

第 1 章 线性系统的复频域分析方法

电子电路系统是由有源器件(如双极型晶体管、场效应晶体管和集成运算放大器)和无源元件(如电阻、电容和电感)构成的实现信号传输和处理的电子装置,它们广泛应用于通信、控制、生物医学工程、电子信息处理和计算机科学等领域中。不同的电子电路系统具有不同的功能、特性和分析方法。在小信号运用的情况下,晶体管等有源器件的伏安特性或传输特性可以用线性电路模型来等效,这时由有源器件和无源元件组成的各种电子电路可看作线性时不变系统,简称线性电子系统。由于时域中模拟线性系统的输入、输出关系为多阶线性常微分方程,其求解较麻烦,且求解过程和求解结果与系统之间关系不够清晰,因此电子电路分析常采用变域法,以使求解问题简化,且能获得系统输入、输出与系统结构之间的明确关系。本章扼要介绍用于线性系统分析的复频域法,引入系统传递函数及其极点、零点概念,讨论两种常用的系统响应:频率响应和阶跃响应。

1.1 复频域分析

1.1.1 时间域-复频域的变换

通常研究一个线性系统的性能是看该系统在某个给定激励下的输出响应。对于不同的激励信号,同一个系统的输出响应是不相同的。同样,对于不同性能的系统,它们在相同信号激励下的响应也是不同的。因此,可以从系统对于某特定激励信号的响应中获知该系统的性能。

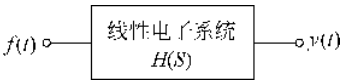


图 1.1.1

图 1.1.1 中的 $f(t)$ 为线性系统的输入,即激励信号, $y(t)$ 为该激励下的系统响应,又称输出。 $y(t)$ 与 $f(t)$ 之间满足 n 阶线性常微分方程

$$\begin{aligned} & b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + b_0 y(t) \\ &= a_m \frac{d^m f(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} f(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + a_0 f(t) \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

式中系数 b_j, a_i 均为常数,且 $m \leq n$ 。

采用经典方法求解式(1.1.1)方程较麻烦,尤其当阶数较高,以及激励函数或其导数含有不连续点时,用经典方法求解就很困难。通过采用变域的方法可以使求解问题简化,对于模拟信号,通常采用将时间域变换到复频域,通过拉普拉斯变换(简称拉氏变换)可以将时间域中的微分方程变换成复频域中的线性代数方程,从而使求解问题得以简化。

复频域的复数频率变量 $S = \sigma + j\omega$ 。

函数 $f(t)$ 的拉氏变换定义为

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(S) = \int_0^{\infty} e^{-St} f(t) dt \quad (1.1.2)$$

式中, $f(t)$ 为原函数; $F(S)$ 为 $f(t)$ 的象函数; $f(t)$ 是以时间 t 为变量的实函数; $F(S)$ 则是以复频率 S 为变量的复变函数。

通过拉氏变换, 可以将时间域中的运算, 如微分、积分、时间平移等替代为复频域中的代数运算: 乘以 S 、除以 S 和 S 加常数等。对于初始状态为零的线性系统, 通过对式(1.1.1)做拉氏变换得到

$$\begin{aligned} & (b_n S^n + b_{n-1} S^{n-1} + \cdots + b_0) Y(S) \\ &= (a_m S^m + a_{m-1} S^{m-1} + \cdots + a_0) F(S) \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

$Y(S)$ 、 $F(S)$ 分别为 $y(t)$ 和 $f(t)$ 的象函数, 从上式看出, $Y(S)$ 和 $F(S)$ 间的关系是个代数方程。

1.1.2 系统函数和极点、零点

在复频域中, 零状态条件下的线性电子系统的输出响应 $Y(S)$ 与输入激励 $F(S)$ 之比, 称作系统函数或系统的传递函数, 以 $H(S)$ 表示

$$H(S) = \frac{a_m S^m + a_{n-1} S^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n S^n + b_{n-1} S^{n-1} + \cdots + b_0} \quad (1.1.4)$$

上式中系数 a_i 、 b_j 为实数, 其大小仅取决于系统的结构及其元件参数值, 与激励无关。显然, $H(S)$ 是 S 的有理函数。对于一个物理可实现系统, 其系统函数 $H(S)$ 中的分子多项式的幂次 m 总是小于或等于其分母多项式的幂次 n , 而 n 的大小则取决于该系统中所含的独立贮能元件的数目。当一个系统的结构及其电路元件参数都给定后, 该系统的系统函数 $H(S)$ 就唯一确定了, 而与该系统外加的激励信号的形式无关, 也就是说, 系统函数由系统本身决定, 它能充分地表达一个系统的特征。

由于一个电子系统的输入可以为电压或电流, 同样, 其输出量也可以是电压或电流, 因此, 系统函数具有四种形式: 电压传递函数、电流传递函数、阻抗传递函数和导纳传递函数。

对式(1.1.4)的分子、分母多项式做因式分解, 则传递函数 $H(S)$ 可表示成下述形式

$$\begin{aligned} H(S) &= K \frac{(S - z_1)(S - z_2) \cdots (S - z_m)}{(S - p_1)(S - p_2) \cdots (S - p_n)} \\ &= K \frac{\prod_{i=1}^m (S - z_i)}{\prod_{j=1}^n (S - p_j)} \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

或

$$H(S) = K' \frac{\prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{S}{z_i}\right)}{\prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{S}{p_j}\right)} \quad (1.1.6)$$

式(1.1.5)和式(1.1.6)的系数 K 和 K' 是不相同的。通常, 称式中分母多项式的根 p_j ($j=1, n$) 为 $H(S)$ 的极点, 称分子多项式的根 z_i ($i=1, m$) 为 $H(S)$ 的零点。由于式(1.1.4)中的系数 a_i 、 b_j 均为实数, 因此, $H(S)$ 的极点和零点或为实数, 或为共轭复数对。对于一个稳定系统,

其极点必须处于复频率 S 平面的左半平面(不含虚轴),即其实部必须小于零。

由于系统函数 $H(S)$ 与冲激响应 $h(t)$ 是一对拉普拉斯变换对,因此,只要知道 $H(S)$ 的极点、零点在 S 平面的分布情况,便可得出该系统在时域中冲激响应 $h(t)$ 波形及其特性。此外,根据 $H(S)$ 的极点、零点分布,也可以获得该系统的频率特性以及判断一个系统是否稳定,等等。

将 $H(S)$ 的极点用标记“ $\times$ ”、零点用标记“ $\circ$ ”画在复频率 S 平面上,便可获得 $H(S)$ 的极点、零点分布图。

例 1.1 对于图 1.1.2 所示电路,求出其复频域中的阻抗传递函数 $V_2(S)/I_1(S)$ 。

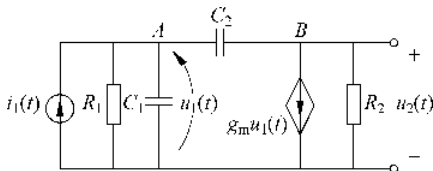


图 1.1.2 例 1.1 图

解 由于电路元件 R 、 L 、 C 在时域 t 中,它们的端电压和流过元件的电流,在零初始状态下,分别满足的关系为

$$u_R(t) = i_R(t)R, \quad u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad \text{和} \quad u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt$$

因此,对这些电压电流关系做拉氏变换后得到的复频域中的对应关系分别为: $V_R(S) = I_R(S) \cdot R$, $V_L(S) = SL \cdot I_L(S)$, $V_C(S) = I_C(S)/SC$,所以在 S 域中,电路元件 R 、 L 、 C 的运算阻抗分别为 R 、 SL 和 $1/SC$ 。因此,在 S 域中列图 1.1.2 的电路方程时,其中的电容的阻抗应写为 $1/SC$ 。此外将图中的电流源表示成 S 域形式: $I_1(S)$,两个节点电压 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 也表示成 S 域形式 $V_1(S)$ 和 $V_2(S)$ 。在 S 域中,电路仍可采用 KVL 和 KCL 分析,对于图 1.1.2 电路,采用节点电压法分别列出节点 A 和 B 的电流方程

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1} + SC_1 + SC_2 \right) V_1(S) - SC_2 V_2(S) = I_1(S) \\ -SC_2 V_1(S) + \left(\frac{1}{R_2} + SC_2 \right) V_2(S) = -g_m V_1(S) \end{cases}$$

从此方程组解得

$$\frac{V_2(S)}{I_1(S)} = \frac{SC_2 - g_m}{S^2 C_1 C_2 + SC_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + g_m \right) + SC_1 \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 R_2}}$$

