第3章 力系的平衡条件与平衡方程

本章基于平衡的概念，应用力系等效与力系简化理论，论述力系平衡的充分与必要条件，据此导出一般情形下力系的平衡方程，并将力系的平衡方程应用于各种特殊情形，特别是所有力的作用线都位于同一平面内——平面力系的情形。平面力系平衡方程及其在刚体与简单刚体系统中的应用是本章的重点。

分析和解决刚体或刚体系统的平衡问题，是所有机械和结构静力学设计的基础。为了打好这一基础，必须综合应用第1～3章的基本概念与基本方法，包括约束、等效、简化、平衡以及受力分析等。

关于摩擦问题，本书主要讨论工程中常见的一类摩擦——干摩擦。重点是根据库仑定律，分析具有滑动摩擦时的平衡问题。

3.1 教学要求与学习目标

1. 正确掌握平衡的概念：

(1) 物体平衡的概念；

(2) 整体平衡与局部平衡的概念。

2. 正确理解和掌握平衡条件与平衡方程：

(1) 正确掌握并能熟练应用平面力系平衡方程求解平面力系作用下的平衡问题；

(2) 能够灵活应用平面力系平衡方程的各种形式求解平衡问题；

(3) 学会应用不同形式的平衡方程检验所得结果的正确性。

3. 正确分析和解决刚体系统的平衡问题。

4. 全面掌握受力分析、求解物体系统平衡问题的方法。

5. 正确理解和掌握静滑动摩擦定律——库仑定律。

6. 正确掌握考虑摩擦时求解平衡问题的基本方法。

7. 正确理解和掌握摩擦角与自锁的概念。

3.2 理论要点

所有力的作用线均处于同一平面内的力系，称为“平面力系”。在工程实际中普遍存在平面力系的平衡问题。而且很多结构和构件都具有对称面，而且受力也具有对称性，这时虽然所受的是空间力系，也可以简化为对称面内的平面力系。研究平面力系既概括地研究了平面内的各种特殊力系，也有助于研究空间任意力系。因此，这一章是静力学理论的重点。

3.2.1 平面力系作用下物体的平衡条件与平衡方程

1. 平衡条件

根据平面力系的简化结果，得出平面力系平衡的必要和充分条件是：力系的主矢和力系对任选点的主矩分别等于零。即

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{M}_{O} = \boldsymbol{0}$$

2. 平衡方程的基本形式

将上述第一个条件写成投影的形式，第二个条件写成代数量的形式，则得到

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_O = 0$$

这一组方程称为平面力系的平衡方程，是平衡方程的基本形式。其中第一和第二个方程分别表示平面力系中所有的力在 x 轴和 y 轴上投影的代数和等于零，第三个方程表示所有的力对任选点 O 之矩的代数和等于零。

3. 平衡方程的其他形式

除了上述平衡方程的基本形式外，平面力系的平衡方程还可以写成其他形式。读者可以应用力系简化理论，证明当这些不同形式的平衡方程成立时，同样可以满足上述平衡条件，即主矢和主矩分别等于零。

平面力系平衡方程的第二种形式为

$$\sum M_A = 0$$

$$\sum M_B = 0$$

$$\sum M_C = 0$$

其中 A、B、C 为任选的三点，但三点不能共线。

平面力系平衡方程的第三种形式为

$$\sum M_A = 0$$

$$\sum M_B = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

其中 A、B 为任选的两点，但连线 AB 不能与 x 轴垂直。

3.2.2　求解物体在平面力系作用下的平衡问题时需要注意的几个方面

求解有关平面力系平衡问题时，仍应着重于练习受力分析的基本方法。也就是：注意选择合适的平衡对象，并将其从系统中隔离出来；根据约束性质、作用与反作用定律，分析作用在平衡对象上的力；正确应用平衡方程求解未知力。

在应用平面力系平衡方程时，应注意以下几个方面的问题。

(1) 无论是求投影还是求力对点之矩的代数和，都不要忘记“所有的力”这一前提，不要遗漏参加平衡的力。

(2) 应用平衡方程时，要特别注意力的投影及力对点之矩的正负号。

(3) 应用力矩平衡方程时，可以将力矩中心选为两个未知力作用线的交点。这样，在这一力矩平衡方程中将不包含这两个未知力，而只包含另一个未知力。这就可以通过一个方程求解一个未知力，而无需解联立方程。

