

第 1 章 结构计算简图

1.1 基本知识

1. 支座计算简图

- 1) 滚轴支座 提供一个支座反力,如图 1-1 中的 Y_A 。
- 2) 铰支座 提供两个支座反力,如图 1-2 中的 X_A 、 Y_A 。
- 3) 固定支座 提供三个支座反力,如图 1-3 中的 X_A 、 Y_A 、 M_A 。
- 4) 定向支座(滑动支座) 提供一个支座反力和一个反力偶,如图 1-4(a)中的 X_A 、 M_A 或图 1-4(b)中的 Y_A 、 M_A 。

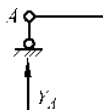


图 1-1

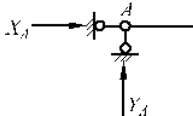


图 1-2

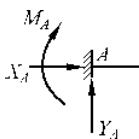
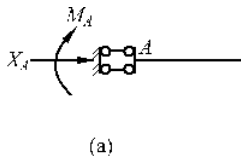
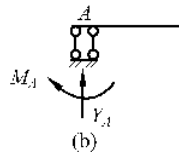


图 1-3



(a)



(b)

图 1-4

2. 结点计算简图

- 1) 铰结点 交于结点的各杆均能绕结点中心自由转动,各杆端能传递力,但不能传递力矩。计算简图如图 1-5 所示。
- 2) 刚结点 交于结点的各杆不能相对转动,各杆端间既能传递力也能传递力矩。计算简图如图 1-6 所示。
- 3) 组合结点 交于结点的各杆,一部分相互铰结,一部分相互刚结。计算简图如图 1-7 所示。



图 1-5

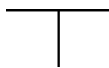


图 1-6

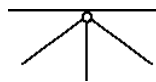


图 1-7

3. 杆件结构分类

- 1) 梁 受弯结构,又分直梁和曲梁,单跨梁和多跨梁。

- 2) 刚架 直杆受弯结构, 结点一般为刚结点, 也可有部分铰结点或组合结点。
- 3) 桁架 直链杆结构, 结点均为铰结点。
- 4) 拱 曲杆结构, 力学特点是在竖向荷载作用下有水平支座反力。
- 5) 组合结构 包含组合结点与铰结点的直杆结构。

根据结构组成方式和受力状况不同, 杆件结构还可分为平面结构和空间结构。根据静力特性还可分为静定结构和超静定结构。

4. 荷载分类

按荷载作用时间的久暂, 可分为恒载与活载两类。

按荷载作用的性质(加载曲线)不同, 可分为静力荷载与动力荷载两类。

1.2 问题解疑

1-1 两端铰支座的水平梁与简支梁在竖向荷载作用下受力相同吗?