从上式看出,该阻抗传递函数有一个零点和两个极点。

1.2 系统响应

1.2.1 概述

在复频域中,系统响应 $Y(S)$ 与系统的激励 $F(S)$ 、系统函数 $H(S)$ 间的关系为

$$Y(S) = H(S)F(S) \quad (1.2.1)$$

对应的时间域系统响应为

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(S)F(S)] \quad (1.2.2)$$

上二式中的 $H(S)$ 具有式(1.1.5)的形式,激励 $F(S)$ 的形式为

$$F(S) = A \frac{\prod_{l=1}^u (S - z_l)}{\prod_{k=1}^v (S - p_k)} \quad (1.2.3)$$

因此,以 $H(S)$ 的极点和 $F(S)$ 的极点对式(1.2.1)进行部分分式展开后得到

$$Y(S) = \sum_{j=1}^n \frac{K_j}{S - p_j} + \sum_{k=1}^v \frac{K_k}{S - p_k} \quad (1.2.4)$$

上式中 K_j 和 K_k 为相应的部分分式展开项的系数。对式(1.2.4)做拉普拉斯逆变换,得到时域的系统响应

$$y(t) = \sum_{j=1}^n K_j e^{p_j t} + \sum_{k=1}^v K_k e^{p_k t} \quad (1.2.5)$$

从上式看到,系统响应由两部分组成,第一部分由 $H(S)$ 的极点所组成,称为自由响应。由于稳定系统的极点都处于 S 平面的右半平面,即 p_j 的实部都是小于零的,因此这部分在时间 t 足够长后都会趋于零。或(1.2.5)的第二项是由 $F(S)$ 的极点所组成的,称作强迫响应。对于不同的激励,系统的强迫响应是不同的。虽然式(1.2.5)中的两部分分别由 $H(S)$ 和 $F(S)$ 的极点组成,但在做部分分式展开时,其相应项的系数 K_j 和 K_k 却与 $H(S)$ 和 $F(S)$ 都有关系,即由系统和激励共同决定。

在电子电路系统中,常用的激励有冲激信号 $\delta(t)$ 、正弦信号 $\sin\omega t$ 及阶跃信号 $u(t)$,相应的系统响应称为冲激响应、频率响应和阶跃响应。由于冲激信号在实现上的困难,因此,电子电路系统常用的是频率响应和阶跃响应。

1.2.2 频率响应

系统对正弦激励信号的稳态响应称为系统的频率响应,又叫做正弦稳态响应。由于任何周期性信号都可以分解成不同频率的正弦信号的线性叠加,因此研究系统的频率响应具有普遍意义。

对于正弦激励信号 $f(t) = \sin\omega_0 t$ (为讨论方便,假设其幅值为 1),其 S 域的象函数为

$$F(S) = \frac{\omega_0}{S^2 + \omega_0^2} = \frac{\omega_0}{(S + j\omega_0)(S - j\omega_0)} \quad (1.2.6)$$

$F(S)$ 具有一对在虚轴上的复共轭极点。

因此,对应的系统响应为

$$Y(S) = H(S) \frac{\omega_0}{(S + j\omega_0)(S - j\omega_0)}$$

式中 $H(S)$ 具有式(1.1.5)形式。对上式进行部分分式展开得

$$Y(S) = \sum_{j=1}^n \frac{K_j}{S - p_j} + \frac{K_0}{S + j\omega_0} + \frac{\bar{K}_0}{S - j\omega_0} \quad (1.2.7)$$

其中系数 K_0 和 $\bar{K}_0$ 分别为

$$K_0 = [Y(S)(S + j\omega_0)]_{S=-j\omega_0} = \frac{H(-j\omega_0)}{-2j}$$

$$\bar{K}_0 = [Y(S)(S - j\omega_0)]_{S=j\omega_0} = \frac{H(j\omega_0)}{2j}$$

式(1.2.7)中的第一项对应的是自由响应,在 t 足够长时将趋于零,因此,一个稳定系统的正弦稳态响应是式(1.2.7)的后两项的拉氏逆变换

$$\begin{aligned}
 y(t) &= K_0 e^{-j\omega_0 t} + \bar{K}_0 e^{j\omega_0 t} = \frac{H(-j\omega_0)}{-2j} e^{-j\omega_0 t} + \frac{H(j\omega_0)}{2j} e^{j\omega_0 t} \\
 &= \frac{|H(j\omega_0)| e^{-j\phi(\omega_0)}}{-2j} e^{-j\omega_0 t} + \frac{|H(j\omega_0)| e^{j\phi(\omega_0)}}{2j} e^{j\omega_0 t} \\
 &= |H(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \phi)
 \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

上式表明,在频率 ω_0 的正弦激励下,系统的响应是与激励相同频率的正弦信号,但其幅度增大了 $|H(j\omega_0)|$ 倍,且有相移 $\phi(\omega_0)$ 。而 $|H(j\omega_0)|$ 与 $\phi(\omega_0)$ 都是与系统函数 $H(S)$ 相关的,它们分别是系统函数中的变量 S 限定在虚轴上时的 $H(j\omega)$ 的模和幅角。

系统的频率响应为系统对不同频率的正弦信号的响应,即 $H(j\omega) \sim \omega$,它可以直接由系统函数 $H(S)$ 得到

$$H(j\omega) = H(S) \big|_{S=j\omega} \quad (1.2.9)$$

由于 $H(j\omega)$ 是个复数,可写为

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

因此,频率响应通常由幅频响应和相频响应组成,前者是 $H(j\omega)$ 的模 $|H(j\omega)|$ 与频率间关系,后者是 $H(j\omega)$ 的幅角 $\phi(\omega)$ 与频率间的关系。

例 1.2 求图 1.2.1 电路的频率特性。

解 由图 1.2.1 电路有

$$V_o = -g_m V R_2$$

$$V = V_i \frac{\frac{1}{SC}}{R_1 + \frac{1}{SC}}$$

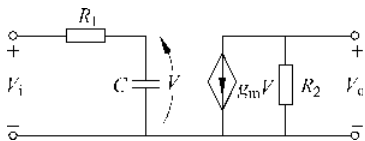


图 1.2.1 例 1.2

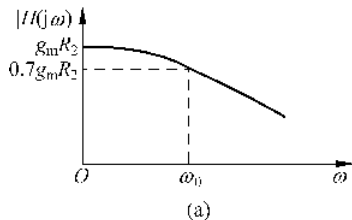
因此电路的电压传递函数为

$$H(S) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{-g_m R_2}{1 + SR_1 C}$$

这是一个单极点系统, $p = -1/R_1 C$, 该极点对应的频率 $\omega_0 = 1/R_1 C$ 。有

$$H(j\omega) = \frac{-g_m R_2}{1 + j\omega R_1 C}$$

幅频特性



$$|H(j\omega)| = \frac{g_m R_2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

如图 1.2.2(a) 所示,可以看出这是个低通系统, $\omega=0$ 时的增益为 $g_m R_2$, 随着频率增大,增益逐渐减小。

相频特性

$$\phi(\omega) = -180^\circ - \arctan \omega R_1 C$$

如图 1.2.2(b) 所示, $\phi(\omega)$ 中的 -180° 是 $H(j\omega)$ 式中负号所提供的,负号表明在零频时输出 V_o 与输入 V_i 反相。从相频特性也可看出,随着频率增大,输出与输入间的相移也增大。

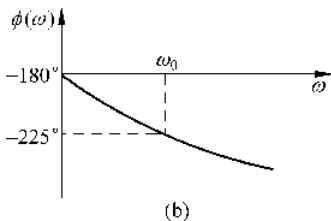


图 1.2.2 频率特性

通常定义线性系统的频率响应参数有: (1) 通带放大倍数(或增益) H_0 ; (2) 3dB 截止频率 ω_{3dB} , 它标志着通带的边频,在该频率处的增益是通带增益的 $1/\sqrt{2}$, 即

$$|H(j\omega_{3dB})| = \frac{H_0}{\sqrt{2}} \quad (1.2.10)$$

对于图 1.2.3 所示的具有带通特性的幅频响应,在通带的高频端和低频端分别有一个 3dB 截止频率,称高频端的为 3dB 上截止频率 ω_h ,称低频端的为 3dB 下截止频率 ω_l ; (3)通带宽度 B ,简称带宽, $B=\omega_h-\omega_l$ 。

根据上述参数定义,例 1.2 电路的通带增益为

$$H_0 = g_m R_2$$

由于例 1.2 电路是个低通电路,它只有一个 3dB 上截止频率 $\omega_h=\omega_0=\frac{1}{R_1C}$,显然,该 3dB 截止频率与电路系统

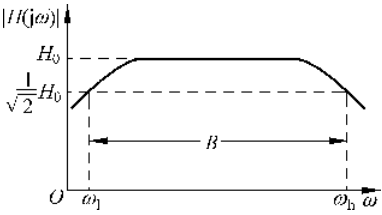


图 1.2.3 带通频率特性

函数的极点有关,对于单极点系统,极点所对应的转折频率 ω_0 就是该系统频率响应的 3dB 截止频率,从图 1.2.2(b)的相频特性看到,在 $\omega=\omega_0$ 时,相移 $\phi(\omega_0)$ 比零频时又滞后了 45° 。

例 1.3 求图 1.2.4 电路的幅频特性和参数。

解 由图 1.2.4 电路有

$$V_o = -\mu V \frac{R_L}{R_2 + R_L}$$

$$V = V_i \frac{SR_1C}{1 + SR_1C}$$

因此,

$$H(S) = \frac{V_o}{V_i} = -\mu \frac{R_L}{R_2 + R_L} \frac{SR_1C}{1 + SR_1C}$$

$H(S)$ 具有一个在原点的零点($z=0$)和一个负实极点($p=-\frac{1}{R_1C}$)。

幅频

$$|H(j\omega)| = \mu \frac{R_L}{R_2 + R_L} \frac{\omega R_1C}{\sqrt{1 + (\omega R_1C)^2}} = \mu \frac{R_L}{R_2 + R_L} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega R_1C)^2}}}$$

如图 1.2.5 所示,从该特性看出这是个高通系统,通带增益 $|H(j\infty)| = \mu \frac{R_L}{R_2 + R_L}$,3dB 下截止频率 $\omega_l = \frac{1}{R_1C}$,也就是该系统极点所对应的转折频率。

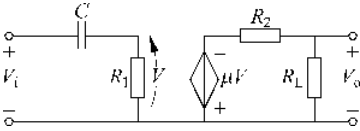


图 1.2.4

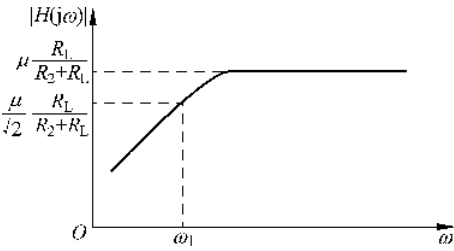


图 1.2.5 高通特性

1.2.3 伯德图

由于多极点、零点系统的频率特性曲线的绘制较麻烦,通常采用一种若干段折线去近似实际曲线的做法,不仅使频率特性的绘制简化,还将频率特性的绘制与系统函数的极点、零

点分布直接地联系起来。这种近似的频率特性绘图方法称作伯德图(Bode图)方法。在这种方法中,幅频响应和相频响应的频率轴(横坐标)采用对数分度,幅频响应的幅度值(纵坐标)采用分贝(dB),即用 $20\lg|H(j\omega)|$,而相频响应的相角(纵坐标)仍以角度值表示。因此,对于式(1.1.6)所示的系统函数,其频率函数为

$$H(j\omega) = K' \frac{\prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{j\omega}{z_i}\right)}{\prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{j\omega}{p_j}\right)} \quad (1.2.11)$$

因此,对 $H(j\omega)$ 的幅值取对数后,将幅值相乘转化为分贝值的相加

$$20\lg|H(j\omega)| = 20\lg|K'| + \sum_{i=1}^m 20\lg\left|1 - \frac{j\omega}{z_i}\right| - \sum_{j=1}^n 20\lg\left|1 - \frac{j\omega}{p_j}\right| \quad (1.2.12)$$

而 $H(j\omega)$ 的相角也是各个项的相角的相加

$$\phi(j\omega) = (0^\circ \text{ 或 } \pm 180^\circ) + \sum_{i=1}^m \arctan\left(\frac{-\omega}{z_i}\right) - \sum_{j=1}^n \arctan\left(\frac{-\omega}{p_j}\right) \quad (1.2.13)$$

因此,只要知道式(1.2.11)中的常数项 K' 以及各个极点和零点对于幅频和相频的贡献,然后将它们代数叠加起来就是该系统函数的频率响应了。所以,我们只需要讨论常数项 K' 、实数极(零)点和复共轭极(零)点对三种类型的幅频和相频特性。

(1) 常数项 K'

常数 K' 的幅频特性为: $20\lg|K'|$ (dB),这是一条与横坐标($\lg\omega$)相平行的水平直线。

常数 K' 的相频特性有两种情况:若 $K' > 0$,则 $\phi = 0^\circ$;若 $K' < 0$,则 $\phi = -180^\circ$ 。

(2) 负实极点和实零点

由于稳定系统的极点必须处于 S 平面左半平面,因此只有负实极点,而零点则允许在 S 平面的任何处。

负实极点的对数幅值

$$-20\lg\left|1 - \frac{j\omega}{p_j}\right| = -20\lg\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{p_j}\right)^2} = -20\lg\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (1.2.14)$$

上式中 $\omega_0 = |p_j|$,为极点 p_j 的转折频率。

对式(1.2.14)作下述近似

$$\text{当 } \omega \ll \omega_0 \text{ 时, } -20\lg\left|1 - \frac{j\omega}{p_j}\right| \approx 0\text{dB}$$

$$\text{当 } \omega \gg \omega_0 \text{ 时, } -20\lg\left|1 - \frac{j\omega}{p_j}\right| \approx -20\lg\frac{\omega}{\omega_0} \text{ (dB)}$$

频率 ω 比 ω_0 每增加十倍,幅值减小 20dB,即这是一条起始于 ω_0 的,斜率为 -20dB/dec 的直线。以上述两个近似获得的负实极点的幅频响应的渐近线近似如图 1.2.6(a)所示。显然,该渐近线表示的幅频特性与实际特性有一定的误差,最大的误差发生在 $\omega = \omega_0$ 处,其实际的幅值为

$$-20\lg\sqrt{1+1} = -3\text{dB}$$

即在极点 p_j 的转折频率处:幅值的实际值与渐近线的误差为 -3dB 。

负实极点的相角为

$$\phi = -\arctan\frac{-\omega}{p_j} = -\arctan\frac{\omega}{\omega_0} \quad (1.2.15)$$

对式(1.2.15)作下述近似,当

$$\omega \leq 0.1\omega_0 \text{ 时, } -\arctan \frac{\omega}{\omega_0} \approx 0^\circ$$

$$\omega \geq 10\omega_0 \text{ 时, } -\arctan \frac{\omega}{\omega_0} \approx -90^\circ$$

$$\omega = \omega_0 \text{ 时, } -\arctan \frac{\omega}{\omega_0} = -45^\circ$$

因此,负实极点的相频特性近似为在 $0.1\omega_0 \sim 10\omega_0$ 区间的一条斜率为 $-45^\circ/\text{dec}$ 的直线及 $\omega \geq 10\omega_0$ 时的 -90° 水平直线,如图 1.2.6(b)所示。在极点对应的转折频率 $\omega = \omega_0$ 处, $\phi = -45^\circ$ 。

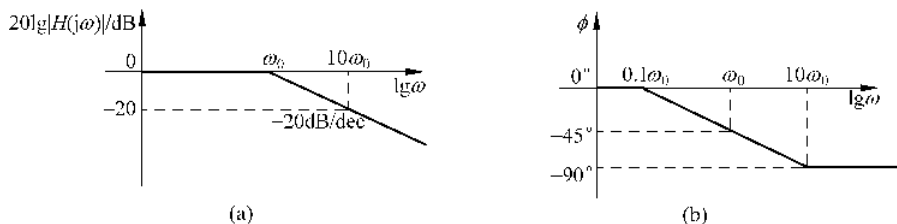


图 1.2.6 负实极点

对于实数零点,有下列三种情况: $z_i > 0$ 、 $z_i < 0$ 和 $z_i = 0$,前两种情况下的幅频特性是相

同的: $+20\lg \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{z_i}\right)^2}$,即起始于 $\omega_i = |z_i|$ 的以斜率 $+20\text{dB}/\text{dec}$ 上升的直线。但相频特性却相反, $z_i > 0$ 时的相频特性与负实极点的相同,即在 $0.1\omega_i \sim 10\omega_i$ 间的一条斜率为 $-45^\circ/\text{dec}$ 的直线, $\omega \geq 10\omega_i$ 时为 -90° 水平直线;而 $z_i < 0$ 时的相频特性为正幅角,因此其是在 $0.1\omega_i \sim 10\omega_i$ 区间的 $+45^\circ/\text{dec}$ 的直线, $\omega \geq 10\omega_i$ 时为 $+90^\circ$ 的水平直线。对于 $z_i = 0$ 的情况,其幅频特性为

$$20\lg |j\omega| = 20\lg \omega$$

当 $\omega = 1$ 时,上式为 0dB ,因此这是一条斜率为 $+20\text{dB}/\text{dec}$ 与水平横坐标(0dB 线)相交于 $\omega = 1$ 的直线,其起点在 ω 接近等于 0 处,由于横坐标取 $\lg \omega$,故在幅频特性左下方的无穷远处。 $z_i = 0$ 时的相频特性为 $+90^\circ$ 。

