

1.2 杆件的受力与变形形式

实际杆件的受力可以是各式各样的,但都可以归纳为 4 种基本受力和变形形式:轴向拉伸(或压缩)、剪切、扭转和弯曲,以及由两种或两种以上基本受力和变形形式叠加而成的组合受力与变形形式。

拉伸或压缩(tension or compression)——当杆件两端承受沿轴线方向的拉力或压力荷载时,杆件将产生轴向伸长或压缩变形,分别如图 1-1(a)、(b)所示。图中实线为变形前的位置;虚线为变形后的位置。

剪切(shearing)——在平行于杆横截面的两个相距很近的平面内,方向相对地作用着两个横向力,当这两个力相互错动并保持二者之间的距离不变时,杆件将产生剪切变形,如图 1-2 所示。

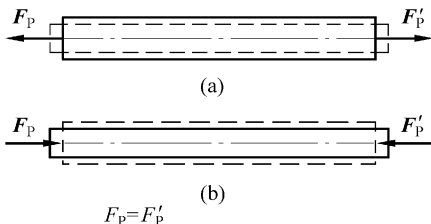


图 1-1 承受拉伸与压缩的杆件

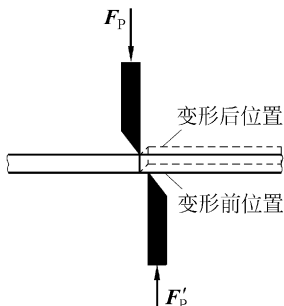


图 1-2 承受剪切的构件

扭转(torsion)——当作用在杆件上的力组成作用在垂直于杆轴平面内的力偶 M_e 时,杆件将产生扭转变形,即杆件的横截面绕其轴相互转动,如图 1-3 所示。

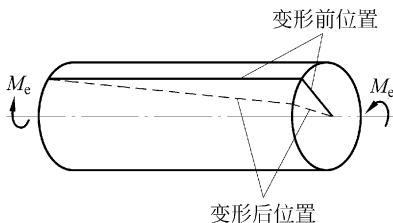


图 1-3 承受扭转的圆轴

弯曲(bend)——当外加力偶 M (图 1-4(a))或横向外力作用于杆件的纵向平面内(图 1-4(b))时,杆件将发生弯曲变形,其轴线将变成曲线。

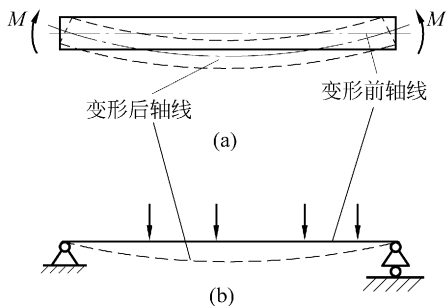


图 1-4 承受弯曲的梁

组合受力与变形(complex loads and deformation)——由上述基本受力形式中的两种或两种以上所共同形成的受力与变形形式即为组合受力与变形,例如图 1-5 中所示之杆件的变形,即为拉伸与弯曲的组合(其中力偶 M 作用在纸平面内)。组合受力形式中,杆件将产生两种或两种以上的基本变形。

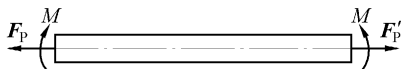


图 1-5 组合受力的杆件

实际杆件的受力不管多么复杂,在一定的条件下,都可以简化为基本受力形式的组合。

工程上将承受拉伸的杆件统称为**拉杆**,简称杆;受压杆件称为**压杆**或柱(column);承受扭转或主要承受扭转的杆件统称为**轴**(shaft);承受弯曲的杆件统称为**梁**(beam)。

