使得计算机成为非线性系统研究中必不可少工具,通过计算机可以对各种非线性系统进行直接仿真,并将结果以各种方式展现在人们面前。这也是近年来,随着个人计算机普及,非线性科学受到人们日益重视、发展迅速重要原因。

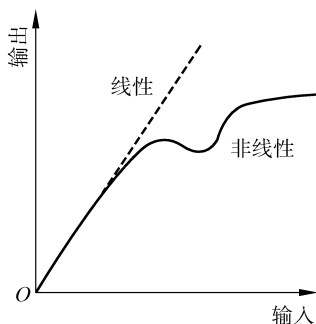


图 1-1 线性与非线性

1.2.2 混沌系统

混沌系统是一类对于初始条件极其敏感非线性系统。对于混沌研究可以追溯到 19 世纪末庞加莱关于天体力学中三体问题研究。20 世纪 60 年代, E. Lorenz 在气象学研究中,将大气中二维流体对流模型简化为三元常微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - xz - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

该方群形式非常简单,但在进行数值计算研究中,研究人员发现即使是这样一个简单的系统仍然对初始条件非常敏感。在这些混沌现象的发现与研究过程中,人们逐渐意识到:

(1) 确定性混沌系统会呈现随机性现象。这使得研究人员不得不重新考察以往的实验和结论,分析其中随机性是否是由确定性混沌系统产生的。

(2) 混沌系统可以是非常简单的只有几个自由度的低维系统,这些简单的系统已经足以产生复杂的混沌现象。这一发现使一些原本认为只有复杂系统才能产生的现象有望通过简单的系统加以描述和分析。

对初始条件的敏感性,以及在实际测量中只能得到有限数目的初始条件,使混沌呈现出随机性现象,因而不可能对实际的混沌系统进行长期预测。而另一方面,由于这种表面随机现象本质上是确定性和混沌的,其内部是有规律地变化的,因此对一些看似随机的混沌系统仍然可以进行短期估计和预测。从这点来看,混沌连接了确定性和随机性。在确定性动力学理论中,系统可以通过确定的动力学方程来描述;而在随机过程理论中,随机系统则可以通过统计学的方法进行刻画。作为确定系统的混沌系统,可以利用动力学来进行描述;但混沌系统对初值的敏感性导致随机性现象和长期的不可预测性,也使其可以利用统计学进行描述。在混沌系统的研究中,通常混合使用这两种分析方法,当对系统的局部、短期现象进行描述时,往往采用动力学方法进行分析 and 描述;当对系统的全局、长期状态进行描述时,则需要借助统计学的方法分析系统的输入。由于混沌系统内在的非线性,通常所使用的线性统计方法(如相关函数等)并不能有效地描述混沌现象。一个混沌过程的线性相关性可以随着时间迅速消失,但它仍然是一个确定性过程。所以为了更好地描述混沌系统,一些基于非线性统计量(如熵、互信息量、维数、Lyapunov 指数等)经常被用来刻画混沌的随机特性。

1.3 混沌的定义

混沌系统是一种复杂的非线性系统,为了具体地讨论混沌的定义及其性质,首先需要引入动力学理论的一些基本概念。

1.3.1 动力学理论简介

1. 动力系统、相空间和参数空间

动力学理论是研究运动随时间变化的理论,它主要试图通过抽象运动特性并建立其数学模型,来解决已知过去和现在条件下如何预测未来的问题。这些用来描述运动的某种特性随时间变化的数学模型或准则,就称为动力系统。而用于描述动力系统所使用的信息,就被概括称为状态。如果系统状态随时间的演化是唯一的,则该动力系统就是确定性的。若存在着随机扰动使得系统状态演化的一性遭到破坏,则该系统就是随机的或称为随机过程。