(4) 根据不同问题的具体情况，可以灵活应用上述三种形式的平衡方程。但所用的方程必须是互相独立的。

(5) 要善于利用其他形式的平衡方程验证所得结果的正确性。

3.2.3　刚体系统平衡问题的特点

由两个或两个以上的刚体所组成的系统，称为“刚体系统”，简称“刚体系”。为了解决刚体系统的平衡问题，必须了解这类问题的特点，将前面几章所介绍的受力分析应用于刚体系统中，掌握它的平衡问题的分析方法。

刚体系统平衡问题的特点是：在刚体系统中，一方面刚体数目不止一个，另一方面约束(或连接)方式和受力情况都比较复杂。因此，在很多情形下，只

考虑整个系统或某个局部系统，或只考虑某个刚体的平衡都不能解出全部未知力。但是，由于所讨论的刚体系统是平衡的，组成这一系统的每个分系统以致系统中的每个刚体也必然是平衡的。因此，只要正确理解整体平衡与局部平衡的概念，全面地考虑整体平衡和局部平衡，就可以解出全部未知力。

3.2.4 求解刚体系统平衡问题的基本方法

基于上述特点，分析刚体系统平衡问题的基本方法与分析单个刚体的平衡问题基本上是相似的，但也有一些差异。只有把握住这些差异，才能在前几章受力分析的基础上，比较熟练而正确地解决这一类的平衡问题。

除了第 1 章和第 2 章所介绍的受力分析基本方法外，在求解刚体系统平衡问题时，要着重注意以下几个问题。

1. 注意选择合适的平衡对象

刚体系统是由两个以上刚体组成的，因此，有一个选择平衡对象的问题。实际上，刚体系统的结构形式比较复杂，组成系统的单个刚体或各个分系统也是多种多样的，平衡对象的选择十分灵活。有时可以考虑整个系统，有时可以考虑分系统，有时可以考虑其中的单个刚体。一般情形下是先考虑整个系统，当平衡方程数少于未知力个数时，则需要将系统“拆开”，依次分析每一个刚体（或分系统）的受力并画出受力图，从中选择受力比较简单而且又能先确定某些力的刚体或分系统作为平衡对象。

应当指出，在刚体系统中往往需要考虑几个平衡对象的平衡问题，才能解出全部未知力。如果平衡对象选择得合适，所需的平衡对象就会少一些，计算也会相应地简单些。

2. 正确地进行受力分析，分清“施力体”与“受力体”

在刚体系统中，一个刚体可能与几个刚体联系着，它们之间的联系方式即约束方式也比较复杂。因此，刚体之间的受力分析显得格外重要。这时，一方面要根据刚体间的约束性质及接触方式，决定约束力的方向及其作用线的位置。但另一方面，更重要的是分清每个力是由“谁”对“谁”作用的，亦即分清每个力的“施力体”与“受力体”。一般以所选择的平衡对象作为“受力体”，分析作用在它上面的每一个力的“施力体”，并根据作用与反作用定律，将两个相互约束的刚体之间的作用力与反作用力弄清楚。把握住这一点，即使对于复杂的刚体系统，也不会发生受力分析的错误。

此外，在刚体系统中，主动力系的分布也比较复杂，解题时常常需要加以

简化。但是这种简化不会改变这些力的施力体与受力体。例如系统中某个刚体上作用有外部载荷，当简化这种外部载荷时，这一刚体依然是它的受力体。

3. 分析受力时注意区别内力与外力

当选择整个系统或分系统作为平衡对象并进行受力分析时，应注意平衡对象内部刚体之间存在着相互作用力，这些力总是成对出现的：它们两两大小相等、方向相反，且作用在一条直线上。这种在平衡对象内部刚体之间的施力与受力称为“内力”。

考虑这样的平衡对象的平衡时，上述内力对其平衡无影响。画受力图时这些内力不必画出；建立平衡方程时，也无需写入。至于平衡对象以外的其他刚体作用在其上的力，在平衡对象已经隔离出来之后，这些力已不是内力，而是“外力”，在受力分析时，必须一个不漏地加以考虑。

应当注意，所谓“内力”和“外力”都是相对于所选择的平衡对象而言的。例如，某个力对整个系统而言是内力，但是对于某个分系统或单个刚体，则变成外力。求解刚体系统问题时要特别注意的就是这些对于整个系统是内力，而对局部却是外力的力。这也正是容易发生错误的地方。