1.3 工程构件静力学设计的主要内容

工程设计的任务之一就是保证结构和构件具有足够的强度、刚度和稳定性。

强度(strength)是指构件或零部件在确定的外力作用下,不发生破坏或过量塑性变形的能力。

刚度(rigidity)是指构件或零部件在确定的外力作用下,其弹性变形或位移不超过工程允许范围的能力。

稳定性(stability)是指构件或零部件在某些受力形式(例如轴向压力)下其平衡形式不会发生突然转变的能力。

例如,各种桥的桥面结构,采取什么形式才能保证不发生破坏,也不发生

过大的弹性变形,即不仅保证桥梁具有足够的强度,而且具有足够的刚度,同时还要具有重量轻、节省材料等优点(图 1-6)。

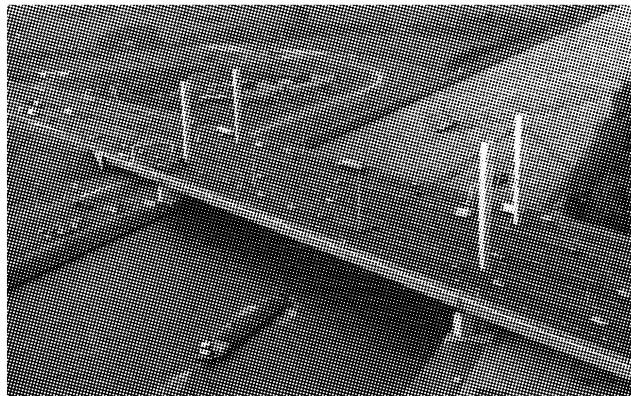


图 1-6 大型桥梁

又如,建筑施工的脚手架不仅需要足够的强度和刚度,而且还要保证有足够的稳定性,否则在施工过程中会由于局部杆件或整体结构的不稳定性而导致整个脚手架的倾覆与坍塌,造成人民生命和国家财产的巨大损失(图 1-7)。



图 1-7 建筑施工中的脚手架

此外,各种大型水利设施、核反应堆容器、计算机硬盘驱动器以及航空航

天器及其发射装置等也都有大量的强度、刚度和稳定性问题。

1.4 关于材料的基本假定

1.4.1 各向同性假定

在所有方向上均具有相同的物理和力学性能的材料,称为**各向同性**(isotropy)材料。

如果材料在不同方向上具有不同的物理和力学性能,则称这种材料为**各向异性**(anisotropy)材料。

大多数工程材料虽然微观上不是各向同性的,例如金属材料,其单个晶粒呈**结晶各向异性**(anisotropy of crystallographic),但当它们形成多晶聚集体的金属时,呈随机取向,因而在宏观上表现为各向同性。“材料力学”中所涉及的金属材料都假定为各向同性材料。该假定称为**各向同性假定**(isotropy assumption)。就总体的力学性能而言,这一假定也适用于混凝土材料。

1.4.2 各向同性材料的均匀连续性假定

实际材料的微观结构并不是处处都是均匀连续的,但是,当所考察的物体几何尺度足够大,而且所考察的物体上的点都是宏观尺度上的点,则可以假定所考察的物体的全部体积内,材料在各处是均匀、连续分布的。这一假定称为**均匀连续性假定**(homogenization and continuity assumption)。

根据这一假定,物体因受力和变形而产生的内力和位移都将是连续的,因而可以表示为各点坐标的连续函数,从而有利于建立相应的数学模型。所得到的理论结果便于应用于工程设计。

1.5 弹性体受力与变形特征

弹性体受力后,由于变形,其内部将产生相互作用的内力。这种内力不同于物体固有的内力,而是一种由于变形而产生的附加内力,利用一假想截面将弹性体截开,这种附加内力即可显示出来,如图 1-8 所示。

根据连续性假定,一般情形下,杆件横截面上的内力组成一分布力系。

由于整体平衡的要求,对于截开的每一部分也必须是平衡的。因此,作用在每一部分上的外力必须与截面上分布内力相平衡。这表明,弹性体由变形引起的内力不能是任意的。这是弹性体受力、变形的第一个特征。

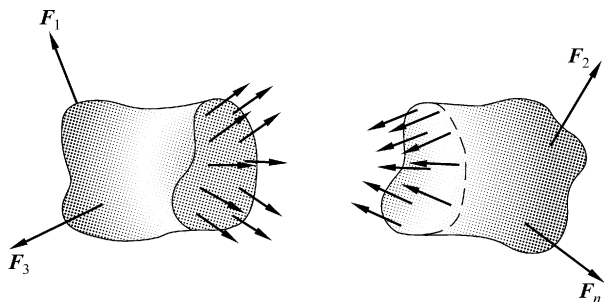
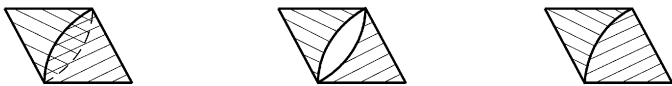