确定性动力系统从时间 t_1 到时间 t_2 的演化规律可以表示为

$$x(t_2) = F(x(t_1)) \quad (1-1)$$

式中, F 是一个单值函数, $x(t)$ 是系统在 t 时刻的状态。这种在时间上离散的动力系统称为映

射(map)。映射的时间间隔通常取为一个固定的时间增量,所以映射常常记为 $x(n+1) = F(x(n))$ 。当动力系统在时间上连续变化时,则其可以表示为微分方程组的形式,即

$$\frac{dx}{dt} = F(x(t)) \quad (1-2)$$

这种在时间上连续变化的动力系统称为流(flow)。

动力系统的状态可以表示为空间上的点,该系统所有可能状态的集合称为状态空间或相空间。动力系统中某一状态随时间的演化在相空间中形成一条空间曲线,这条曲线称为该动力系统的一条轨道(trjectory)。

在理想情况下,动力系统 F 是不随时间变化的,但在实际情况中, F 总是真实系统在一段时间内的近似,随着时间的变化会缓慢地发生变化。为了描述这种缓慢变化,可以将 F 的某些特征描述定义为参数。在动力系统的研究中,通常假定或通过实验手段使动力系统的某些参数保持不变,先在相对简单的情况下讨论动力系统的特性。在获得了动力系统的初步认识后,再调节参数,使动力系统做进一步的分析。系统所有可能的参数取值所组成的集合称为参数空间或控制空间。

2. 动力系统的分类

动力系统常常可以根据以下一些性质分为线性系统与非线性系统、自治系统与非自治系统、确定系统与非确定系统、可逆系统与非可逆系统等。

(1) **线性** 线性动力系统中任意两个状态 x_a 和 x_b 满足

$$F(x_a + x_b) = F(x_a) + F(x_b)$$

应当注意到随时间呈非线性变化的函数并不意味着非线性,例如 $\dot{x} = \sin x$ 是一个非线性系统,而 $\dot{x} = \sin t$ 则不是非线性系统。

(2) **自治性** 如果一个动力学系统变化不显式地依赖于时间,则称该系统是一个自治系统。例如 $\dot{x} = \sin \omega t$ 是一个非自治系统,因为其动力学方程中显式地含有时间 t 作为变量。一些非自治系统可以通过状态空间上的变量代换,转换成自治系统,例如上面的例子可以转换为

$$\dot{x} = \sin \theta$$

$$\dot{\theta} = \omega$$

(3) **确定性** 确定性动力系统中一条轨道不会随着时间向前演进而呈现分支现象,这是因为若一个当前状态可以演化成两个未来状态中的一个,则系统一定存在着不确定性,无法由当前状态确定未来状态。但确定系统中轨道是可以相交的,例如在一些不可逆映射中,随着时间反向演进,轨道会呈现分支现象。

(4) **可逆性** 在动力系统中若状态 $x(t)$ 总有惟一的状态 $x(t-1)$ 与之对应,则该系统是可逆的。也就是说,若动力系统轨道总不相交,则系统是可逆的。通常,连续确定性流是可逆系统,由这种流得到的映射也是可逆的。

3. 庞加莱映射

连续流可以通过相空间上的一段曲面变换为映射。在流相空间上,取一段低维相空间低一维的曲面,当流轨道穿过该曲面时,记下曲面上相应位置,作为该时刻对应

映射的状态。由于流在转换成映射以后,维数降低,因此便于分析。这种将流映射得到映射通常称为庞加莱映射,而所取的平面则称为庞加莱平面。随着曲面不同选择,一个流的庞加莱映射可以有无穷多个庞加莱映射。轨道与原来流上的轨道是一一对应的,它们之间的拓扑结构是相同的。对于做周期运动的连续动力系统,其庞加莱映射也具有周期性。如图 1-2 所示,一个周期运动的连续动力系统,所得到庞加莱映射是一个两周期序列,若只考虑从同一方向进行的穿越,则所得到庞加莱映射是一个不动点。

