第 1 章

行　列　式

行列式的理论是人们从解线性方程组的需要中建立和发展起来的，它在线性代数以及其他数学分支上都有着广泛的应用．本章我们主要讨论下面几个问题：

（1）行列式的定义；

（2）行列式的基本性质及计算方法；

（3）利用行列式求解线性方程组（克拉默法则）．

1.1　二阶与三阶行列式

行列式的概念起源于解线性方程组，它是从二元与三元线性方程组的求解公式引出来的．因此我们首先讨论解方程组的问题．

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

用加减消元法容易求出未知量 x_1, x_2 的值，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，有

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.2}$$

这就是一般二元线性方程组的公式解．但这个公式很不好记忆，应用时不方便，因此，我们引进新的符号来表示(1.2)式这个结果，这就是行列式的起源．我们称 4 个数组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

为二阶行列式．它含有两行两列，横的叫做行，纵的叫做列．行列式中的数叫做行列式的元素．从上式知，二阶行列式是这样两项的代数和：一项是从左上角到右下角的对角线（又叫做行列式的主对角线）上两个元素的乘积，取正号；另一项是从右上角到左下角的对角线（又叫做次对角线）上两个元素的乘积，取负号．

根据定义，容易得知，(1.2)式中的两个分子可分别写成

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

如果记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq 0$ 时，方程组(1.1)的解(1.2)可以表示成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \tag{1.3}$$

像这样用行列式来表示的解，形式简便整齐，便于记忆.

首先，(1.3)式中分母的行列式是从(1.1)式中的系数按其原有的相对位置而排成的，称为系数行列式. 分子中的行列式，x_1 的分子是把系数行列式中的第 1 列换成(1.1)式的常数项得到的，而 x_2 的分子则是把系数行列式的第 2 列换成常数项而得到的.

例 1.1 用二阶行列式解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2=1, \\ x_1+3x_2=2. \end{cases}$$

解 这时

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2\times 3-4\times 1=2\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=1\times 3-4\times 2=-5,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2\times 2-1\times 1=3,$$

因此，方程组的解是

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{5}{2},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{3}{2}.$$

对于三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1.4}$$

作类似的讨论，我们引入三阶行列式的概念，称符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.5}$$

为三阶行列式，它有 3 行 3 列，是 6 项的代数和. 这 6 项的和也可用对角线法则来记忆：从左上角到右下角 3 个元素的乘积取正号，从右上角到左下角 3 个元素的乘积取负号，等等.

例 1.2　计算 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

解
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} &= 2\times3\times5+1\times1\times2+(-4)\times3\times2-2\times3\times2-1\times(-4)\times5-2\times3\times1 \\ &= 30+2-24-12+20-6=10.\end{aligned}$$

令
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$
$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

当 $D\neq0$ 时，(1.4)式的解可简单地表示成
$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{1.6}$$

它的结构与前面二元一次方程组的解类似.

例 1.3　解线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=0, \\ 3x_1+2x_2-5x_3=1, \\ x_1+3x_2-2x_3=4. \end{cases}$$

解　$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=28,\quad D_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=13,$

$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}=47,\quad D_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=21,$

所以
$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{13}{28},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{47}{28},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}.$$

例 1.4　已知 $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$，问 a,b 应满足什么条件(其中 a,b 均为实数)?

解　$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a^2+b^2$. 若要 $a^2+b^2=0$，则 a 与 b 须同时等于零. 因此，当 $a=0$ 且 $b=0$ 时，给定行列式等于零.

为了得到更为一般的线性方程组的求解公式，我们需要引入 n 阶行列式的概念，为此，下节先介绍排列的有关知识.

习题 1.1

1. 计算下列二阶、三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ 1 & \sqrt{a} \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a & b \\ c+a & d+b \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} x & 1 & x \\ -1 & x & 1 \\ x & -1 & x \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}$；　　(6) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$；

(7) $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$.