图 1-8 弹性体的分布内力

应用假想截面将弹性体截开,分成两部分,考虑其中任意一部分平衡,从而确定横截面上内力的方法,称为**截面法**。

在外力作用下,弹性体的变形应使弹性体各相邻部分既不能断开,也不能发生重叠的现象,图 1-9 中为从一弹性体中取出的两相邻部分的三种变形状况,其中图 1-9(a)、(b)所示的两种情形是不正确的,只有图 1-9(c)中所示的情形是正确的。这表明,弹性体受力后发生的变形也不是任意的,必须满足**协调**(compatibility)一致的要求。这是弹性体受力、变形的第二个特征。



(a) 变形后两部分相互重叠 (b) 变形后两部分相互分离 (c) 变形后两部分协调一致

图 1-9 弹性体变形后各相邻部分之间的相互关系

此外,弹性体受力后发生的变形还与物性有关,这表明,受力与变形之间存在确定的关系,称为**物性关系**。

例题 1-1 等截面直杆 AB 两端固定, C 截面处承受沿杆件轴线方向的力 F_P ,如图 1-10 所示。关于 A 、 B 两端的约束力有(A)、(B)、(C)、(D)四种答案,请判断哪一种是正确的。

解: 根据约束的性质,以及外力 F_P 作用线沿着杆件轴线方向的特点, A 、 B 两端只有沿杆件轴线方向的约束力,分别用 F_A 和 F_B 表示,如图 1-11 所示。

根据平衡条件 $\sum F_x = 0$, 有

$$F_A + F_B = F_P$$

其中 F_A 和 F_B 都是未知量,仅由一个平衡方程不可能求出两个未知量。对于刚体模型,这个问题是无法求解的。但是,对于弹性体,这个问题是有

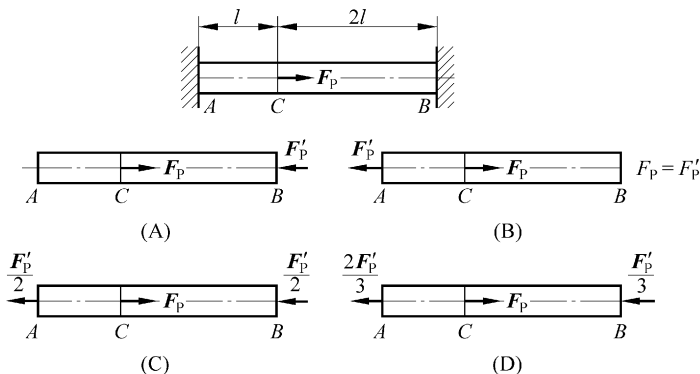


图 1-10 例题 1-1 图

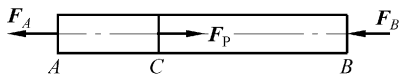


图 1-11 例题 1-1 解图

解的。

作用在弹性体上的力除了满足平衡条件外,还必须使其所产生的变形满足变形协调的要求。本例中,AC 段杆将发生伸长变形,CB 段杆则发生缩短变形,由于 AB 杆两端固定,杆件的总变形量必须等于零。

显然,图 1-10 中的答案(A)和(B)都不能满足上述条件,因而是错误的。

对于满足胡克定律的材料,其弹性变形,都与杆件受力以及杆件的长度成正比。在答案(C)中,平衡条件虽然满足,但 CB 段杆的缩短量大于 AC 段杆的伸长量,因而不能满足总变形量等于零的变形协调要求,所以也是错误的。答案(D)的约束力,既满足平衡条件,也满足变形协调的要求,因此,答案(D)是正确的。

1.6 材料力学的分析方法

分析构件受力后发生的变形,以及由于变形而产生的内力,需要采用平衡的方法。但是,采用平衡的方法,只能确定横截面上内力的合力,并不能确定横截面上各点内力的大小。研究构件的强度、刚度与稳定性,不仅需要确定内力的合力,还需要知道内力的分布。