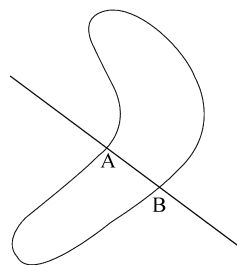


图 1-2 庞加莱映射示意图

1.3.2 吸引子

在动力系统的研究中,常常希望了解在长时间演化后,系统会有什么样的特性。为了去除暂态效应的影响,引入了吸引子的概念。概括地说,吸引子就是一个不变集,它不断地“吸引”着周围的状态。若 W 的开邻域 N 满足当 $t \rightarrow \infty$ 时 $F^t(N) \rightarrow \Omega$, 同时 Ω 不可再分割为更小集合 $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ 使得 $F^t(\Omega_1) \cap F^t(\Omega_2) = \emptyset$, 则 Ω 是一个吸引子。

常见的吸引子主要有:

(1) **不动点** 这种吸引子由一个点构成,其周围的状态最终都会收敛到该点上。例如动力系统动力学方程为

$$x_{n+1} = F(x_n) = 2x_n(1 - x_n) \quad (1-3)$$

该动力系统在 $x_n = 1/2$ 处有一个不动点,如图 1-3 所示。

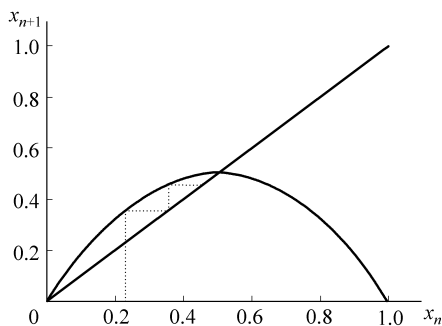


图 1-3 不动点

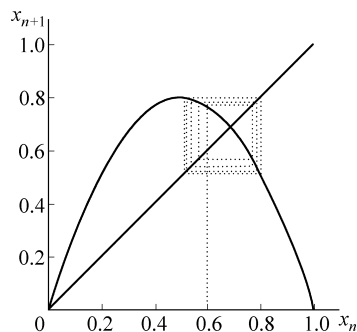


图 1-4 极限环

图 1.3 中虚线表示点 (x_n, x_{n+1}) 随时间 n 在平面 $x_n - x_{n+1}$ 上的变化情况。

(2) **极限环** 做周期运动的吸引子称为极限环。图 1-4 为一个两周期极限环映射。它动力学方程为

$$x_{n+1} = F(x_n) = 3.2x_n(1 - x_n) \quad (1-4)$$

(3) **环面** 环面是由多个周期不具有有理数关系的极限环构成的振荡系统。由于各个极限环的周期不具有有理数关系,所以无法将这些极限环锁定在一个固定的周期上,因此系统做一种准周期运动。

除此之外还有一类吸引子具有一些奇异的性质,这就是下面将介绍的混沌或奇异吸引子。

1.3.3 混沌的几种定义

迄今为止,学术界对“混沌”尚缺乏统一和普遍接受的定义,这主要源于混沌现象的复杂性,目前人们对混沌本身的种种特性还没有完全掌握。本节介绍两个常见的“混沌”的定义。

定义1 若一个非线性系统的行为对初始条件的微小变化具有高度敏感的依赖性,则称为混沌运动。

该定义描述了混沌运动局部的极度不稳定性,常常被形容为“蝴蝶效应”。这种高度的不稳定性是指在相空间中初始值极其接近的两条轨道,随着时间的演进,轨道间的距离以指数形式迅速分离。这种行为显示了混沌系统局部的不稳定性,但整个混沌系统本身并不会随着轨道间的指数分离特性而变得发散或不稳定,混沌运动总是在一个有限的空间内反复折叠伸缩,逐渐分布于整个相空间,形成奇异吸引子。当两条轨道间的距离大到可以与混沌运动的空间相比拟时,轨道在相空间中呈现近似随机的特性,这是确定性系统本身表现出的一种内在的随机性。

定义2 它是基于 Li-Yorke 定理的严格定义。Li-Yorke 定理为: 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续自映射,若 $f(x)$ 有 3 周期点,则对任何正整数 n , $f(x)$ 有 n 周期点。混沌的定义如下: 闭区间 I 上的连续自映射 $f(x)$ (下文记为 f), 若满足下列条件,则一定出现混沌现象:

- (1) f 周期点周期无上界;
- (2) 闭区间 I 上存在不可数子集 S , 满足:
 - ① 对任意 $x, y \in S$, 当 $x \neq y$ 时, 有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0 \quad (1-5)$$

- ② 对任意 $x, y \in S$, 有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0 \quad (1-6)$$

- ③ 对任意 $x, y \in S$, 其中 y 是 f 的任一周期点, 则有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0 \quad (1-7)$$

这就是著名“周期三意味着混沌”, 即对上述所定义的系统, 若存在 3 周期点, 则任何周期都可能拥有, 该系统可能出现混沌现象。

上述定理和定义描述了混沌运动不同于一般周期运动的重要特点。式(1-5)、式(1-6)和式(1-7)说明, 混沌运动的轨道间总是时而无限接近, 时而彼此分离, 表现出非周期的混乱性; 混沌动力系统相空间中充满着可数无穷多周期轨道和不可数无穷多非周期轨道; 在相空间中总存在着不稳定的周期轨道; 随着系统的演化, 不稳定周期轨道旁的临近轨道总是与该轨道分离。混沌运动充斥在相空间上的有限区域内, 在相空间中形成了混沌吸引子。由于其不同于其他常见吸引子, 因

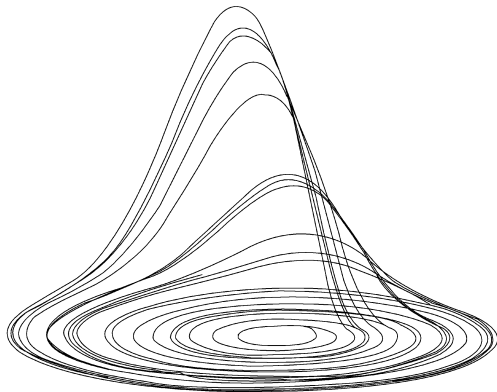


图 1-5 Rössler 吸引子

而也称为奇异吸引子。

以下分别给出连续时间流和离散映射的混沌吸引子。

Rössler 吸引子 Rössler 吸引子被认为是最简单的连续时间混沌系统,它的动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = -(z + y) \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + (x - c)z \end{cases} \quad (1-8)$$

式中 a, b, c 为常数。该系统非线性主要来自于第三个等式中的 xz 项,其动力学轨道如图 1-5 所示。

二进制移位(Binary shift)映射 该映射也常称为伯努利映射。其映射函数定义为

$$x_{n+1} = 2x_n \pmod{1} \quad (1-9)$$

如表 1-1 所示,表中初始值为二进制表示,有限精度测量值经过二进制的移位映射后,每次迭代会丢失 1 比特的信息,经过多次映射迭代,关于这条轨道的所有信息全部丢失,系统进入近似随机运动的状态,表中“?”就代表了无法测量的不定状态。这种信息的迅速丢失,导致必须依靠统计的方法才能对混沌系统的长期状态进行描述。

表 1-1 二进制移位映射的信息丢失

x_0	0.1101010011	x_3	0.1010011???	x_6	0.0011??????	x_9	0.1?????????
x_1	0.101010011?	x_4	0.010011????	x_7	0.011????????	x_{10}	0.??????????
x_2	0.01010011??	x_5	0.10011?????	x_8	0.11????????		

1.4 混沌的性质

本节主要介绍混沌不同于一般系统的特殊性质,对这些性质的了解和掌握,是对混沌系统进行深入分析和研究的基础^[3,4]。

1.4.1 Lyapunov 指数

Lyapunov 指数是一种定量描述动力系统轨道局部稳定性^[3]的方法。它的定义如下:设相空间中一点 $x(0)$ 有半径为 $\epsilon(0)$ 的邻域,该邻域随着动力系统演化向相空间的各个方向做伸展或收缩,成为一个椭球,椭球在各个方向上的轴长为 $\epsilon_i(t)$,则轨道 $x(t)$ 在第 i 个方向上的 Lyapunov 指数定义为

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon(0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\epsilon_i(t)}{\epsilon(0)} \quad (1-10)$$

轨道在各个方向上的 Lyapunov 指数共同组成 Lyapunov 指数谱,其中最大的 Lyapunov 指数对系统的性质起着决定性^[3]的作用,因此称为该系统的 Lyapunov 指数。Lyapunov 指数反映了在局部范围里系统轨道间的分离程度,当 Lyapunov 指数大于 0 时,轨道间的分离随着时间成指数分离,系统呈现对初始状态的极度敏感性。Lyapunov 指数是否大于零,通常作为判断系统是否存在混沌运动的重要判据。

混沌系统对初始条件的敏感性可以被量化为

$$|\epsilon(t)| \approx e^{\lambda t} |\epsilon(0)| \quad (1-11)$$

式中 λ 近似为最大 Lyapunov 指数。对于任何测量精度 $\epsilon(0) = \delta x$ 的初始条件, 该系统可预测的时间不会超过 Lyapunov 时间

$$T_{\text{Lyap}} \approx -\frac{1}{\lambda} \ln |\delta x / L| \quad (1-12)$$

式中, L 为混沌吸引子所在相空间大小尺度。Lyapunov 时间决定了在分析动力系统时, 是否要考虑该系统的混沌特性。当观测时间远小于 Lyapunov 时间时, 系统的混沌特性很难观察到, 而当观测时间远大于 Lyapunov 时间时, 就必须依靠统计方法来考察混沌系统的长期特性。

1.4.2 遍历性和混合性

遍历性是一个在物理学中经常使用的概念, 在动力学中, 系统的轨道具有遍历性表示该轨道具有一定“回归性”, 即随着时间推移, 轨道总可以任意地接近它所经过的状态。混合性(mixing)则表示系统轨道初始状态的选择, 不影响轨道的统计特性, 其定义为: 若不变集 S 上的映射 F 是混合的, 则对于 S 中任意两个子集 A 和 B 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(F^t(B) \cap A) = \mu(A)\mu(B) \quad (1-13)$$

式中, $\mu(\cdot)$ 表示测度或者可以理解为概率。式(1-13)右侧表示在 S 上随机任取两点分别落入集合 A 和 B 的概率; 左侧则表示以概率 $\mu(B)$ 落入集合 B 中的点随着时间推移会以多大概率落入集合 A 中。若等式成立, 则系统是混合的。当系统同时满足遍历性和混合性时, 就相当于在信号统计分析中各态历经的概念。此时, 可以通过时间平均代替集平均对系统的统计特性进行分析。混沌系统是同时满足遍历性和混沌性的系统, 因此可以使用信号统计分析中的各种分析工具对其进行分析和处理。

1.4.3 随机性特征

由于对初始条件的极端敏感性, 确定性混沌运动会表现出某些随机性现象所具有的特征。

(1) 时域上的随机混乱现象 不同于常见周期性运动, 混沌运动在表面上总是呈现出随机混乱现象, 它虽然不是以固定周期经过某些状态, 但是也并不发散, 而是不定期

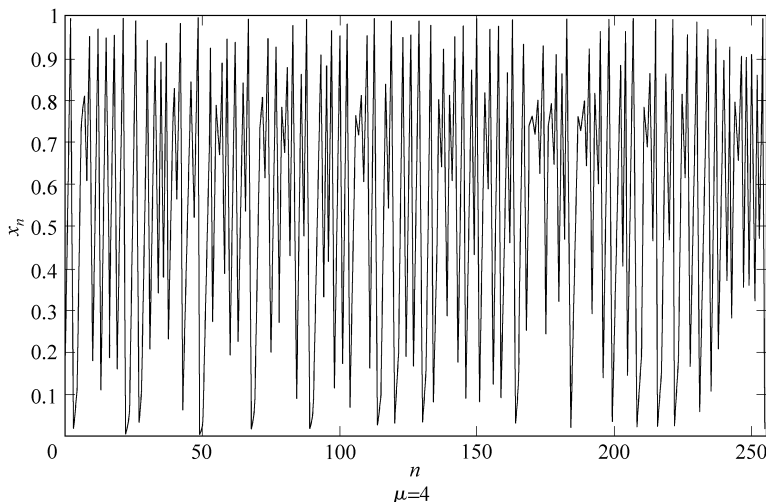


图 1-6 Logistic 映射的时域图

地无限接近相空间上的各个状态。混沌运动在时域上随机运动现象,可以从图 1-6 中看到,该混沌映射就是著名的 Logistic 映射,其映射函数为

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n) \quad (1-14)$$

该映射在 $\mu > \mu_\infty \approx 2.80231 \dots$ 时处于混沌运动状态。从图中可以看到,混沌运动在时域上表现为一种非周期性运动,这种非周期性与随机运动极其相似,因而混沌运动也可以看做是一种伪随机运动。

(2) 长期不可预测性 由于混沌系统的 Lyapunov 指数为负,因此相邻很近的轨道间存在着指数分离现象。这种指数分离现象会导致初始条件中很小的测量误差迅速扩大,使得原本确定性动力系统完全失去长期预测能力。如图 1-7 所示,两条初始状态相差 10^{-5} 的 Logistic 映射轨道,迭代 20 多次后,在相空间中完全分离,成为两条看似毫无关系的轨道。关于轨道初始状态的信息,随着动力系统的演化迅速丢失,造成了混沌系统长期不可预测。

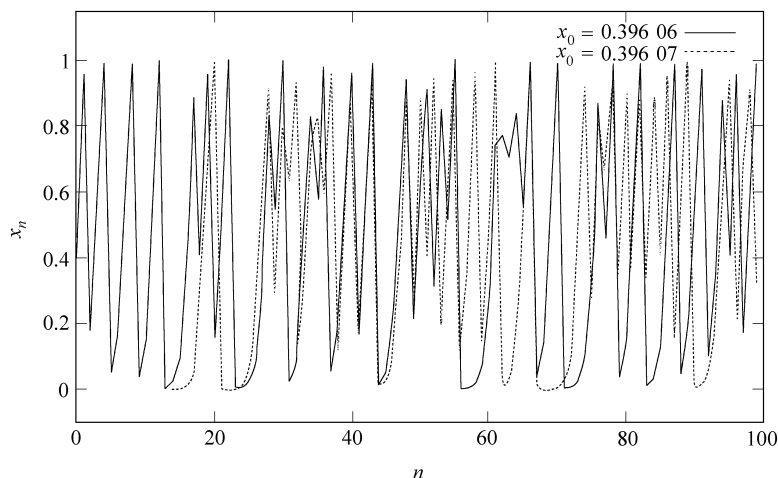


图 1-7 Logistic 映射轨道间的指数分离现象

(3) 频域上的宽带白噪声特性 由于混沌运动的非周期性,使其在频谱上也呈现为宽

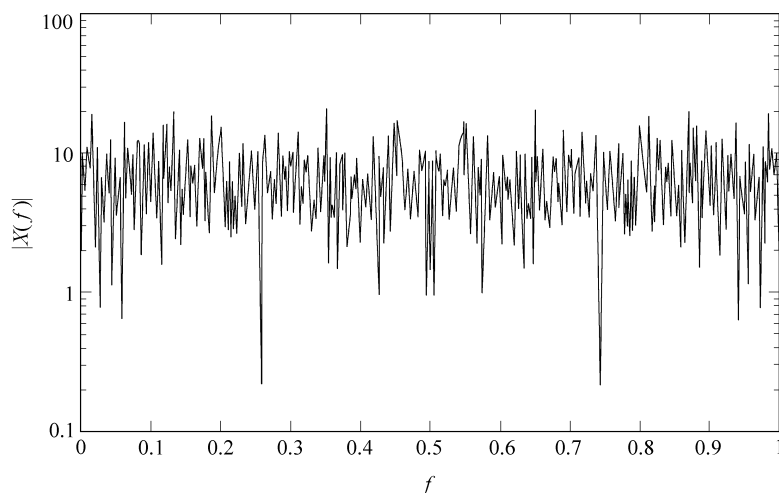


图 1-8 Logistic 映射的功率谱