刚体间相互作用力的方向无法确定时，仍然可先假设其方向。但必须注意，当所求的结果为负时，表明该力作用于这一刚体的方向与所设相反；根据作用与反作用定律，这一刚体对于另一个刚体的反作用力的方向亦与所设相反。这样，在考虑另一个刚体平衡确定其他未知力时，上述刚体对它的反作用力的方向可以改成与实际方向一致，然后再建立平衡方程，也可以不改变其方向，而将以上所得之负值代入平衡方程。

4. 应用平衡概念考察整体与局部受力状态

受力分析时，除了注意根据约束性质分析约束力，分清施力体与受力体外，有时还是不够的，必须从平衡的概念加以分析和考察。常常遇到这样的情况：从整个系统看，似乎是平衡的，但局部却是不平衡的；或者局部似乎是平衡的，而整个系统却是不平衡的。这样所得到的结果当然是不正确的。因为整个刚体受力而处于平衡状态时，其中的每一个分系统或每一个刚体也必然处于平衡状态中。

因此，在处理刚体系统平衡问题时，不能只是孤立地考察整个系统或某个局部是否满足平衡条件，而应该使作用在系统上及某一局部上的力系，既满足整体的平衡要求，也满足局部的平衡要求。这样做既可以避免错误，又可以检查所得结果是否正确。

3.2.5 关于刚体系统的静定和静不定性质

所谓“静定”系指平衡方程数目与未知力的个数相等，利用静力学平衡方程即可确定全部的未知力。“静不定”是指平衡方程数目比未知力的个数少，因而仅仅依靠静力学平衡方程无法确定全部的未知力。

在很多刚体系统中，如果只考虑整个系统，其未知约束力的个数多于三个(平面力系只能提供三个独立的平衡方程)，但当“拆开”后依次考虑各个刚体平衡时，仍可以解出全部未知力的刚体系统，就是静定的。但也确有一些刚体系统在“拆开”后仍然无法求解全部的未知力，这种刚体系统就是静不定的。

在解刚体系统平衡问题时，应先判断其为静定的还是静不定的，从而确定其是否可用静力学来求解。

判断的方法是：在一般情况下，先根据约束性质分析刚体系统中全部未知外力的个数，共计为 m；再将系统“拆开”，依次考虑每一个刚体为平衡对象，视其所受力系的性质，确定可以提供的独立的平衡方程的数目，计为 n。若 $m=n$，则系统为静定的，是静力学可解的；若 $m>n$，则系统为静不定的，是静力学不可解的。

最后需要指出的是，刚体系统是否静定，主要取决于有无多于静定所要求的约束，即多余约束，而与选择多少个平衡对象无关。常常会出现这样的错觉，以为考虑了每一个刚体平衡之后，再考虑一次整体平衡就可以多出三个平衡方程，多解出三个未知力。其实，如果每个刚体都是平衡的，则这些刚体所组成的系统也必然是平衡的。因此，整体平衡方程已经包含于各个刚体的平衡方程之中，亦即整体平衡方程与各个刚体的平衡方程之间是相依的。

3.2.6 摩擦的基本概念

两个互相接触的物体在有相对运动(包括滑动和滚动)或相对运动趋势的情形下，接触表面便会产生一种阻碍运动或阻碍运动趋势的力，这种力称为“摩擦力”。其方向总是与运动方向或运动趋势方向相反。

以滑动摩擦为例。在外力作用下，接触物体开始产生滑动趋势；随着外力增加，滑动趋势亦随之增加，直至物体进入运动状态。在这一过程中摩擦是不同的，摩擦力也是不同的。从有滑动趋势到开始滑动以前为“静摩擦”状态，这时的摩擦力称为“静摩擦力”。在这一过程中，摩擦力随着外力的增加(即滑动趋势的增加)而增加，因而静摩擦力是自零到某一数值之间变化的量；当物体刚刚进入运动状态时，静摩擦力达到最大值，这一数值称为最大静摩擦力；物体进入运动状态之后的摩擦为“动摩擦”，这时的摩擦力称为“动摩擦力”。最

大静摩擦力和动摩擦力均与加在接触表面的正压力 F_N 成正比，其值分别为

$$F_{max} = f_s F_N$$

$$F' = f F_N$$

其中 F_{max} 和 F' 分别为最大静摩擦力和动摩擦力；f_s 和 f 分别为静摩擦因数和动摩擦因数。最大静摩擦力除与正压力 F_N 有关外，还与接触物体的材料及表面粗糙程度有关，而与接触面积大小无关。