内力是不可见的,而变形却是可见的,并且各部分的变形相互协调,变形

通过物性关系与内力相联系。所以,确定内力的分布,除了考虑平衡,还需要考虑变形协调与物性关系。

对于工程构件,所能观察到的变形,只是构件外部表面的。内部的变形状况,必须根据所观察到的表面变形作一些合理的推测,这种推测通常也称为假定。对于杆状的构件,考察相距很近的两个横截面之间微段的变形,这种假定是不难作出的。

1.7 应力、应变及其相互关系

1.7.1 应力——分布内力集度

分布内力在一点的集度,称为**应力**(stresses)。作用线垂直于截面的应力称为**正应力**(normal stress),用希腊字母 σ 表示;作用线位于截面内的应力称为**剪应力**或**切应力**(shearing stress),用希腊字母 τ 表示。应力的单位记号为 Pa 或 MPa,工程上多用 MPa。

一般情形下,横截面上的附加分布内力,总可以分解为两种:作用线垂直于截面的;作用线位于横截面内的。图 1-12 中所示为作用在微元面积 ΔA 上的总内力 ΔF_R 及其分量,其中 ΔF_N 和 ΔF_Q 的作用线分别垂直和作用于横截面内。于是上述正应力和剪应力的定义可以表示为下列极限表达式:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_N}{\Delta A} \quad (1-1)$$

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_Q}{\Delta A} \quad (1-2)$$

需要指出的是,上述极限表达式的引入只是为了说明应力的一点概念,二

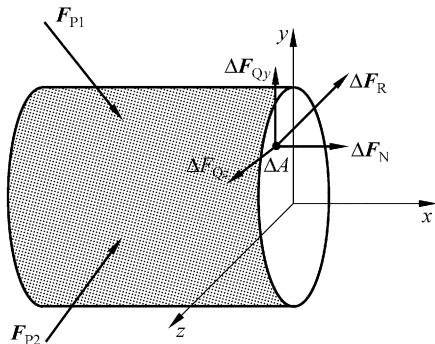


图 1-12 作用在微元面积上的内力及其分量

者在应力计算中没有实际意义。

1.7.2 应力与内力分量之间的关系

截面上应力与其作用的微面积乘积,称为应力作用点的微内力。通过积分可以建立微内力与内力之间的关系。例如,正应力在其作用面积上的积分组成横截面上沿杆件轴线方向的合力:

$$\int_A \sigma dA = F_N$$

其中 dA 为微面积; A 为横截面面积; σdA 为微面积上的内力。

1.7.3 应变——各点变形程度的度量

如果将弹性体看作由许多微单元体(简称微元体或微元)所组成,弹性体整体的变形则是所有微元体变形累加的结果。而单元体的变形则与作用在其上的应力有关。

围绕受力弹性体中的任意点截取微元体(通常为正六面体),一般情形下微元体的各个面上均有应力作用。下面考察两种最简单的情形,分别如图 1-13(a)、(b) 所示。

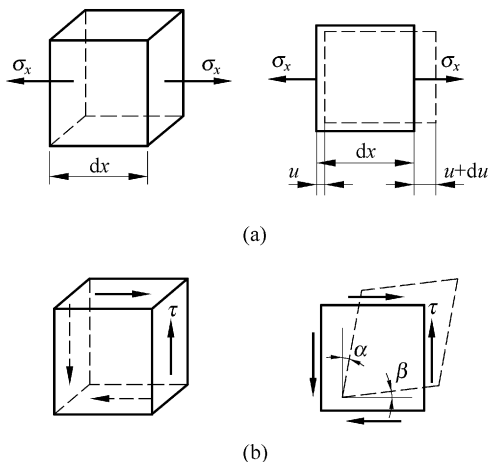


图 1-13 正应变与剪应变

对于正应力作用下的微元体(图 1-13(a)),沿着正应力方向和垂直于正应力方向将产生伸长和缩短,这种变形称为线变形。描述弹性体在各点处线变形程度的量,称为正应变或线应变(normal strain),用 ϵ_x 表示。根据微元体变形前后 x 方向长度 dx 的相对改变量,有

