

第 1 章 基本概念

1.1 信号及其描述和分类

1.1.1 信号的概念

一个信号(signal) $f(t)$ 或 $f(n)$,可以代表一个实际的物理信号,也可以是一个数学上的函数(function)或序列(sequence)。比如 $f(t) = K \sin(\omega t)$,它既是正弦信号,也是正弦函数;而数字化了的语音信号序列 $f(n)$ 则是蕴含了人类语音信息的语音信号,同时在数学上也可以看成是一个序列。因此本书也常常把“信号”与连续情形下的“函数”或离散情形下的“序列”等同起来。

现实世界中的信号有两种:一种是自然和物理信号,如语音、图像、地震信号、生理信号等;另一种是人工产生信号经自然的作用和影响而形成的信号,如雷达信号、通信信号、医用超声信号和机械探伤信号等。

不管是哪种形式的信号,它总是蕴含一定的信息。比如,图像信号含有丰富的图像信息,包括物体、颜色、明暗等。又比如,人们通过研究地震波信号,可以推断出震源、震级等信息。因此可以这样说:信号是信息的表现形式,信息(information)则是信号的具体内容。

1.1.2 信号的描述方法

数学上,信号可以描述为一个或若干个自变量的函数或序列的形式。比如信号 $f(t)$,其中 t 是抽象化了的自变量,它可以是时

间,也可以是空间。为叙述方便,本书称单自变量的一维(或称一元)信号为时间信号,而两个自变量的二维(或称二元)信号为空间信号。需要指出的是,这里的时间和空间是抽象化了的概念。

信号的另外一种描述方式是波形(waveform)描述。按照函数随自变量的变化关系,可以把信号的波形画出来。和信号的函数或序列表达式描述方式相比,波形描述方式更具一般性。有些信号,虽然无法用某个具体的数学函数或序列描述,但却可以画出它的波形图。

随着本书内容的深入,还可以发现,频谱也是信号的描述方法之一,它是频率的函数,可以与表示信号的函数或序列一一对应。如果信号的频谱不是恒定的而是随时间变化的,那么可以用“时频表示”更加准确地描述信号的频谱分布和变化,它是时间和频率的二元函数。但是,我们更愿意称这种描述方法为分析方法或处理方法。

1.1.3 信号的分类

对于信号,可以从几个不同的角度进行分类。

1. 确定性信号与随机信号

若信号可以由一确定的数学表达式所表示,或者信号的波形是惟一确定的,这种信号就是**确定性信号**。反之,如果信号具有不可预知的不确定性,则称之为**随机信号**或**不确定性信号**。任意给定一个自变量的值,对确定性信号,可以惟一确定其信号的取值;而对随机信号,其取值却是不确定的。随机信号不在本书的讨论范围之内,本书以后所说的信号一般都是指确定性信号。

2. 周期信号与非周期信号

若一个信号 $f(t)$ 满足下面的关系:

$$f(t) = f(t + T), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (1.1.1)$$

则称之为**周期信号**(periodic signal),其中满足式(1.1.1)的正的

最小 T 值称为该信号的**基波周期**(fundamental period), 简称**周期**。显然, 周期信号的波形是按宽度 T 周期重复的, 周期信号是无始无终信号。图 1.1.1(a) 是周期信号的一个例子。

如果一个信号不是周期信号, 那么它就是**非周期信号**(aperiodic signal)。非周期信号可以看成是周期信号在周期趋于无穷大时的特例。

有一类特殊的非周期信号, 称为**准周期信号**(quasi-periodic signal), 它们并不是周期信号, 但是在一定的时间范围内, 其波形具有一定的周期性, 只不过周期是变化的, 而且两个周期内的波形也只是相似。比如汉语拼音“a”, 如果把它的波形画出来, 可以看出它具有一定的准周期性, 图 1.1.1(b) 中是汉语拼音“a”开始部分的波形。事实上, 元音都表现出这种准周期性。

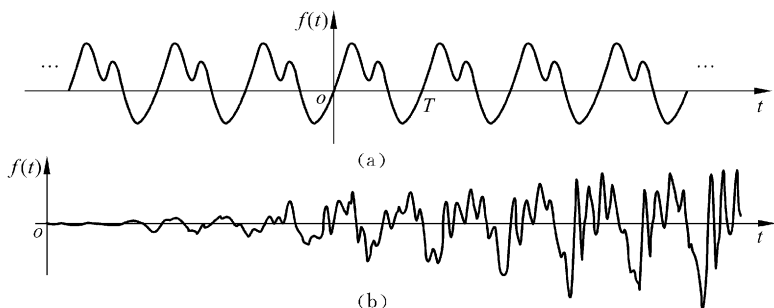


图 1.1.1 一个周期信号(a)和一个准周期信号(b)的波形图

同样, 若一个只在整数点取值的信号 $f(n)$ (即序列, 这是后面将要介绍的时间离散信号), 满足

$$f(n) = f(n + N), \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (1.1.2)$$

则 $f(n)$ 是**周期信号**(周期序列), 其中满足式(1.1.2)的正的最小 N 值称为该信号的**基波周期**, 简称**周期**。

3. 时间连续信号与时间离散信号

在自变量的整个连续区间内都有定义的信号是**时间连续信号**或**连续时间信号**(continuous-time signal),简称**连续信号**。需要说明的是,这里的“连续”指的是定义域,信号的值域可以是连续的,也可以是不连续的。例如 $f(t) = 5 \cos t$ 就是时间连续信号,且其定义域 $(-\infty, \infty)$ 和值域 $[-5, 5]$ 都是连续的。

仅在一些离散的点上才有定义的信号称为**时间离散信号**或**离散时间信号**(discrete-time signal),简称**离散信号**。同样,这里的“离散”指的是定义域,其值域可以是连续的,也可以是不连续的。

一个时间离散信号 $f(n)$,其信号源可能本来就是离散的。例如 $f(n)$ 表示某个人在年龄 n 时的平均体重,显然这里自变量 n 只能是离散的整数。但在大部分情况下,时间离散信号是由时间连续信号经过采样后得到的。比如,对连续信号 $f(t)$,每间隔 T_s 取一个值,就可以得到 $\tilde{f}(n) = f(nT_s) (n \in \mathbb{Z})$ 。正如 1.1.1 节所述,通常,时间离散信号也可以称为**序列**。当然时间连续信号(函数)和时间离散信号(序列)都可以称为**信号**。

4. 模拟信号与数字信号

模拟信号(analog signal)是指定义域和值域均连续的信号,因此模拟信号肯定是时间连续信号。

而**数字信号**(digital signal)是指定义域和值域均离散的信号,因此数字信号肯定是时间离散信号。数字信号一般都是通过把模拟信号经过模数转换(analog-to-digit conversion, ADC)后得到。通常,ADC 每隔一个时间间隔 T_s 取模拟信号 $f(t)$ 的一个采样 $f(nT_s)$,再把该取值量化成为一些离散的数值。例如,计算机中的声卡就是按每秒8000个样点(即采样率为 8kHz)或每秒 16 000 个样点(采样率为 16kHz)等的速率把声音电信号的取值转换为 16b 或 8b 宽度的整数。

本书中,为统一起见,把一维时间连续信号(含模拟信号)的

自变量记为 t , 相应离散信号(含数字信号) 的自变量记为 n ; 把二维时间连续信号(含模拟信号) 的自变量记为 x 和 y , 相应离散信号(含数字信号) 的自变量记为 m 和 n 。

由于幅度的量化对数字信号处理的影响不是本书的重点, 故本书只涉及与幅值量化无关的连续信号和离散信号。

5. 因果信号与非因果信号

如果一个信号只在自变量的非负半轴, 即左闭区间 $[0, \infty)$ 才取非零值, 而在 $(-\infty, 0)$ 开区间内取值均为 0, 那么这样的信号就称为**因果信号**(causal signal), 否则就称为**非因果信号**。使用“因果”这一术语的目的, 主要是为了表明无法产生一个信号, 它甚至在无穷远的过去都有值。

为叙述方便, 称在自变量的正半轴, 即开区间 $(0, \infty)$ 取值均为 0 的信号为**反因果信号**(anticausal signal)。显然, 一个在整个自变量区间都存在非零值的信号, 可以表示成为一个因果信号和一个反因果信号的和。^①

特别地, 对于离散时间信号, 可以将因果信号、非因果信号和反因果信号分别改称为**因果序列**、**非因果序列**和**反因果序列**等。

6. 能量信号和功率信号

对连续信号 $f(t)$ 和离散信号 $f(n)$ 分别定义它们的**能量**(energy)为:

$$\mathcal{E}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|^2 dt \quad (1.1.3)$$

$$\mathcal{E}[f(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|f(n)\|^2 \quad (1.1.4)$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示取模运算, 显然对于实数的取模等于实数的绝对值 $|\cdot|$, 而对复数的取模可以表示为它本身与其共轭的乘积的平

^① 事实上, 原点处的值须特别考虑。

方根^①,即

$$\|C\| = \sqrt{C \cdot C^*} \quad \text{或} \quad \|C\|^2 = C \cdot C^* \quad (1.1.5)$$

如果一个信号其能量是有限的,即 $\mathcal{E}[\cdot] < \infty$, 则称之为**能量有限信号**(energy-limited signal),简称**能量信号**。

对于能量无限的信号,如非零周期信号,往往研究它的功率。信号的功率分别定义为:

$$\mathcal{P}[f(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \|f(t)\|^2 dt \quad (1.1.6)$$

$$\mathcal{P}[f(n)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \|f(n)\|^2 \quad (1.1.7)$$

若信号的功率是有限的,即 $\mathcal{P}[\cdot] < \infty$, 则称之为**功率有限信号**(power-limited signal),简称**功率信号**。

很显然,如果信号 $f(t)$ 是周期信号,且周期为 T , 那么其功率为

$$\mathcal{P}[f(t)] = \frac{1}{T} \int_T \|f(t)\|^2 dt \quad (1.1.8)$$

其中 $\int_T (\cdot) dt$ 表示在任意一个宽度为 T 的区间内的积分。同样,如果信号 $f(n)$ 是周期信号,且周期为 N , 那么其功率为

$$\mathcal{P}[f(n)] = \frac{1}{N} \sum_{n=m}^{m+N-1} \|f(n)\|^2 \quad (\forall m \in \mathbb{Z}) \quad (1.1.9)$$

一般来说,周期信号、准周期信号及随机信号,由于其时间是无限的,所以它们不是能量信号,而是功率信号;在有限区间有定义的确信号一般都是能量信号。

7. 实信号与复信号

信号(函数或序列)取值为实数的信号称为**实值信号**(real-

^① 考虑到数学上 $\|\cdot\|$ 与 $|\cdot|$ 都可以表示数的取模运算,本书常常把两者混同使用。

valued signal), 简称**实信号**; 而取值为复数的信号称为**复值信号** (complex-valued signal), 简称**复信号**。

上面是从不同角度对信号进行的分类, 事实上, 如果从其他的角度出发, 还可以有其他的分类方法, 在此不再赘述。

1.2 信号处理

由于信号中蕴含了信息, 因此信号成为人们研究的对象。研究信号的主要目的是: (1) 去伪存真: 去除信号中冗余和次要的成分, 包括不仅没有任何意义反而会带来干扰的噪声; (2) 特征抽取: 把信号变成易于进行分析和识别的形式; (3) 编码与解码: 把信号变成易于传输、交换与存储的形式(编码), 或从编码信号中恢复出原始信号(解码)……这些构成了信号处理的基本内容。

因此可以说, **信号处理** (signal processing) 是对信号进行提取、变换、分析、综合等处理过程的统称。本书的任务就是把信号抽象化后研究对其进行处理的数学方法。

人们最早处理的信号局限于“模拟信号”, 所使用的处理方法也是模拟信号处理方法。随着数字计算机的飞速发展, 信号处理的理论和方法也得到发展。于是可以先把模拟信号变成数字信号, 然后利用高效的**数字信号处理器** (digital signal processor, DSP) 或计算机对其进行数字信号处理。

一般地讲, 数字信号处理涉及 3 个步骤:

(1) **模数转换(A/D 转换)**把模拟信号变成数字信号, 是一个对自变量和幅值同时进行离散化的过程, 基本的理论保证之一是本书后面要讲的“采样定理”。

(2) **数字信号处理**包括变换域分析(如频域变换)、数字滤波、识别、合成等。

(3) **数模转换(D/A 转换)**把经过处理的数字信号还原为模拟

信号。

1.3 典型信号

遵循从易到难、从特殊到一般的原则,研究应该从典型信号开始,在熟练掌握典型信号的性质之后,再推广到一般信号。为此,本节先介绍一些典型的连续信号(函数)。熟练掌握这些信号对以后进一步的研究有重要意义。

1.3.1 指数信号

实指数信号(real exponential signal)(简称指数信号)的数学表达式为

$$f(t) = Ke^{\alpha t} \quad (1.3.1)$$

式中实数 α 反映了信号衰减($\alpha < 0$)或信号增加($\alpha > 0$)的速度,绝对值越大,速度越快;当 $\alpha = 0$ 时则信号成为直流信号。

指数信号的一个重要特性是,其微分 $\left(\frac{d}{dt}\right)$ 或积分 $\left(\int_{-\infty}^t (\cdot) dt\right)$ 还是指数信号。

1.3.2 正弦、余弦信号

正弦信号(sinusoidal signal)和余弦信号(cosinoidal signal)是人们熟知的信号,它们的数学表达式分别为:

$$f(t) = K \sin(\omega t + \theta) \quad (1.3.2)$$

$$f(t) = K \cos(\omega t + \theta) \quad (1.3.3)$$

式中 K 为振幅, ω 为角频率($\omega = 2\pi f$, f 为频率), θ 为初相位。

1.3.3 复指数信号

复指数信号(complex exponential signal)的函数表达式为

$$f(t) = Ke^{st} \quad (1.3.4)$$

式中 $s = \sigma + j\omega$ 为复数。借助于欧拉公式(Euler's equation)

$$\begin{cases} e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t) \\ e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j \sin(\omega t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \\ \sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \end{cases} \quad (1.3.5)$$

可以在复指数信号与正余弦信号之间建立联系

$$f(t) = Ke^{st} = Ke^{\sigma t} \cdot e^{+j\omega t} = Ke^{\sigma t} \cos(\omega t) + jKe^{\sigma t} \sin(\omega t) \quad (1.3.6)$$

虽然复指数信号在现实世界中并不存在,但它在信号分析中将会发挥很大的作用。

1.3.4 Sa 函数(抽样函数)

把正弦函数与自变量的比值称为**抽样函数**(sample function)或**Sa 函数**,其表达式为

$$\text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t} \quad (1.3.7)$$

当 $t = 0$ 时, Sa 函数的分子与分母都是零,可以借助于洛必达法则求得

$$\text{Sa}(0) = \left. \frac{(\sin t)'}{t'} \right|_{t=0} = \left. \frac{\cos t}{1} \right|_{t=0} = 1$$

当 $t \neq 0$ 时,随着 t 的绝对值的增大,函数值的绝对值振荡着不断减小,向 0 趋近。由于正弦函数 $\sin t$ 在 $t = n\pi (n \in \mathbb{Z})$ 时函数值为 0,因此 Sa 函数在 $t = n\pi (n \in \mathbb{Z}, n \neq 0)$ 点处函数值为 0。其波形如图 1.3.1 所示。如果称以相邻两个过零点为端点的区间为**过零区间**,那么显然,除原点附近的过零区间宽度为 2π 外, Sa 函数的其他过零区间宽度均为 π 。

可以证明, Sa 函数是偶函数。

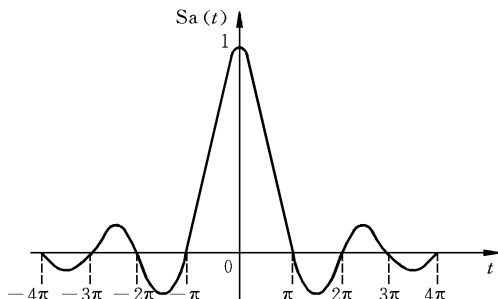


图 1.3.1 Sa 函数的波形

Sa 函数还具有下列性质：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}(t) dt = \pi \quad (1.3.8)$$

$$\int_{-\infty}^0 \text{Sa}(t) dt = \int_0^{\infty} \text{Sa}(t) dt = \frac{\pi}{2} \quad (1.3.9)$$

另外还有一个类似的函数称为“sinc 函数”，它的表达式为

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = \text{Sa}(\pi t) \quad (1.3.10)$$

1.3.5 高斯信号(钟形脉冲信号)

高斯信号(gaussian signal)的定义是

$$f(t) = K e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \quad (1.3.11)$$

波形如图 1.3.2 所示。由于其形状很像一口钟，因此也称为钟形脉冲信号。

该信号在随机信号分析中有重要地位。正态分布 $N(0, \sigma)$ 的密度函数就是高斯

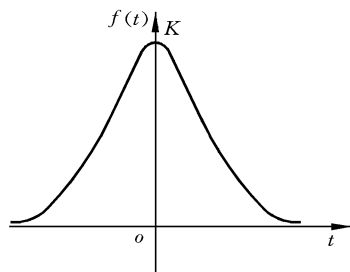


图 1.3.2 钟形脉冲信号的波形