当一个物体的表面与另一个物体的表面接触时，加在物体上的力，包括摩擦力在内，有可能使物体处于下列四种运动状态之一。

(1) 加在物体上的力没有使物体沿接触面发生运动的趋势，这时，物体是静止的，两个接触表面之间不存在摩擦力。

(2) 加在物体上的力有使物体沿接触面运动的趋势，但外加力尚未大得足以克服接触面间与运动趋势相反的摩擦力，因而不足以使物体进入运动状态。这时的摩擦力由平衡方程确定，而不能应用式 $F_{max} = f_s F_N$。因为这时的摩擦力尚未达到最大值。

(3) 加在物体上的力，正好能使刚体沿接触面滑动，亦即达到"临界运动状态"，这时的摩擦力已经达到最大值，因而既可以由平衡方程确定，也可用 $F_{max} = f_s F_N$ 计算。

(4) 物体在所加力的作用下滑动，即物体进入运动状态，这时，平衡方程不再满足，摩擦力只能由 $F' = f F_N$ 计算。

3.2.7　摩擦平衡问题的特点

本节主要分析上述四种运动状态中第二和第三类属于平衡状态的摩擦问题，即所谓摩擦平衡问题。这类问题具有以下特点。

(1) 在进入运动状态以前，包括临界运动状态，作用在物体上的所有力(包括摩擦力)必须满足平衡条件。

(2) 在进入运动状态以前，摩擦力随外加力而变化。当物体达到临界运动状态时，摩擦力达到最大值；当进入运动状态后，摩擦力稍有下降并保持某一不变值 F'。

(3) 在平衡状态下，摩擦力除满足平衡条件外，还必须满足下列物理条件：

$$F \leqslant F_{max} = f_s F_N$$

这是滑动摩擦的情形，摩擦力的方向与滑动趋势相反。

3.2.8　摩擦角的概念

对于作用在接触面上的正压力 $\boldsymbol{F}_N$ 和摩擦力 $\boldsymbol{F}$ 这两个分量，有时需要将它

们合成为一个合力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$，这个合力的作用线与正压力的作用线有一夹角，随着外加力的变化，摩擦力发生变化，这个夹角也发生相应的变化。在这里也可能有 3 种情形。

（1）当物体上的外加力没有水平分量时，没有摩擦力，因此 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 即为 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$。

（2）当物体上的外加力具有一水平分量时，将有一摩擦力，亦即 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 也有一水平分量。因此，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 与 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ 的作用线间有一夹角。

（3）当外加力的水平分量增加到使物体达到临界运动状态时，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 与 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ 间的夹角随之增大并达到最大值，这一夹角称为“静摩擦角”，用 ϕ_{s} 表示，且

$$\tan\phi_{\mathrm{s}}=\frac{F_{\max}}{F_{\mathrm{N}}}=f_{\mathrm{s}}\frac{F_{\mathrm{N}}}{F_{\mathrm{N}}}=f_{\mathrm{s}}$$

3.2.9 有摩擦时斜面上物体的运动和静止状态

运用摩擦角的概念，可以得到物体在有摩擦的斜面上的几种运动和静止状态。

（1）当斜面倾角 θ 小于静摩擦角 ϕ_{s} 时，物体处于静止状态；

（2）当 θ 等于静摩擦角 ϕ_{s} 时，物体达到临界运动状态；

（3）当 θ 大于静摩擦角 ϕ_{s} 时，物体进入运动状态。

由此可见，只要满足

$$\theta\leqslant\phi_{\mathrm{s}}$$

这一条件，不管物体重量多大，它在斜面上总能保持平衡状态，而不会下滑。这就是工程上的“自锁”现象。

3.2.10 工程中常见的几类摩擦平衡问题

1. 第一类摩擦平衡问题

所有外力都是已知的，静摩擦因数也已知，要求确定物体处于静止还是运动状态。

这类问题中，保持平衡所需的摩擦力 F 是未知的，其大小并不等于 $f_{\mathrm{s}}F_{\mathrm{N}}$。这时，可通过解平衡方程求出 F 和 F_{N}，进而由

$$F_{\max}=f_{\mathrm{s}}F_{\mathrm{N}}$$

求得 $F_{\max}$。将 F 与 $F_{\max}$ 进行比较，若 $F\leqslant F_{\max}$，物体保持静止；若 $F>F_{\max}$，物体进入运动状态。

2. 第二类摩擦平衡问题

所有外力都是给定的，且已知物体处于临界运动状态，要求确定保持这种临界状态所需要的静摩擦因数。

这种情形下，依然可以通过平衡方程解出摩擦力 F 和正压力 F_{N}。因为这时摩擦力已达到最大值 $F_{\max}$，由 $F_{\max}=f_{\mathrm{s}}F_{\mathrm{N}}$，即可求得静摩擦因数 $f_{\mathrm{s}}=\dfrac{F_{\max}}{F_{\mathrm{N}}}=\dfrac{F}{F_{\mathrm{N}}}$。

3. 第三类摩擦平衡问题

给定静摩擦因数，并已知物体处于临界运动状态，要求确定所加外力中的某一个力的大小和方向。

这时的摩擦力 $F_{\max}=f_{\mathrm{s}}F_{\mathrm{N}}$，其方向与可能运动的方向相反，将此条件与平衡方程联立，即可解出所要求的未知力。

解决以上三类问题的基本方法，依然是前几章所采用的受力分析的方法。当物体在所有外力（包括摩擦力）作用下只有移动趋势时，采用汇交力系的平衡方法；当物体既有移动又有转动趋势时，采用平面力系的平衡方法；当结构由几部分组成时，则采用刚体系统的分析方法。

另外需要指出，当有三个以上的力作用在物体上时，应用平衡方程求解；当只有三个力（将正压力与摩擦力看成为一个合力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$）作用在物体上时，采用力封闭三角形求解可能更方便些。

3.3　学习建议

1. 要通过典型例题或系统的练习牢固掌握整体平衡与局部平衡的概念，这一点不仅在刚体静力学中非常重要，而且在材料力学或弹性静力学中也是非常重要的。

2. 在求解刚体系统平衡问题的工程中，如果有几个平衡对象可供选择时，应选择先考虑哪一部分平衡，后考虑哪一部分平衡。选择的原则是，能利用平衡条件确定某些未知力（不一定是全部）的部分应先行考虑。

3. 求得平衡问题的结果后，应利用未被选为平衡对象的部分的平衡条件，即相依方程，校核所得结果是否正确。

4. 正确理解摩擦平衡问题的特点，掌握解决两类摩擦平衡问题的基本

方法。

5. 通过斜面物块系统摩擦平衡问题的分析,正确认识和理解摩擦角的概念、自锁的概念。

6. 对于滚动摩擦问题,只需要一般了解,不要求深入掌握。

3.4 例题示范

例题 3-1 飞机起落架尺寸如图 3-1(a)所示。A、B、C 三处均为铰链约束,OA 杆垂直于 A、B 连线。当飞机等速直线滑行时,地面作用于轮上的反作用力 $F_P=30$ kN,水平摩擦力和杆的自重都比较小,故可以略去不计。求 A、B 两处的约束力。

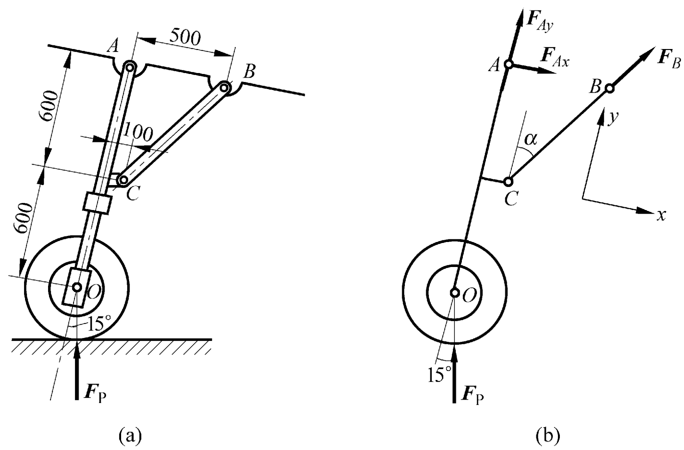

图 3-1 例题 3-1 图

解 1. A 处为铰链约束,故有两个约束力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$ 和 $\boldsymbol{F}_{Ay}$;BC 为二力杆,所以 B 处只有一个沿着 BC 方向的约束力 $\boldsymbol{F}_B$;轮子与地面之间的摩擦略去不计,只有一个地面对轮子的反作用力 $\boldsymbol{F}_P$。于是,为了求得 F_{Ax}、F_{Ay} 和 F_B,取 AO 杆和 BC 杆及轮子所组成的系统作为平衡对象,其受力图如图(b)所示。图中

$$\alpha = \arctan\frac{40}{60} = 33.7°$$

2. 根据平面力系的平衡条件求约束力。

由平衡方程

$$\sum M = F_B \times AB\cos\alpha - F_P \times AO\sin 15° = 0$$

解得