(3) 复共轭极(零)点对

稳定系统的复共轭极点对的实部为负,即

$$p \cdot p^* = -a + jb$$

a, b 均为正实数。通常,采用另一组与频率特性相关的参数来描述复共轭极点,如图 1.2.7 中的 ω_n 和 α , ω_n 是复共轭极点 pair 到原点的距离,称作复共轭极点 pair 的转折频率, $\omega_n = \sqrt{a^2 + b^2}$; α 是 ω_n 与实轴的夹角,其单位是角度。为了计算方便,采用 α 的余弦来表示复共轭极点 pair,并将其称为复共轭极点 pair 的阻尼系数 $\xi = \cos \alpha =$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\omega_n}, \text{ 因此,用 } \omega_n \text{ 和 } \xi \text{ 表示的复共轭极点 pair}$$

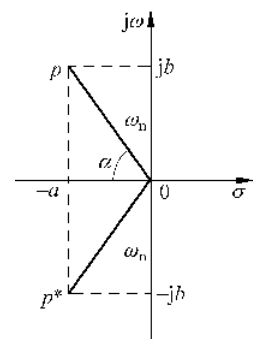


图 1.2.7 复共轭极点

$$p \cdot p^* = -\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (1.2.16)$$

有时,也采用复共轭极点对的品质因子 Q 替代上式中的 ξ ,品质因子 Q 的定义为

$$Q = \frac{1}{2\xi}$$

因此,复共轭极点对也可表示为

$$p \cdot p^* = -\frac{\omega_n}{2Q} \pm j \frac{\omega_n}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} \quad (1.2.17)$$

由于 α 在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 区间,相应的阻尼系数 ξ 在 $1 \sim 0$ 之间、相应的品质因子 Q 在 $0.5 \sim \infty$ 之间。

复共轭极点对的对数幅频值为

$$-20\lg \left| \left(1 - \frac{j\omega}{p} \right) \left(1 - \frac{j\omega}{p^*} \right) \right|$$

将式(1.2.16)代入上式得

$$-20\lg \left| \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) + j \frac{2\xi\omega}{\omega_n} \right| = -20\lg \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n} \right)^2} \quad (1.2.18)$$

对式(1.2.18)作下述近似

当 $\omega \ll \omega_n$ 时, 上式等于 $-20\lg 1 = 0\text{dB}$

当 $\omega \gg \omega_n$ 时, 上式等于 $-20\lg \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -40\lg \frac{\omega}{\omega_n}$

因此,复共轭极点对的幅频特性是一条始于 ω_n ,斜率为 -40dB/dec 的直线,如图 1.2.8(a)所示,该渐近线与实际特性的最大误差也在 $\omega = \omega_n$ 处,此时的实际值为

$$-20\lg 2\xi = -6\text{dB} - 20\lg \xi \quad (1.2.19)$$

显然, $\omega = \omega_n$ 时幅值误差与复共轭极点对的位置有关,即与阻尼系数 ξ 有关,若 $\xi > 0.5$ (即 $\alpha < 60^\circ$ 、 $Q < 1$),该误差值为负值;若 $\xi = 0.5$ ($\alpha = 60^\circ$ 、 $Q = 1$),误差为 0;如若 $\xi < 0.5$ ($\alpha > 60^\circ$ 、 $Q > 1$),则误差为正值,此时幅频特性将在 $\omega = \omega_n$ 处出现如图 1.2.8 所示的峰值, ξ 越小,峰值越大。

由于幅频特性下降 -3dB 的频率是个特征频率,因此对于复共轭极点对,应该注意的是,当 $\alpha = 45^\circ$ 时的复共轭极点对,其幅频特性在转折频率 ω_n 处的误差恰为 -3dB ,此时复极点对的 $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7$,其

$Q = 1/\sqrt{2} = 0.7$ 。

复共轭极点对的相频值为

$$-\arctan \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \quad (1.2.20)$$

对式(1.2.20)求下述近似:

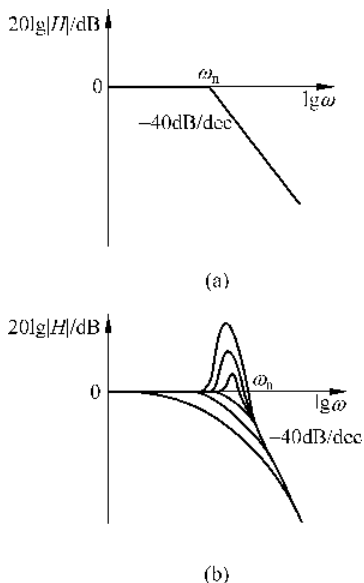
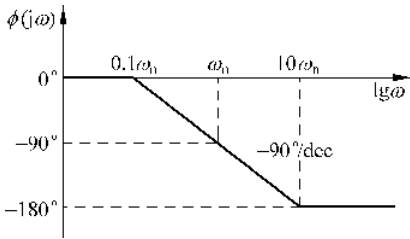


图 1.2.8 复共轭极点对的幅频特征



当 $\omega \leq 0.1\omega_n$ 时, 式(1.2.20) 为 0°
当 $\omega \geq 10\omega_n$ 时, 式(1.2.20) 为 -180°
当 $\omega = \omega_n$ 时, 式(1.2.20) 为 -90°

因此复共轭极点对的相频特性的渐近线为在 $0.1\omega_n \sim 10\omega_n$ 区间的一条斜率为 $-90^\circ/\text{dec}$ 的直线以及 $\omega \geq 10\omega_n$ 时的 -180° 的水平直线, 如

图 1.2.9 复共轭极点对的相频特性渐近线 图 1.2.9 所示。该渐近线与 ξ 的大小无关。

采用上述方法, 可以类似地得到复共轭零点对的幅频和相频特性, 这里不一一赘述。

例 1.4 已知系统函数 $H(S) = \frac{2 \times 10^2 S(S+2)}{(S+1)(S+20)}$, 画出该系统的频率响应伯德图, 并求通带增益和 3dB 截止频率。

解 将 $H(S)$ 写成式(1.2.11)形式

$$H(S) = 20 \frac{S(1 + \frac{S}{2})}{(1 + S)(1 + \frac{S}{20})}$$

即 $K' = 20$, $H(S)$ 有两个零点 ($z_1 = 0, z_2 = -2$) 和两个极点 ($p_1 = -1, p_2 = -20$)。因此可以分别得出常数项 K' 和每个极点、零点的幅频和相频特性渐近线。

- ① $K' = 20$ 即 $20\lg K' = 26\text{dB}$, 由于 $K' > 0$, 相角等于 0 。
- ② 零点 $z_1 = 0$, 其幅频是一条斜率为 $+20\text{dB/dec}$ 、与水平横轴 (0dB) 相交于 $\omega = 1$ 的直线。其相角为 $+90^\circ$ 。

零点 $z_2 = -2$, 其幅频为始于 $\omega = 2$ 的一条斜率为 $+20\text{dB/dec}$ 的直线, 相频为 $\omega = 0.2 \sim 20$ 区间的一条 $+45^\circ/\text{dec}$ 直线和 $\omega \geq 20$ 时的 $+90^\circ$ 水平直线。

③ 极点 $p_1 = -1$, 其幅频是一条始于 $\omega = 1$ 的斜率为 -20dB/dec 的直线, 相频为 $\omega = 0.1 \sim 10$ 区间的一条 $-45^\circ/\text{dec}$ 直线和 $\omega \geq 10$ 时的 -90° 水平直线。

极点 $p = -20$, 其幅频是一条始于 $\omega = 20$ 的斜率为 -20dB/dec 的直线, 而其相频为 $\omega = 2 \sim 200$ 区间的一条 $-45^\circ/\text{dec}$ 直线和 $\omega \geq 200$ 时的 -90° 水平直线。