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (1-3)$$

式中 dx 为变形前微元体在正应力作用方向的长度; du 为微元体变形后相距 dx 的两截面沿正应力方向的相对位移; ϵ_x 的下标 x 表示应变方向。

剪应力作用下的微元体将发生剪切变形, 剪切变形程度用微元体直角的改变量度量。微元直角改变量称为**剪应变**或**切应变**(shearing strain), 用 γ 表示。在图 1-13(b) 中, $\gamma = \alpha + \beta$, γ 的单位为 rad 。

关于正应力和正应变的正负号, 一般约定: 拉应变为正; 压应变为负。产生拉应变的应力(拉应力)为正; 产生压应变的应力(压应力)为负。关于剪应力和剪应变的正负号将在以后介绍。

1.7.4 应力与应变之间的物性关系

对于工程中常用材料, 实验结果表明: 若在弹性范围内加载(应力小于某一极限值), 对于只承受单方向正应力或承受剪应力的微元体, 正应力与正应变以及剪应力与剪应变之间存在着线性关系:

$$\sigma_x = E\epsilon_x \quad \text{或} \quad \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (1-4)$$

$$\tau_x = G\gamma_x \quad \text{或} \quad \gamma_x = \frac{\tau_x}{G} \quad (1-5)$$

上述二式统称为**胡克定律**(Hooke law)。式中, E 和 G 为与材料有关的弹性常数: E 称为**弹性模量**(modulus of elasticity)或**杨氏模量**(Young modulus); G 称为**切变模量**(shear modulus)。式(1-4)和式(1-5)即为描述线弹性材料物性关系的方程。所谓线弹性材料是指弹性范围内加载时应力-应变满足线性关系的材料。

1.8 结论与讨论

1.8.1 刚体模型与弹性体模型

所有工程结构的构件, 实际上都是可变形的弹性体, 当变形很小时, 变形对物体运动效应的影响甚小, 因而在研究运动和平衡问题时一般可将变形略去, 从而将弹性体抽象为刚体。从这一意义上讲, 刚体和弹性体都是工程构件在确定条件下的简化力学模型。

1.8.2 弹性体受力与变形特点

弹性体在荷载作用下, 将产生连续分布的内力。弹性体内力应满足: 与

外力的平衡关系;弹性体自身变形协调关系;力与变形之间的物性关系。这是材料力学与理论力学的重要区别。

1.8.3 刚体静力学概念与原理在材料力学中的应用

工程中绝大多数构件受力后所产生的变形相对于构件的尺寸都是很小的,这种变形通常称为“小变形”。在小变形条件下,刚体静力学中关于平衡的理论和方法能否应用于材料力学,下列问题的讨论对于回答这一问题是有意义的:

(1) 若将作用在弹性杆上的力(图 1-14(a)),沿其作用线方向移动(图 1-14(b))。

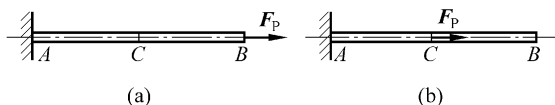


图 1-14 力沿作用线移动的结果

(2) 若将作用在弹性杆上的力(图 1-15(a)),向另一点平移(图 1-15(b))。请读者分析:上述两种情形下对弹性杆的平衡和变形将会产生什么影响?

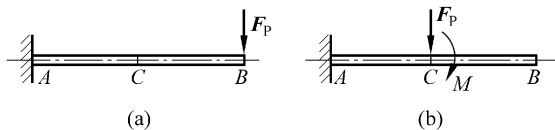


图 1-15 力向一点平移的结果

习题

1-1 关于内力和应力的定义,有以下几种论述,请判断哪一种是正确的:

- (A) 应力是单位面积上的内力,内力等于横截面面积与应力的乘积;
- (B) 应力是单位面积上的内力,内力是横截面面积应力的合力;
- (C) 应力是分布内力在一点的集度,内力是物体受力后产生变形而产生的各部分之间的相互作用力;
- (D) 应力是分布内力在一点的集度,内力是物体内部各部分之间的相互作用力。

1-2 关于内力和内力分量之间的关系,有下列几种论述,请判断哪一种是正确的: