

第 1 章 线性规划

线性规划是运筹学的重要组成部分,也是最基本的部分.自 1947 年丹齐格(G. B. Dantzig)提出了求解线性规划的一般方法——单纯形法以来,线性规划在理论上趋向成熟,日臻完善.尤其是计算机处理问题的规模及运算速度提高后,线性规划的应用领域更加广泛.无论工业、农业、商业、交通运输、军事、经济计划和管理决策等领域都有应用.大到一个国家、一个地区,小到一个企业、一个车间、一个班组都有运用线性规划后提高经济效益的例子.

本部分首先介绍线性规划的基本概念和基本理论、线性规划的数学模型和求解方法,然后介绍对偶理论、运输问题、线性目标规划及线性规划的应用实例.

1.1 线性规划问题的基本概念

1.1.1 线性规划问题及其数学模型

1. 问题的提出

在生产管理和经营活动中,经常会遇到这样两类问题:一类是如何合理地使用有限的劳动力、设备、资金等资源,以得到最大的效益(如生产经营利润);另一类是为了达到一定的目标(生产指标或其他指标),应如何组织生产,或合理安排工艺流程,或调整产品的成分……以使消耗资源(人力、设备台时、资金、原材料等)为最少.

例 1.1.1 某制药厂生产甲、乙两种药品,生产这两种药品要消耗某种原料.生产每吨药品所需要的原料量及所占设备时间见表 1.1.该厂每周所能得到的原料量为 160kg、每周设备最多能开 15 个台班,且根据市场需求,甲种产品每周产量不应超过 4t.已知该厂生产每吨甲、乙两种产品的利润分别为 5 万元及 2 万元.问该厂应如何安排两种产品的产量才能使每周获得的利润最大?

表 1.1 生产两种药品消耗原料量

项目 \ 消耗量	每吨产品的消耗		每周资源总量
	甲	乙	
原料/kg	30	20	160
设备/台班	5	1	15

设该厂每周安排生产甲种药品的产量为 x_1 (t),乙种产量为 x_2 (t),则每周所能获得的利润总额为 $z=5x_1+2x_2$ (万元).但生产量的大小要受到原料量及设备的限制及市场最大需求量的制约.即 x_1, x_2 要满足以下一组不等式条件:

$$\begin{aligned} 30x_1+20x_2 &\leq 160, \\ 5x_1+ x_2 &\leq 15, \\ x_1 &\leq 4. \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

此外, x_1, x_2 还应是非负的数:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (1.1.2)$$

因此从数学角度看, x_1, x_2 应在满足资源约束(1.1.1)式及非负约束条件(1.1.2)式下,使利润 z 取得最大值:

$$\max z = 5x_1 + 2x_2. \quad (1.1.3)$$

经过以上分析,可将一个生产安排问题抽象为在满足一组约束条件下,寻求变量 x_1, x_2 使目标函数(1.1.3)式达到最大值的一个数学问题.

例 1.1.2 某铁器加工厂要制作 100 套钢架,每套要用长为 2.9m、2.1m、1.5m 的圆钢各一根.已知原料长为 7.4m,问应如何下料,可使所用材料最省?

首先设想,若在每一根原料上截取长为 2.9m、2.1m 和 1.5m 圆钢各一根,则每根原料剩下料头为 0.9m. 制作 100 套钢架,需原材料 100 根,总共剩余料头为 90m,显然这不是最好的下料方式. 若改变每根的下料方案,如每根原料截成两根 2.9m、一根 1.5m 的圆钢,则此时剩余料头为 0.1m;如每根原料截成两根 2.1m 和两根 1.5m 长的圆钢,此时剩余料头为 0.2m. 显然这两种方案都比前述的下料方式好. 通过简单的计算,可预先设计出若干种较好的下料方案,如表 1.2 所示的 5 种方案. 而问题就变为如何混合使用这 5 种下料方案,来制造 100 套钢架,且要使剩余的料头总长为最短.

表 1.2 下料方案

下料数/根 长度/m \ 方案	I	II	III	IV	V
2.9	1	2	0	1	0
2.1	0	0	2	2	1
1.5	3	1	2	0	3
料头/m	0	0.1	0.2	0.3	0.8

假设按第 i 种方案下料的原料根数为 $x_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$, 则要求

$$\min z = 0x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.3x_4 + 0.8x_5; \quad (1.1.4)$$

且满足约束条件:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 &= 100, \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= 100, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_5 &= 100. \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0, \text{ 且为整数.} \quad (1.1.6)$$

如例 1.1.1 及 1.1.2 的问题通常称为规划问题.

下面从数学的角度来归纳上述两个例子的共同点.

(2) 每个问题中都有决策变量需满足的一组约束条件——线性的等式或不等式.

(3) 都有一个关于决策变量的线性函数——称为目标函数。要求这个目标函数在满足约束条件下实现最大化或最小化。

将约束条件及目标函数都是决策变量的线性函数的规划问题称为线性规划. 其一般数学模型为

$$\max (\min) z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n; \quad (1.1.7)$$

[illegible]

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m; \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0. \end{array} \right. \quad (1.1.9)$$

在上述线性规划的数学模型中,式(1.1.7)称为目标函数,或实现最大化,或实现最小化. s. t 是 subject to 的英文缩写,它表示

“以……为条件”、“假定”、“满足”之意. (1.1.8)式称为约束条件,它可以是 $\geq$ 或 $\leq$ 的不等式,也可以是严格的等式. (1.1.9)式称为非负约束条件. 它既是通常实际问题中对决策变量的要求,又是用单纯形法求解过程中的需要. 有时也将线性规划问题简称为 LP (linear programming)问题.

1.1.2 两个变量问题的图解法

对于只有两个决策变量的线性规划问题,可以用作图方法来求解. 图解法不仅直观,而且可从中得到有关线性规划问题的许多重要结论,有助于理解线性规划问题求解方法的基本原理.

例 1.1.3 以例 1.1.1 为例说明图解法的主要步骤. 例 1.1.1 的数学模型如下:

$$\max z = 5x_1 + 2x_2; \quad (1.1.10)$$

$$\text{s. t } \begin{cases} 30x_1 + 20x_2 \leq 160, \\ 5x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_1 \leq 4; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (1.1.11)$$

$$(1.1.12)$$

首先作一个以 x_1, x_2 为坐标轴的直角坐标系(见图 1.1). 暂且将(1.1.11)式中第一个不等式 $30x_1 + 20x_2 \leq 160$ 变为等式 $30x_1 + 20x_2 = 160$, 它在坐标系中应是一条直线, 记为 L_1 , 显然在 L_1 上的点的坐标 (x_1, x_2) 都满足 $30x_1 + 20x_2 = 160$. 则坐标 (x_1, x_2) 满足 $30x_1 + 20x_2 < 160$ 的点都在直线 L_1 的左下方, 即直线 L_1 将平面 Ox_1x_2 上的点分为两半. 因此通常也称不等式 $30x_1 + 20x_2 \leq 160$ 为半平面(含直线 L_1), 见图 1.1. 同理, 记直线 $5x_1 + x_2 = 15$ 为 L_2 , 则 $5x_1 + x_2 \leq 15$ 为 L_2 的左下半平面. 满足 $x_1 \leq 4$ 的点位于直线 $L_3: x_1 = 4$ 的左半平面. 满足非负约束条件 $x_1 \geq 0$ 及 $x_2 \geq 0$ 的点分别为坐标平面的右半平面及上半平面. 因此满足约

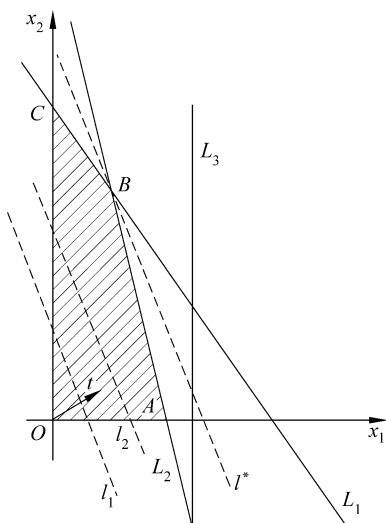


图 1.1

束条件(1.1.11)式及(1.1.12)式的点,应是上述5个半平面的交集,即图1.1中的四边形 $OABC$ 区域(含边界),称之为可行域. 满足约束条件及非负条件的解 $(x_1, x_2)^T$ 称之为可行解. 本题即变为要在可行域 $OABC$ 中找出一个点(解) $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)^T$,它的目标函数((1.1.10)式中 z)的值为所有可行解中达到最大. 目标函数 $z = 5x_1 + 2x_2$,在坐标平面 Ox_1x_2 中,可视为以 x_1, x_2 为变量且以 z 为参数的一族直线. 如 $5x_1 + 2x_2 = 5$,即为图1.1中的直线 l_1 ; $5x_1 + 2x_2 = 10$,即为 $l_2 \cdots$. 因此 $5x_1 + 2x_2 = z$ 是以 z 为参数的一族互相平行的直线. 在同一条直线 $5x_1 + 2x_2 = z_0$ 上的点 (x_1, x_2) ,它们的目标函数值都相等. 因此称为等值线族. 在这族等值线中 z 取得最大且又要在可行域内(或说与可行域相交)的直线 l^* 便是要寻找的. 其与可行域的交点就是最优解 $\mathbf{x}^*$. 具体做法是,首先求出 $z = 5x_1 + 2x_2$ 的梯度 $\nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2} \right)^T = (5, 2)^T$. 记梯度向量 ∇z 的

方向为 t , 在坐标平面上画出 t . 然后将任意一根等值线如 l_1 , 沿 t 方向(即 z 值增加的方向)推平行线, 直到该平行线将离开而还未离可行域时的一根等值线即为 l^* , 在图 1.1 中即为过 B 点的等值线. B 点即为最优解. 容易计算, B 点的坐标为 $(2, 5)$. 因此本题的最优解 $x^* = (2, 5)^T$. 最优值为 $z^* = 5 \times 2 + 2 \times 5 = 20$. 即该厂每周安排生产甲种药品生产量为 $2t$, 乙种为 $5t$. 每周可获最大利润为 20 万元.

假若数学模型中对目标函数 z 是求极小值, 显然等值线应按负梯度方向, 即 $-\nabla z$ 方向推平行线, 从而求得 l^* 及最优解 x^* .

从图解法作图结果来分析, 线性规划问题应有以下几种可能出现的结果:

(1) 有唯一最优解, 如例 1.1.3.

(2) 有无穷多个最优解.

例 1.1.4 $\min z = -2x_1 - 4x_2;$ (1.1.13)

$$\text{s. t } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 \leq 4, \\ x_2 \leq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (1.1.14)$$

解 由约束条件(1.1.14)式作出可行域 K (见图 1.2)为多边形 $OABCD$. 对目标函数 $z = -2x_1 - 4x_2$, 求出 $\nabla z = (-2, -4)^T$, 作等值线 $l_1: -2x_1 - 4x_2 = -4$. 将 l_1 沿 $-\nabla z = -t = (2, 4)^T$ 方向推

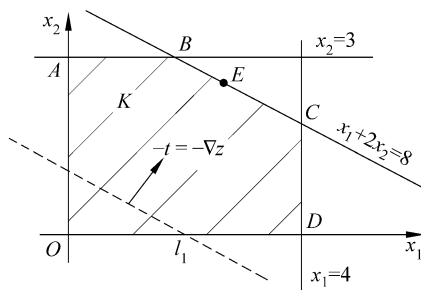


图 1.2

平行线, 平行线将离开可行域 K 而尚未离开时, 与 K 相切于边 BC . 因此 l^* 即为边 BC , 而线段 BC 上任一点的目标函数值均相等, 因此线段 BC 上任一点都是最优解. 故本例有无穷多个最优解: 如点 $B(2, 3)$, 点 $C(4, 2)$, 点 $E(3, 2.5)$ 等. 最小值为 $z^* = -2 \times 2 - 4 \times 3 = -16$.

(3) 无界解(也称无最优解).

$$\begin{aligned} \text{例 1.1.5} \quad & \max z = x_1 + x_2; \\ & \text{s. t } \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

解 在 Ox_1x_2 坐标平面中作出可行域 K (图 1.3), 可看出可行域 K 是个无界的不封闭区域. 作出等值线 $z = x_1 + x_2$ 的梯度向量: $\nabla z = (1, 1)^T$, 记作 $t = (1, 1)^T$. 任意找出一条等值线 l_1 , 如 $x_1 + x_2 = 3$. 将 l_1 沿 t 方向即 z 增大方向推平行线, 显然得不到取最大值的等值线, 因此本题无最优解.

要注意的是, 并非无界的可行域一定是无最优解. 若本题改为求目标函数最小化: $\min z = x_1 + x_2$, 则将 l_1 沿 $-t$ (即 z 值减小的方向)推平行线. 则可得到最优等值线为过 O 点的 l^* (图 1.3). 最优解为 $x^* = (0, 0)^T$, 最优值 $z^* = 0$.

(4) 无可行解——可行域为空集.

$$\begin{aligned} \text{例 1.1.6} \quad & \max z = 2x_1 + 4x_2; \\ & \text{s. t } \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 7, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 \leq 4, \\ x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

在 Ox_1x_2 平面中(见图 1.4), 作出 $L_1: x_1 + x_2 = 7, L_2: x_1 + 2x_2 = 8, L_3: x_1 = 4, L_4: x_2 = 3, L_5: x_1 = 0, L_6: x_2 = 0$ 共 6 条直线. 而

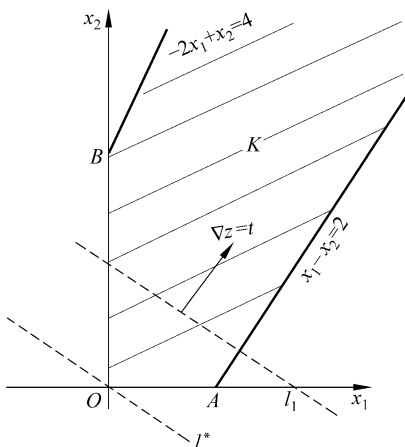


图 1.3

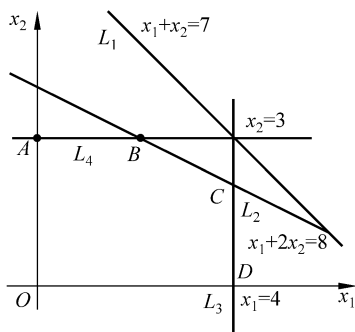


图 1.4

$x_1 + x_2 \geq 7$ 应在 L_1 的右上半平面. 由例 1.1.4 可知, 后 5 个半平面的交集为 $OABCD$ 五边形, 而第一个约束条件所代表的半平面与五边形 $OABCD$ 的交集为空集. 因此本例的约束条件所组成的可行域为空集. 即本例无可行解.

(3) 若线性规划问题有最优解(不论可行域是有界还是无界),其最优解必可以在某个顶点上达到. 最优解的个数或是唯一的,或有无穷多个.

$$\max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j ;$$