2. 当 a,b 为何值时，行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}=0.$$

3. 解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} 5x_1-3x_2=1, \\ x_1+11x_2=6; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x_1+x_2=7, \\ x_1-3x_2=-2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4, \\ 3x_1-4x_2-2x_3=11, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} -5x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1-6x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2-7x_3=0. \end{cases}$

1.2 排列

在 n 阶行列式的定义中，要用到排列的某些知识，为此先介绍排列的一些基本知识.

定义 1.1 由数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列.

例如，1234 是一个 4 级排列，3412 也是一个 4 级排列，而 52341 是一个 5 级排列. 由数码 1，2，3 组成的所有 3 级排列为 123，132，213，231，312，321，共有 $3!=6$ 个，而所有的 n 级排列共有 $n!$ 个.

数字由小到大的 n 级排列 $1234\cdots n$ 称为自然序排列.

定义 1.2 在一个 n 级排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 中，如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 的前面 $(i_s<i_t)$，则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序. 一个 n 级排列中逆序的总数，称为这个排列的逆序数，记作 $N(i_1 i_2\cdots i_n)$.

例如，在 4 级排列 3412 中，31，32，41，42，各构成一个逆序数，所以，排列 3412 的逆序数为 $N(3412)=4$. 同样可计算排列 52341 的逆序数为 $N(52341)=7$.

容易看出，自然序排列的逆序数为 0.

定义 1.3 如果排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 的逆序数 $N(i_1 i_2\cdots i_n)$ 是奇数，则称此排列为奇排列；逆序数是偶数的排列则称为偶排列.

例如，排列 3412 是偶排列，排列 52341 是奇排列. 自然序排列 $123\cdots n$ 是偶排列.

定义 1.4 在一个 n 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果其中某两个数 i_s 与 i_t 对调位置，其余各数位置不变，就得到另一个新的 n 级排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，这样的变换称为一个对换，记作 (i_s,i_t).

如在排列 3412 中，将 4 与 2 对换，得到新的排列 3214. 并且我们看到：偶排列 3412 经过 4 与 2 的对换后，变成了奇排列 3214. 反之，也可以说奇排列 3214 经过 2 与 4 的对换后，变成了偶排列 3412.

一般地，有以下定理.

定理 1.1 任一排列经过一次对换后，其奇偶性改变.

证明 首先讨论对换相邻两个数的情况，该排列为

$$a_1 a_2\cdots a_l\, i j b_1 b_2\cdots b_m c_1 c_2\cdots c_n.$$

将相邻两个数 i 与 j 作一次对换，则排列变为

$$a_1 a_2\cdots a_l j i b_1 b_2\cdots b_m c_1 c_2\cdots c_n.$$

显然对于数 $a_1,a_2,\cdots,a_l,b_1,b_2,\cdots,b_m$ 和 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 来说，并不改变它们的逆序数. 但当 $i<j$ 时，经过 i 与 j 的对换后，排列的逆序数增加 1 个；当 $i>j$ 时，经过 i 与 j 的对换后，排列的逆序数减少 1 个. 所以对换相邻两数后，排列改变了奇偶性.

再讨论一般情况，设排列为

$$a_1a_2\cdots a_l i b_1 b_2\cdots b_m j c_1 c_2\cdots c_n.$$

将 i 与 j 作一次对换，则排列变为

$$a_1a_2\cdots a_l j b_1 b_2\cdots b_m i c_1 c_2\cdots c_n,$$

这就是对换不相邻的两个数的情况. 但它可以看成是先将 i 与 b_1 对换，再与 b_2 对换，……，最后与 b_m 的对换，即 i 与它后面的数作 m 次相邻两数的对换变成排列

$$a_1a_2\cdots a_l b_1 b_2\cdots b_m i j c_1\cdots c_n,$$

然后将数 j 与它前面的数 $i,b_m,\cdots,b_1$ 作 $m+1$ 次相邻两数的对换而成. 因此对换不相邻的数 i 与 j（中间有 m 个数），相当于作 $2m+1$ 次相邻两数的对换. 由前面的证明知，排列的奇偶性改变了 $2m+1$ 次，而 $2m+1$ 为奇数，因此，不相邻的两数 i,j 经过对换后的排列与原排列的奇偶性不同.

定理 1.2 在所有的 n 级排列中（$n\geqslant 2$），奇排列与偶排列的个数相等，各为$\frac{n!}{2}$个.

证明 设在 $n!$ 个 n 级排列中，奇排列共有 p 个，偶排列共有 q 个. 对这 p 个奇排列施以同一个对换，如都对换(1,2)，则由定理 1.1 知，p 个奇排列全部变为偶排列，由于偶排列一共只有 q 个，所以 $p\leqslant q$；同理将全部的偶排列施以同一对换(1,2)，则 q 个偶排列全部变为奇排列，于是又有 $q\leqslant p$，所以 $q=p$，即奇排列与偶排列的个数相等. 又由于 n 级排列共有 $n!$ 个，所以 $q+p=n!$，$q=p=\frac{n!}{2}$.

定理 1.3 任一 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 都可通过一系列对换与 n 级自然序排列 $12\cdots n$ 互变，且所作对换的次数与这个 n 级排列有相同的奇偶性.

证明 对排列的级数用数学归纳法证之.

对于 1 级排列，结论显然成立.

假设对 $n-1$ 级排列，结论成立. 现在证明对于 n 级排列，结论也成立.

若 $i_n=n$，则根据归纳假设 $i_1i_2\cdots i_{n-1}$ 是 $n-1$ 级排列，可经过一系列对换变成 $12\cdots(n-1)$，于是这一系列对换就把 $i_1i_2\cdots i_n$ 变成 $12\cdots n$. 若 $i_n\neq n$，则先施行 i_n 与 n 的对换，使之变成 $i_1'i_2'\cdots i_{n-1}'n$，这就归结成上面的情形. 相仿地，$12\cdots n$ 也可经过一系列对换变成 $i_1i_2\cdots i_n$，因此结论成立.

因为 $12\cdots n$ 是偶排列，由定理 1.1 可知，当 $i_1i_2\cdots i_n$ 是奇（偶）排列时，必须施行奇（偶）数次对换方能变成偶排列，所以，所施行对换的次数与排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 具有相同的奇偶性.

习题 1.2

1. 计算下列各排列的逆序数：

(1) $N(3742561)$； (2) $N(n(n-1)\cdots 21)$；

(3) $N(653241)$； (4) $N(1357\cdots(2n-1)2468\cdots(2n))$.

2. 决定 i,j 的值，使(1)$1245i6j97$ 为奇排列；(2)$3972i15j4$ 为偶排列.

3. 排列 $n(n-1)(n-2)\cdots321$ 经过多少次相邻两数对换变成自然顺序排列？

1.3 n阶行列式

本节我们从观察二阶、三阶行列式的特征入手.引出 n 阶行列式的定义.

已知二阶与三阶行列式分别为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

其中元素 a_{ij} 的第一个下标 i 表示这个元素位于第 i 行，称为行标；第二个下标 j 表示此元素位于第 j 列，称为列标.

我们可以从中发现以下规律：

(1) 二阶行列式是 2! 项的代数和，三阶行列式是 3! 项的代数和；

(2) 二阶行列式中每一项是两个元素的乘积，它们分别取自不同的行和不同的列，三阶行列式中的每一项是三个元素的乘积，它们也是取自不同的行和不同的列；

(3) 每一项的符号是：当这一项中元素的行标是按自然序排列时，如果元素的列标为偶排列，则取正号；如果元素的列标为奇排列，则取负号.

作为二、三阶行列式的推广，我们给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.5 由排成 n 行 n 列的 n^2 个数 a_{ij}(也称为元素)$(i,j=1,2,\cdots,n)$组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式.它是 $n!$ 项的代数和，每一项是取自不同行和不同列的 n 个元素的乘积，各项的符号是：每一项中各元素的行标排成自然序排列，如果列标的排列为偶排列时，则取正号；如果列标的排列为奇排列，则取负号.于是得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.7}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和.

(1.7)式称为 n 阶行列式按行标自然顺序排列的展开式. $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 称为行列式的一般项.

当 $n=2,3$ 时,这样定义的二阶、三阶行列式与 1.1 节中用对角线法则定义的是一致的. 当 $n=1$ 时,一阶行列式为 $|a_{11}|=a_{11}$.

当 $n=4$ 时,4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

表示 $4!=24$ 项的代数和,因为取自不同行、不同列的 4 个元素的乘积恰为 $4!$ 项. 根据 n 阶行列式的定义,4 阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}.$$

例如 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 行标排列为 1234,元素取自不同的行;列标排列为 4312,元素取自不同的列,因为 $N(4312)=5$,所以该项取负号,即 $-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 是上述行列式中的一项.

为了熟悉 n 阶行列式的定义,我们来看下面几个问题.

例 1.5 在 5 阶行列式中,$a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54}$ 这一项应取什么符号?

解 这一项各元素的行标是按自然顺序排列的,而列标的排列为 23514. 因 $N(23514)=4$,故这一项应取正号.

例 1.6 写出 4 阶行列式中带负号且包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解 包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项的一般形式为

$$(-1)^{N(13j_3j_4)}a_{11}a_{23}a_{3j_3}a_{4j_4}.$$

按定义,j_3 可取 2 或 4,j_4 可取 4 或 2,因此包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项只能是

$$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} \quad 或 \quad a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}.$$

但因 $N(1324)=1$ 为奇数,$N(1342)=2$ 为偶数,所以此项只能是 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$.

例 1.7 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & y & e & f \\ u & v & g & h \end{vmatrix}.$$

解　这是一个4阶行列式,按行列式的定义,它应有 $4!=24$ 项.但只有以下4项

$$adeh,\quad adfg,\quad bceh,\quad bcfg$$

不为零.与这4项相对应的列标的4级排列分别为1234,1243,2134和2143,而 $N(1234)=0$,$N(1243)=1$,$N(2134)=1$ 和 $N(2143)=2$,所以第一项和第四项应取正号,第二项和第三项应取负号,即

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & y & e & f \\ u & v & g & h \end{vmatrix} = adeh - adfg - bceh + bcfg.$$

例 1.8　计算上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

解　由 n 阶行列式的定义,应有 $n!$ 项,其一般项为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

但由于 D 中有许多元素为零,只需求出上述一切项中不为零的项即可.在 D 中,第 n 行元素除 a_{nn} 外,其余均为0,所以 $j_n=n$;在第 $n-1$ 行中,除 $a_{n-1,n-1}$ 和 $a_{n-1,n}$ 外,其余元素都是零,因而 j_{n-1} 只有取 $n-1,n$ 这两个可能,又由于 $a_{nn},a_{n-1,n}$ 位于同一列,而 $j_n=n$,所以只有 $j_{n-1}=n-1$.这样逐步往上推,不难看出,在展开式中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 一项不等于零,而这项的列标所组成的排列的逆序数是 $N(12\cdots n)=0$,故取正号.因此,由行列式的定义,有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即上三角行列式的值等于主对角线上各元素的乘积.

同理可求得下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地,对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上(下)三角行列式及对角行列式的值,均等于主对角线上元素的乘积.

例 1.9 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 这个行列式除了 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 这一项外,其余项均为零,现在来看这一项的符号,列标的 n 级排列为 $n(n-1)\cdots 21$,

$$N(n(n-1)\cdots 21) = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 = \frac{n(n-1)}{2},$$

所以

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

同理可计算出

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

由行列式的定义,行列式中的每一项都是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积,所以可得出:如果行列式有一行(列)的元素全为 0,则该行列式等于 0.

在 n 阶行列式中,为了决定每一项的正负号,我们把 n 个元素的行标排成自然序排列,即 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$. 事实上,数的乘法是满足交换律的,因而这 n 个元素的次序是可以任意写的. 一般地,n 阶行列式的项可以写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{1.8}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$, $j_1j_2\cdots j_n$ 是两个 n 阶排列,此项的符号由下面的定理来决定.

定理 1.4 n 阶行列式的一般项可以写成

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{1.9}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$, $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列.