将上述各项的幅频和相频分别画在同一个幅频和相频特性图上, 然后将它们叠加成总的幅频和相频特性, 如图 1.2.10(a) 和 (b) 所示, 其中粗线所示为总的特性。从图 1.2.10(a) 看出, 该系统是个高通系统, 其通带增益 H_0 和 3dB 下截止频率 ω_1 可以从伯德图近似求出, 也可以从 $H(S)$ 求出, 下面分别给出这两种方法:

① 从伯德图渐近线近似求法

从图 1.2.10(a) 幅频特性, 当 $\omega \geq 20$ 时有 $|H(j\omega)| = H_0$, 因此

$$\begin{aligned} 20\lg H_0 &= 20\lg |H(j20)| \\ &= 20\lg K' + 20\lg 20 + 20\lg \frac{20}{2} - 20\lg \frac{20}{1} - 20\lg \frac{20}{20} \\ &= 46\text{dB} \end{aligned}$$

由于幅频特性从 $\omega = 20$ 起, 随着 ω 减小而下降, 而 $\omega = 20$ 是极点 p_2 对应的转折频率, p_2 是个负实极点, 其幅频在转折频率处的实际值比渐近线小 3dB, 若不考虑其他极点、零点在 $\omega = 20$ 处的影响, 则该系统的 $\omega_1 = 20\text{rad/s}$ 。

② 从 $H(S)$ 求

将 $H(S)$ 写成下述形式

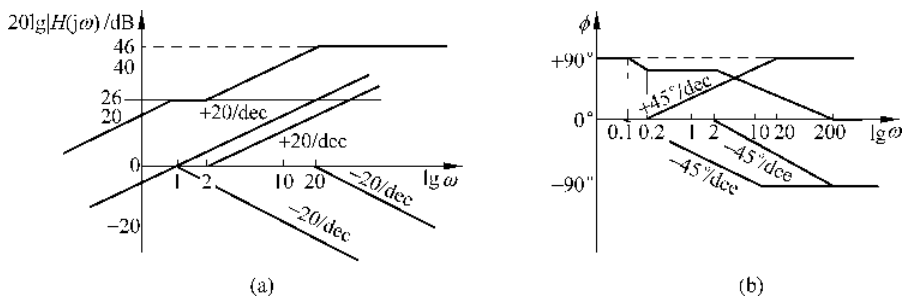


图 1.2.10 例 1.4 图

$$H(S) = \frac{2 \times 10^2 \left(1 + \frac{2}{S}\right)}{\left(1 + \frac{1}{S}\right) \left(1 + \frac{20}{S}\right)}$$

因为该系统具有高通特性,其通频带为 $\omega_1 \sim \infty$,因此 H_0 也是 $\omega = \infty$ 时的 $|H(j\infty)|$ 值,故可令上式中的 $S \rightarrow \infty$,则可得 $H_0 = 200$,即 $20\lg H_0 = 46\text{dB}$ 。

根据 3dB 截止频率的定义,从 $|H(j\omega)|$ 式可求出 ω_1 ,即

$$|H(j\omega_1)| = \frac{H_0}{\sqrt{2}} = \frac{2 \times 10^2}{\sqrt{2}}$$

而

$$|H(j\omega_1)| = \left| \frac{2 \times 10^2 j\omega(j\omega + 2)}{(j\omega + 1)(j\omega + 20)} \right|$$

从上两式可以解出 $\omega_1 = 19.83\text{rad/s}$ 。

此外,从相频特性伯德图可以近似地求出某个频率时的相角。例如,本例中 $\omega = 20$ 时的相角

$$\phi(\omega = 20) = 90^\circ + 90^\circ - 90^\circ - 45^\circ \times \lg \frac{20}{2} = +45^\circ$$

例 1.5 已知系统函数 $H(S) = \frac{10^6(S+2)}{(S+10)(S^2+10^2S+10^4)}$,求该函数频率响应参数。

解 按式(1.2.11)形式,该系统函数的频率函数为

$$H(j\omega) = 20 \frac{\left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)}{\left(1 + \frac{j\omega}{10}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{10^2} - \frac{\omega^2}{10^4}\right)}$$

该函数的常数项 $K' = 20$,有一个零点 ($z = -2$) 和一个实极点 ($z_1 = -10$)、一对复共轭极点 $\left(-\frac{1}{2} \times 10^2 \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \times 10^2\right)$,因此,将上述项的频率特性叠加可得到总的幅频特性,如图 1.2.11,可以看出其具有带通特性,从渐近线近似求得其通带增益 H_0

$$\begin{aligned} 20\lg H_0 &= 20\lg 20 + 20\lg \frac{10}{2} - 20\lg \frac{10}{10} \\ &= 26 + 14 \\ &= 40\text{dB} \end{aligned}$$

即

$$H_0 = 100$$

该带通特性有两个 3dB 截止频率 ω_1 和 ω_h ,其中 ω_1 由极点 z_1 近似求出, $\omega_1 = 10\text{rad/s}$, ω_h 由一对复共轭极点对决定。由于该极点对的 $\xi = 0.5$ ($\alpha = 60^\circ$),因此 ω_h 必须根据 $\omega_{3\text{dB}}$ 的定义来求。

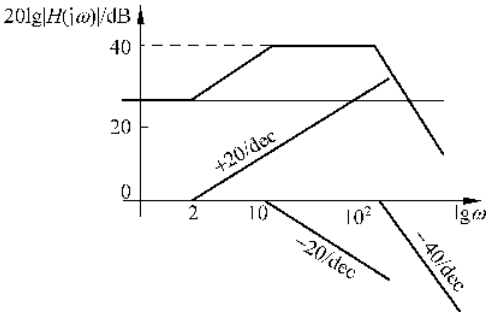


图 1. 2. 11 例 1. 5 图

先将 $H(S)$ 近似为低通函数,即取 $S \gg 10$,则 $H(S)$ 为

$$H(S) = \frac{10^6}{S^2 + 10^2 S + 10^4}$$

ω_{3dB} 的定义为

$$| H(j\omega_{3dB}) | = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$$

因此有

$$\frac{10^6}{| -\omega_{3dB}^2 + j\omega_{3dB} \times 10^2 + 10^4 |} = \frac{10^2}{\sqrt{2}}$$

解上式可得

$$\omega_{3dB} = \omega_h = 1.27 \times 10^2 \text{ rad/s}$$

如果这对复共轭极点的 $\xi = 0.7(\alpha = 45^\circ)$,则 ω_h 就是该极点对的转折频率 ω_h 。

1. 2. 4 阶跃响应

当线性系统的激励信号为阶跃信号 $u(t)$ 时,其输出称为阶跃响应。对于图 1. 2. 12 所示的阶跃信号,其在复频域的象函数为 $1/s$,因此在时域中系统的输出为

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[H(S) \cdot \frac{1}{S} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \frac{1}{S} \right]$$
$$= \sum_{j=1}^n K_j e^{p_j t} + K_0 u(t) \tag{1. 2. 21}$$

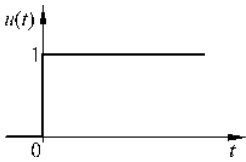


图 1. 2. 12 阶跃信号

通常,实际系统的阶跃响应如图 1. 2. 13 所示,由于系统的高频特性的限制($\omega_h \neq \infty$),使得阶跃响应需要一定的时间才能上升至一个定值。同样,对于有些系统,由于其低频特性所限($\omega_l \neq 0$),会使阶跃响应的稳态值不能维持,随着时间将逐渐下降。另外,对于一些阻尼系数 ξ 较小($\xi < 0.5$)的复极点系的系统,阶跃响应上升阶段会出现上冲和阻尼振荡,如图 1. 2. 13(b) 所示。

描述阶跃响应的主要参数:

- (1) 上升时间 t_R ——幅值从 $0.1H_0$ 上升至 $0.9H_0$ 所需的时间;
- (2) 延迟时间 t_d ——幅值从 0 上升至 $0.5H_0$ 所需时间;
- (3) 斜降 δ_p ——在 t_p 时刻,阶跃响应顶部幅值从 H_0 减小了 $\Delta\delta$,该减小量与幅值的比

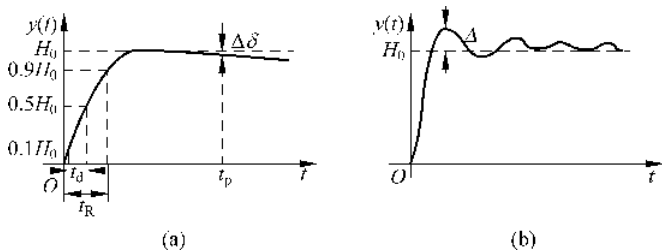


图 1.2.13 阶跃响应

值称为斜降 δ_p , 取不同的时间 t_p 具有不同的斜降

$$\delta_p|_{t_p} = \left. \frac{\Delta\delta}{H_0} \right|_{t_p}$$

(4) 上冲(又称超量) Δ ——阶跃响应幅值超出其稳态值 H_0 的部分, 这种情况常出现在具有阻尼振荡(即幅值摆动变化)时, 因此取其第一个超量为上冲, 通常用相对值 Δ/H_0 来衡量。

由于阶跃响应和频率响应都是反映了一个系统的特性, 在不同的激励下的系统特性的反映, 因而, 对于同一个系统, 其频率响应和阶跃响应之间必然存有一定的联系, 下面通过分析几个简单电路的阶跃响应和频率响应寻求其间的关系。

(1) 单极点低通电路

采用图 1.2.1 所示的单极点低通电路, 从前面分析有

$$H(S) = \frac{-g_m R_2}{1 + SR_1 C}$$

通带增益 $H_0 = -g_m R_2$, 3dB 上截止频率 $\omega_h = \frac{1}{R_1 C}$ 。

该电路的阶跃响应

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{H_0}{1 + SR_1 C} \frac{1}{S} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{H_0}{S} - \frac{H_0}{S + \frac{1}{R_1 C}} \right] \\ &= H_0 (1 - e^{-\frac{1}{R_1 C} t}) \end{aligned}$$

从上式画出阶跃响应如图 1.2.14 所示, 可以看出, 其上升需要一定的时间, 但上升至 H_0 后能维持住而不会下降。根据上升时间 t_R 和延迟时间 t_d 的定义, 由上式不难求得

$$y(t_1) = 0.1H_0 = H_0 (1 - e^{-\frac{1}{R_1 C} t_1}) \quad \text{得 } t_1 = 0.1R_1 C$$

$$y(t_2) = 0.5H_0 = H_0 (1 - e^{-\frac{1}{R_1 C} t_2}) \quad \text{得 } t_2 = 0.69R_1 C$$

$$y(t_3) = 0.9H_0 = H_0 (1 - e^{-\frac{1}{R_1 C} t_3}) \quad \text{得 } t_3 = 2.3R_1 C$$

因此有

$$t_R = t_3 - t_1 = 2.2R_1 C = \frac{2.2}{\omega_h} \quad (1.2.22)$$

$$t_d = \frac{0.69}{\omega_h}$$

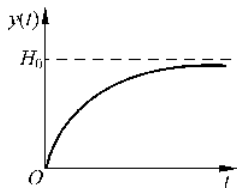


图 1.2.14 低通电路的阶跃响应

式(1.2.22)表明了阶跃响应的上升沿与频率特性的高频特性之间的关系, t_R 与 ω_h 成反比,

即一个系统的高频特性越好(ω_h 越大),其阶跃响应的上升就越快。如果 $\omega_h \rightarrow \infty$, 则上升时间 $t_R \rightarrow 0$, 说明阶跃响应的上升不需花费时间。式(1.2.22)还可写成下述形式

$$t_R = \frac{0.35}{f_h} \quad (1.2.23)$$

(2) 单极点高通电路

如图 1.2.4 所示,由前面的分析

$$H(S) = -\mu \frac{R_L}{R_L + R_2} \frac{SR_1C}{1 + SR_1C} = H_0 \frac{S}{S + \omega_l}$$

式中 H_0 为通带增益, ω_l 为 3dB 下截止频率, $\omega_l = \frac{1}{R_1C}$ 。因此单极点高通电路的阶跃响应为

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[H_0 \frac{S}{S + \omega_l} \cdot \frac{1}{S} \right] = H_0 e^{-\omega_l t}$$

由上式画出阶跃响应如图 1.2.15 所示,由于高通电路的高频特性 $\omega_h = \infty$, 因此其阶跃响应的上升不需时间, $t_R = 0$, 然而, 由于低频特性 $\omega_l \neq 0$, 因此阶跃响应上升至 H_0 后, 会随时间逐渐下降。

在时刻 t_p 时, 阶跃响应幅值从 H_0 下降的幅值

$$\Delta\delta|_{t_p} = H_0 - y(t_p) = H_0(1 - e^{-\omega_l t_p})$$

因此, t_p 时刻的斜降为

$$\delta|_{t_p} = \frac{\Delta\delta}{H_0} = 1 - e^{-\omega_l t_p}$$

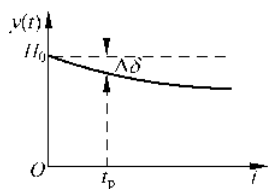


图 1.2.15 高通电路的阶跃响应

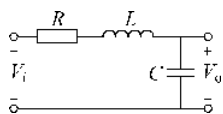
若取 $t_p \ll \frac{1}{\omega_l}$, 则上式近似为

$$\delta|_{t_p} = 1 - (1 - \omega_l t_p) = \omega_l t_p \quad (1.2.24)$$

式(1.2.24)给出了系统阶跃响应的斜降与其低频特性间的关系。如果系统的低频特性越好, 即 ω_l 越小, 则其阶跃响应的平顶维持得越好。从式(1.2.24)可以从 ω_l 估算出 δ_p , 也可从 δ_p 估算出 ω_l 。

(3) 二阶低通电路

二阶低通电路如图 1.2.16 所示, 这是个无源 RLC 电路, 它的电压传递函数



$$\begin{aligned} H(S) &= \frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{1}{SC}}{R + SL + \frac{1}{SC}} \\ &= \frac{1}{1 + SRC + S^2 LC} = \frac{\omega_n^2}{S^2 + 2\xi\omega_n S + \omega_n^2} \end{aligned}$$

图 1.2.16 二阶低通电路

具有两个极点, $p_1, p_2 = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$, 其中 $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$ 。若 $\xi \geq 1$, 为二个负实极点, 电路的 3dB 上截止频率由 p_1, p_2 的转折频率 $|p_1|$ 和 $|p_2|$ 共同决定, 电路的阶跃响应与单极点低通电路类似, 其上升沿时间与 ω_h 有关。

若 $\xi < 1$, 则 p_1 和 p_2 为一对复共轭极点, 取 $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$, 则 $p_1, p_2 = -\xi\omega_n \pm j\omega_d$, 因此

$$H(S) = \frac{\omega_n^2}{(S + \xi\omega_n - j\omega_d)(S + \xi\omega_n + j\omega_d)}$$

对应的阶跃响应为

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K_0}{S} + \frac{K_1}{S + \xi\omega_n - j\omega_d} + \frac{\bar{K}_1}{S + \xi\omega_n + j\omega_d} \right] \\ &= K_0 - 2 |K_1| e^{-\xi\omega_n t} [\cos(\omega_d t + \arctan K_1)] \end{aligned}$$

上式中

$$K_0 = 1$$

$$K_1 = \frac{\omega_n^2}{2(\omega_d^2 - j\omega_d\omega_n\xi)}$$

$$|K_1| = \frac{1}{2\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\arctan K_1 = \arctan \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

由上式画出的阶跃响应如图 1.2.17 所示,阶跃响应的幅值是不断减小的正弦振荡(又称阻尼振荡),其包络线为 $e^{-\xi\omega_n t}$,随着时间增长,指数下降,但其最大值则与阻尼系数 ξ 有关, ξ 越小,起始幅值越大,一般在 $\xi < 0.5$ 时,起始幅值便大于稳态值,即出现了上冲, ξ 越小,其阶跃响应上升越快, t_R 越小。图 1.2.17 中的正弦振荡的频率为 ω_d ,称作阻尼自然频率。

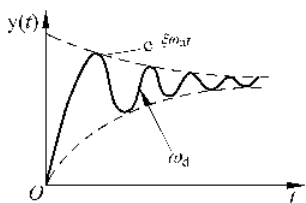


图 1.2.17 二阶低通电路的阶频响应

从上述讨论可以看到一个系统的频率响应参数与阶跃响应参数之间的关系,由于两种响应都是从系统函数 $H(S)$ 导出的,两种响应的参数都与系统函数的零点、极点及其分布有关。在实用中,只需分析其中一种响应便可,在本课程中,大多采用频率响应去了解系统特性。

习题

题 1.1 求图 P1.1 电路的阻抗传递函数。

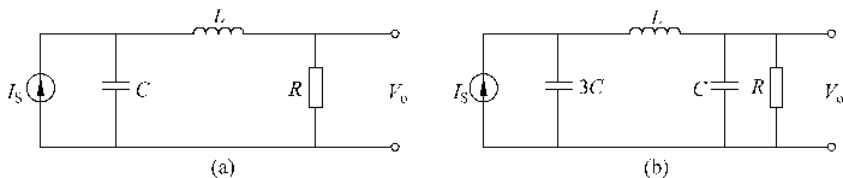


图 P1.1

题 1.2 求图 P1.2 电路的传递函数及其频率响应函数,画出频率响应伯德图。

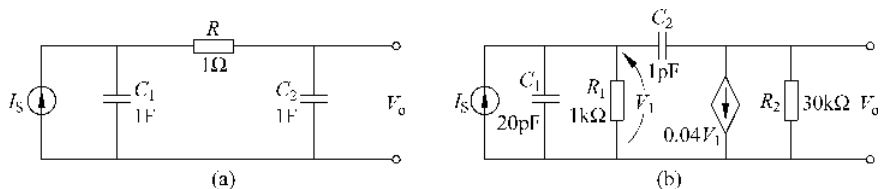


图 P1.2

题 1.3 画出下列传递函数的幅频响应特性伯德图,说明该函数响应特性的类型,并求通带增益及 3dB 截止频率。

(1) $H(S)=\frac{(S-2)(S+2)}{(S^2+6S+5)}$;

(2) $H(S)=\frac{100(S+1)(S+10)^2}{(S+2)(S^2+S+1)(S+5)}$ 。

题 1.4 某个放大器的电压增益函数为

$$A_V(S)=\frac{5\times10^{16}(S+50\times10^6)}{(S+25\times10^6)(S+55\times10^6)(S+5\times10^6)}$$

- (1) 画幅频响应伯德图;
- (2) 从伯德图求 $A_V(S)$ 的通带增益和 3dB 带宽。

题 1.5 某个晶体管放大器的增益函数为

$$A(S)=\frac{10^3S^2(S+1)}{(S+4)(S^2+20S+4\times10^2)}$$

- (1) 画幅频响应伯德图;
- (2) 求 $A(S)$ 的 3dB 下截止频率。

题 1.6 若某个增益函数有一个零点 $z=-\omega_z$ 和两个极点 $p_1=-\omega_{p_1}$ 、 $p_2=-\omega_{p_2}$ 且 $\omega_{p_2}>\omega_{p_1}$,试画出下述几种情况下的频率响应伯德图。

- (1) $\omega_z<\omega_{p_1}<\omega_{p_2}$;
- (2) $\omega_{p_1}<\omega_z<\omega_{p_2}$;
- (3) $\omega_{p_1}<\omega_{p_2}<\omega_z$ 。

题 1.7 图 P1.7(a)电路的幅频特性如图 P1.7(b)所示。

- (1) 证明极点之一为 $p_i=-\frac{1}{(R_2+R_L)C_c}$;
- (2) 确定零点的位置,并以分贝表示 A 。

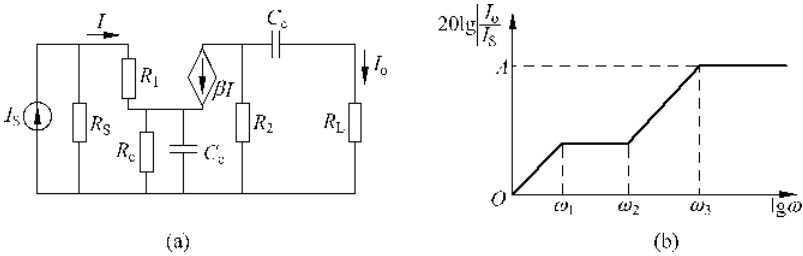


图 P1.7

题 1.8 从图 P1.8(a)和(b)的伯德图求传递函数。

题 1.9 求下列传递函数的幅频和相频响应伯德图。

(1) $\frac{(S+2)^2}{S^2(S+10)}$;

(2) $\frac{S(S+8)}{(S+1)(S+40)^2}$;

(3) $\frac{S^2-9}{(S+1)^2}$ 。

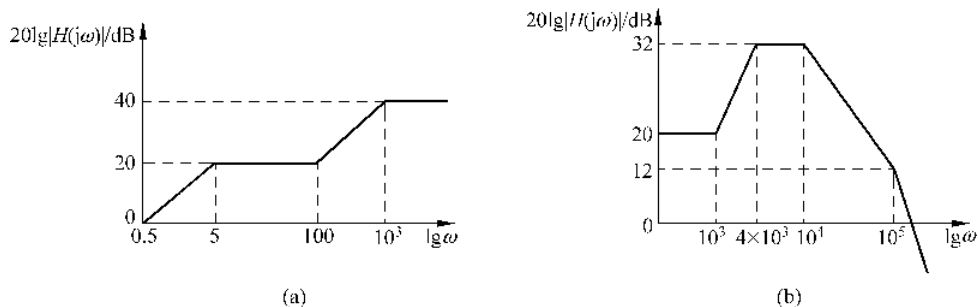


图 P1.8

题 1.10 图 P1.10(a) 电路的幅频响应伯德图如图 P1.10(b) 所示。

- (1) 证明 $\omega_1 = \frac{1}{R(C_1 + C_2)}$;
- (2) 求 ω_2 , 并以分贝表示 A ;
- (3) 求该电路的阶跃响应 $u_0(t)$ 。

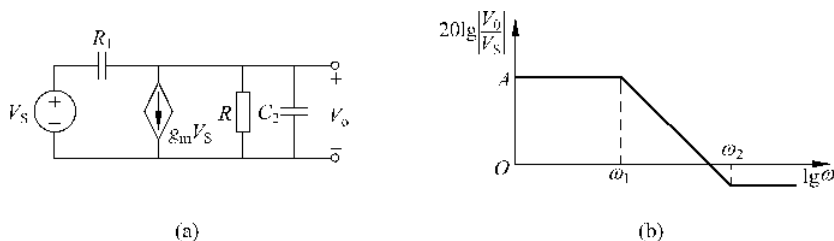


图 P1.10

题 1.11 在低通单极点放大器的输入端输入一个宽为 $1\mu\text{s}$ 的矩形脉冲, 试画出下述三种放大器带宽时的输出响应。

- (1) $f_{3\text{dB}} = 10\text{MHz}$;
- (2) $f_{3\text{dB}} = 1\text{MHz}$;
- (3) $f_{3\text{dB}} = 0.1\text{MHz}$ 。

题 1.12 图 P1.12 为 RC 串并联网路, 已知 $R_1 = 16\text{k}\Omega$, $R_2 = 4\text{k}\Omega$, $C_1 = 1.5\mu\text{F}$ 和 $C_2 = 0.1\mu\text{F}$, 求:

- (1) 该网络的电压传递函数;
- (2) 画幅频响应伯德图, 求 $\omega_{3\text{dB}}$;
- (3) 画单位阶跃响应, 求 t_R 。

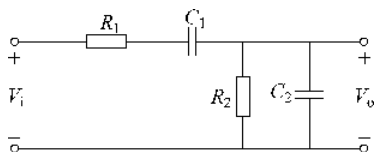


图 P1.12

第 2 章 PN 结二极管及其应用

电子器件是电子线路的核心,当今大多数的电子器件都是半导体器件。PN 结二极管是最基本的半导体器件,是现代电子技术的基础,由于它的非线性特性,PN 结二极管广泛地应用于现代电子电路中,因此掌握有关 PN 结二极管的工作原理和分析方法是学习所有半导体器件和集成电路的基础。

2.1 半导体基础知识

为了更好地掌握和理解 PN 结半导体二极管的特性,必须对半导体材料及其特性有个基本了解,尤其是半导体的电子和空穴的导电方式以及掺杂半导体的导电特性。

2.1.1 本征半导体

我们知道,元素周期表是根据物质元素的原子结构中的外层价电子的个数进行排列的,物质元素的导电能力与价电子的个数密切相关。外层有 1~2 个价电子的金属具有很强的导电能力,而外层有 7~8 价电子的绝缘体则几乎不能导电。半导体材料的元素具有 4 个价电子,例如常用的硅 Si 和锗 Ge,由这类元素制成的晶体形式的半导体材料,由于晶体结构紧密,对价电子的束缚力很强,因此其具有的导电能力虽强于绝缘体,但仍很弱。但是硅和锗的晶体形式及其相邻原子间共价键连接方式则使其成为很有价值的半导体。

图 2.1.1(a)是四价元素 Si 和 Ge 的简化原子模型,中间的+4 代表原子核和除去价电子外的所有内层电子,外层为 4 个价电子,整个原子呈中性。由 Si 原子或 Ge 原子组成的晶体结构的二维表示如图 1.2.1(b)所示,每个原子与其相邻的四个原子形成共价键结构,即每个共价键上的两个价电子为两个原子所共有,受两个原子的束缚。借助于晶体的共价键结构,使得四价元素的 Si 原子(或 Ge 原子)的外层有了“八个”价电子,具有稳定结构,若无外界能量,如光照、温度的热激发等,这些价电子是无法脱离共价键束缚的。

通常称具有上述晶体结构、由单一元素原子组成的半导体为本征半导体,一般纯度在 99.9999% 以上。

在绝对温度 $T=0\text{K}$ 时,纯净半导体的共价键结构稳定,因而没有导电能力。但是,在室温下(T 约为 300K 或 27°C),由于热能的分布不均匀,使有些价电子获得足够的能量可以挣脱共价键的束缚而成为自由电子,与此同时在原共价键位置上留出了一个空位,其附近的价电子只需很少能量就可填补这个空位,从而在附近又出现了一个新空位,这种空位将随机不断地变换位置,成为导电的一种新的载流子。空位与自由电子一样,在外电场的作用下的移动是定向的,从而形成了电流。因此,在纯净半导体的共价键结构下,能参与导电的载流子有两种,一种是自由电子,另一种是空位,通常将空位称作空穴。在电场力作用下,电子运动

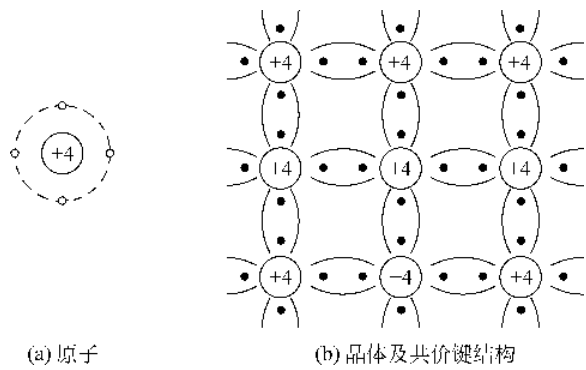


图 2.1.1 四价元素的原子及晶体结构示意图

是逆着电场力方向的,而空穴则是顺着电场力方向的,因此空穴被看作为带一个正电子电荷的粒子。

通常称本征半导体中这种受热激发产生自由电子和空穴的过程为本征激发。显然,本征激发产生的自由电子和空穴是成对出现的,即本征激发出一个自由电子的同时,必然在共价键结构中留下一个空位。同时本征激发产生的自由电子和空穴的数目是与温度有关的。

受激产生的自由电子在运动过程中会与晶格碰撞而损失能量,有可能跳入空穴,重新为共价键束缚,使电子和空穴成对消失,这种现象称为复合。在本征半导体中,热激发不断地产生电子和空穴对,同时又不断地发生复合,在一定的温度下,产生与复合会达到一种动态平衡,这时单位体积内的两种载流子的数量即浓度就不再增长,维持一定的大小,本征激发载流子浓度为

$$n_i = p_i = A_0 T^{3/2} e^{-E_g/2KT} \tag{2.1.1}$$

上式中, n_i 和 p_i 分别为电子和空穴的浓度; T 为绝对温度; K 是玻耳兹曼常数 ($1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$); A_0 是与半导体材料有关的常数; E_g 为与半导体材料相关的能量值,如硅半导体的 E_g 约为 1.1 eV (电子伏特)、锗半导体约为 0.72 eV ,因此,锗半导体的载流子浓度在相同的温度变化下的增长要高于硅半导体。

式(2.1.1)表明了半导体材料本征激发的载流子浓度与温度的关系,温度增加会使载流子浓度迅速上升,例如硅晶体,温度每升高 11°C ,本征激发的载流子浓度会增加一倍。因此半导体器件的工作与温度变化密切相关。

实际上,本征激发的载流子浓度是不高的,即本征半导体的导电能力是很低的。通常,硅晶体中每立方厘米中所含的原子个数约为 5×10^{22} ,在室温 $T=300\text{K}$ 时,由式(2.1.1)可以计算出硅晶体中本征激发产生的电子和空穴对的浓度约为 $1.5 \times 10^{10} / \text{cm}^3$,显然载流子数目是非常低的。

2.1.2 掺杂半导体

在本征半导体晶体中掺入微量五价或三价元素后,可以使半导体的导电性能发生明显的变化,而且使半导体中两种载流子的浓度发生明显差异,从而使其导电方式发生变化,由一种载流子决定其导电性能,这种载流子可以是自由电子,也可以是空穴,取决于掺入的元素。将掺入微量元素的半导体叫做掺杂半导体,根据掺杂元素的不同,可以得到两类掺杂半

导体：N 型半导体和 P 型半导体。

(1) N 型半导体

在四价本征半导体晶体中掺入微量的五价元素，如锑、磷、砷等，就可得到 N 型半导体，

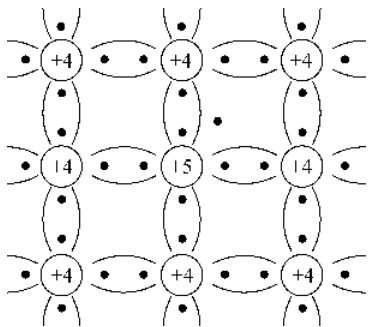


图 2.1.2 N 型半导体的共价键结构

如图 2.1.2 所示，在晶体结构的某些位置上，五价原子取代了原来的四价原子。由于掺入是微量的，掺入并不改变本征半导体的晶体结构，而且使掺入的五价原子的相邻的四个与其构成共价键结构的原子仍是四价原子。因此掺入的五价原子的五个价电子中，有四个与邻近原子构成共价键，第五个价电子则处于共价键外，受的束缚较小，只需吸收很少的热能便可挣脱原子核的束缚而成为自由电子，通常在室温下便可成为自由电子，而五价原子因失去一个价电子而成为带正电荷的离子，离子是不能运动的。

室温下，掺入一个五价原子便能产生一个自由电子，这种自由电子的浓度就是掺入元素的浓度。在 N 型半导体中，由于热激发，四价半导体仍存在本征激发产生的电子-空穴对，因此，由掺入元素产生的自由电子和本征激发产生的电子-空穴对，使得 N 型半导体中的自由电子数目远大于空穴数，同时因自由电子数目的大大增加，也增加了自由电子与空穴复合的机会，致使空穴减少。所以，在 N 型半导体中，电子和空穴两种载流子的浓度相差很大，称浓度大的为多数载流子，浓度小的为少数载流子，N 型半导体的多数载流子是自由电子，主要由掺入元素产生；少数载流子是空穴，由本征激发产生，因此多数载流子的浓度与掺杂浓度有关，而少数载流子的浓度则与温度有关。N 型半导体的导电方式主要是自由电子的导电，称提供自由电子的五价元素为施主原子。

(2) P 型半导体

在四价本征半导体中掺入微量的三价元素，如硼、铟、镓等，就可得到 P 型半导体。由于掺入元素只有三个价电子，其取代原来的四价原子后，便会在四个共价键中留下一个空穴，因此每掺入一个三价杂质原子，便可产生一个空穴，从而使 P 型半导体中的空穴大大增加，而成为 P 型半导体的多数载流子，空穴也成为 P 型半导体的主要导电方式，称掺入的三价元素为受主原子。

半导体的导电能力是由载流子浓度决定的，在掺杂半导体中多数载流子的浓度取决于掺杂浓度。例如在室温 300K 时，硅晶体本征激发产生的电子-空穴对的浓度约为 $1.5 \times 10^{10} \text{ cm}^3$ ，若在硅晶体中掺入五价元素，按 $1 : 10^6$ 比例掺入，即每一百万个硅原子中掺入一个五价原子，故掺杂浓度为硅晶体原子浓度 $(5 \times 10^{22} / \text{cm}^3) \times 10^{-6} = 5 \times 10^{16} / \text{cm}^3$ 。显然，掺杂后的多数载流子浓度比本征半导体的载流子浓度大得多，增大了 10^6 倍以上。所以，掺杂可以使半导体的导电能力明显提高，同时也产生了两类以单一载流子为主要导电方式的掺杂半导体，从而成为制造半导体器件和半导体集成电路的基础。

半导体中的载流子在外因下的定向运动形成电流，由于掺杂半导体中电子和空穴的浓度不等，相差很大，因此，与金属等导体不同，半导体中载流子运动形成电流有两种情况，一种是外加电场作用下的电流，在外加电场作用下，空穴沿电场方向运动、电子逆电场方向运动而形成的电流，称为漂移电流；另一种则是由扩散现象引起的，当半导体中载流子浓度分