对弯矩和剪力来说, 两者差别很小, 主要差别是前者存在轴力, 即有水平支座反力, 后者无轴力。

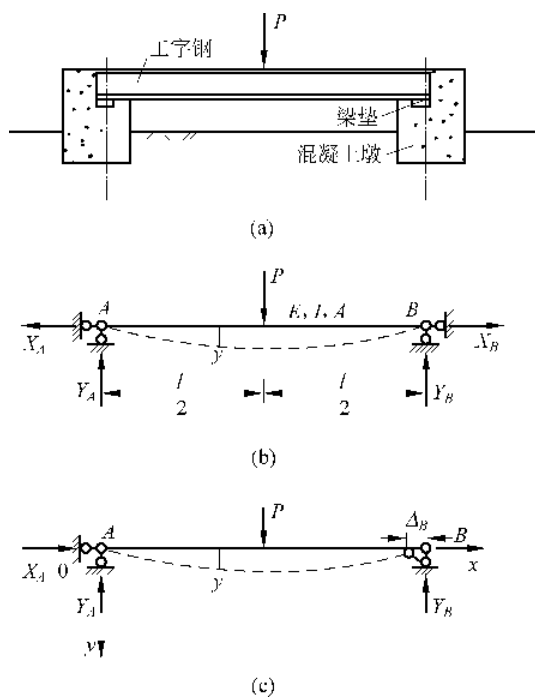


图 1-8

图 1-8(a) 示一工字钢梁, 支承在混凝土墩上, 受竖向荷载 P 作用。钢板梁垫锚固在墩内且与梁焊接在一起。就支座简化来说, 它可以按图 1-8(b) 的两端铰支座梁考虑, 即支座 A 和 B 可提供支座反力 X_A 、 Y_A 、 X_B 和 Y_B (这里不考虑梁高的影响, 即不讨论梁下侧水平反力简化到轴线时引起的附加力矩)。这是一次超静定结构, 而实用上一般简化为图 1-8(c) 的简支梁。两者受力的差别为: 图 1-8(b) 所示梁有水平支座反力 $X_A = X_B$, 图 1-8(c) 梁没有水平支座的反力; 图(b) 梁有轴力 $N = X_A$, 弯矩为 $M = M^0 - N y$, M^0 为图(c) 梁的弯矩, y 为图(b) 梁的挠度; 两者剪力 Q 相同。当不计梁弯曲引起弦长的改变(即设图(c) 中 $\Delta_B = 0$) 时, 两者受力状况相同。

下面研究图(b) 中 $X_A = X_B$ 究竟有多大。若 B 点无水平支杆, 则在力 P 作用下由于梁弯曲而使弦长缩短 Δ_B 。所以当有水平支杆限制其缩短时提供的水平反力为

$$X_B = \frac{EA}{l} \cdot \Delta_B$$

为了求 Δ_B , 从梁中取出微段 CD , 如图 1-9 所示, 弯曲前微段 CD 的原长为 dx , 由图可知, 微段两端点水平位移的差值 $d\Delta$ 为

$$d\Delta = CD - C'D'' = dx - \sqrt{ds^2 - dy^2} = dx(1 - \sqrt{1 - y'^2})$$

由二项式公式, 有

$$(1 - y'^2)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}y'^2$$

则

$$d\Delta = \frac{1}{2}(y')^2 dx$$

因此

$$\Delta_B = \int_0^l d\Delta = \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dx$$

对于图 1-8(c), 有

$$\Delta_B = \frac{1}{2} \times 2 \int_0^{\frac{l}{2}} (y')^2 dx$$

而

$$y = \frac{P}{12EI} \left(\frac{3}{4}l^2x - x^3 \right), \quad y' = \frac{P}{EI} \left(\frac{l^2}{16} - \frac{x^2}{4} \right)$$

则

$$\Delta_B = \frac{P^2 l^5}{960(EI)^2}, \quad X_B = \frac{P^2 l^4 A}{960EI^2}$$

设 $P=10\text{kN}$, $l=6\text{m}$, 梁为 NO22 a 工字钢, $I=3400\text{cm}^4$, $A=42\text{cm}^2$, $E=2.1 \times 10^5\text{MPa}$, 则

$$X_B = 2336\text{N}, \quad \Delta_B = 1.59 \times 10^{-3}\text{m}, \quad \frac{\Delta_B}{l} = \frac{1}{7500}$$

简支梁最大挠度和弯矩为

$$y_{\max}^0 = 0.63 \times 10^{-2}\text{m}, \quad M_{\max}^0 = \frac{Pl}{4} = 15 \times 10^3\text{N} \cdot \text{m}, \quad \frac{y_{\max}^0}{l} = \frac{1}{952}$$

设图 1-8(b) 最大挠度 $y_{\max} = y_{\max}^0$, 则由 X_B 产生的跨中弯矩为

$$-X_B \cdot y_{\max} = -14.1\text{N} \cdot \text{m}$$

从上述计算可以看出, 对于图 1-8(b), 即使 A, B 支座绝对刚性(受水平力后无任何水平位移)其最大弯矩仅比图 1-8(c) 小约 $\frac{1}{1000}$, 况且支座总有弹性变形, 会减小 X_B 值。因此, 类似于图 1-8(a) 的梁, 如图 1-10 所示, 当对梁进行受力分析时, 总是简化成简支梁计算。

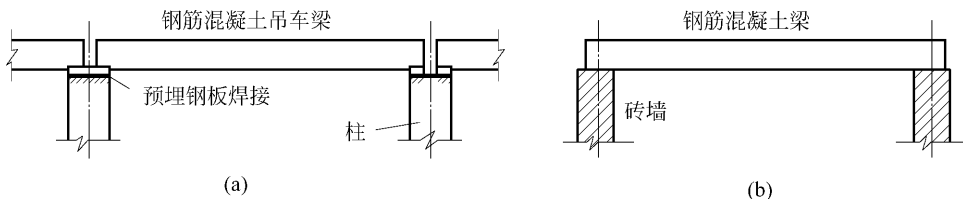


图 1-10

1-2 为什么说杆系结构的分类是按计算简图划分的？

杆系结构的分类实际是依计算简图分类命名的。这是因为同一外形的结构,由于结点构造不同,杆件截面尺寸不同,使得各杆受力性能不同,或对计算精度要求不同等因素所引起的差别均可由计算简图反映出来。例如对图 1-11(a)所示的钢筋混凝土结构,它属于哪种结构呢? 要具体分析:(1)如杆件截面均较大且节点构造又能满足刚性结点特征时,计算图就可简化成图(b),则此结构就称刚架。(2)当各杆截面尺寸均较小,节点构造满足铰结点特性时,计算图就取图(c),此时就称为桁架。(3)当弦杆截面尺寸较大,腹杆截面尺寸小且腹杆与弦杆连接不能满足刚性要求时,就可取图(d)为计算简图而称为组合结构。

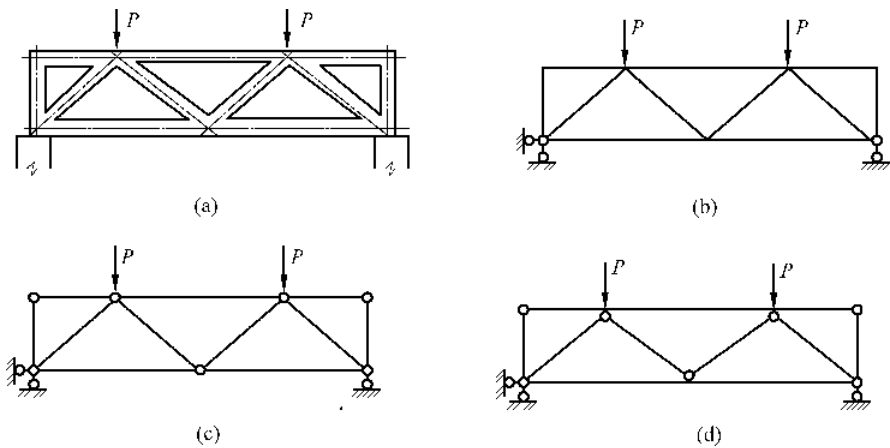


图 1-11

结构分类又可按计算特性分为静定结构和超静定结构。正如不能笼统说图 1-11(a)所示结构是刚架或是桁架或是组合结构一样,也不能笼统说它是静定结构或是超静定结构,仍须按所取计算简图来划分,如图 1-11(b)和图 1-11(d)是超静定结构,图 1-11(c)是静定结构。

应该说,如图 1-11(a)所示的结构,若结点构造满足刚结点条件(其杆端能抵抗弯矩且能保证交于同一结点的各杆端位移相同),不管其截面尺寸大小,按图(b)计算比按图(c)计算更接近实际些,不过计算量要增加很多。

1-3 如何正确理解静力荷载？

作用在结构上的荷载按其性质可分为静力荷载和动力荷载。它们的区别在于在荷载作用下使结构的质体是否产生加速度(产生假想的惯性力)及其对结构影响的程度。静力荷载是指逐渐增加的、不致使结构产生显著的冲击和振动因而可略去惯性力影响的荷载。

一个力作用在结构上,是作为静力还是作为动力考虑,取决于它随时间的变化规律(加载曲线)、加载

速度的快慢。如图 1-12(a) 所示荷载 $P(t)$, 当其加载曲线为图 1-12(b) 且加载时间 $t_1 > \frac{T}{4}$ (T 为结构自振周期) 时, 可视为静力荷载; 若 $t_1 < \frac{T}{4}$, 一般应视为动力荷载。若加载曲线如图 1-12(c) (突加荷载) 或图 (d) (短时荷载, $t_1 \leq \frac{T}{2}$) 时, 则应视为动力荷载 (详见结构动力计算)。

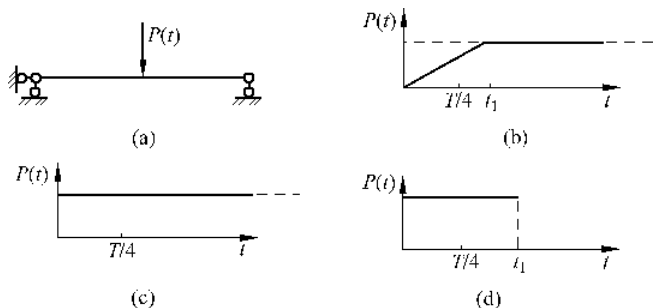


图 1-12

荷载按其作用于结构上时间的久暂又可分为恒载和活载两类。恒载是指永远作用在结构上的荷载, 如结构自重、结构上固定设备的自重等, 这类荷载属于静力荷载; 活载是指暂时作用在结构上的荷载, 如风力、雪重、人群、移动荷载 (如汽车、火车、移动的吊车) 和地震荷载等, 其中有些活载属于静力荷载, 如雪载、人流, 而有些活载则属于动力荷载, 如开动着的机器荷载、风载、地震荷载; 移动荷载当移动速度较慢时所引起的振动和惯性力可以忽略, 可按静力荷载考虑, 而当移动速度较快时 (如高速火车、汽车) 引起的振动和惯性力不能忽略, 应按动力荷载考虑。

第 2 章 平面体系的几何组成分析

2.1 基本知识

1. 几何组成分析中的几个概念

1) 几何不变体系与几何可变体系

在几何组成分析中不计杆件的微应变,将杆件看做刚片。几何形状固定不变的刚片系称为几何不变体系;几何形状可以改变的刚片系称为几何可变体系。

2) 体系的自由度

体系运动时可以独立改变的坐标参数的个数,即完全确定体系的位置所需的独立坐标数,称为体系的自由度。

一个点在平面内的自由度 $S=2$,在空间 $S=3$;一个刚片在平面内 $S=3$,在空间 $S=6$ 。

3) 约束,必要约束与多余约束

限制体系运动的装置称为约束(或联系)。能有效减少体系自由度的约束称为必要约束(非多余约束);不能减少体系自由度的约束称为多余约束。

仅连接两个刚片的一根单链杆(或支杆)相当于一个约束(图 2-1(a)、(b));在 n 个铰点上分别连接 n 个刚片的复链杆相当于 $(2n-3)$ 个约束(图 2-1(c))。

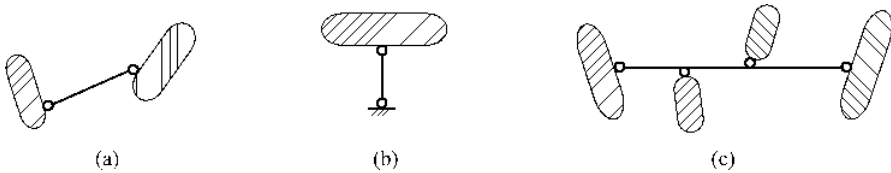


图 2-1

连接两个刚片的简单铰相当于两个约束(图 2-2(a));连接 n 个刚片的一个复铰相当于 $(n-1)$ 个简单铰(图 2-2(b))。

连接两个刚片的简单刚结相当于三个约束;连接 n 个刚片的复杂刚结相当于 $(n-1)$ 个简单刚结。一个无铰闭合框(单连通)内存在三个多余约束(图 2-3(a)、(b))。

4) 瞬铰

两刚片由两根链杆并联连接时,两链杆的约束作用等效于链杆交点(或延长线交点)处一个简单铰的作用(图 2-4(a)、(b)中的 O 点),这种等效约束称为瞬铰,也称虚铰。

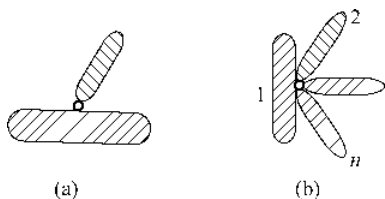


图 2-2

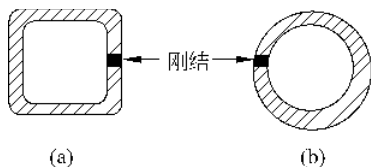


图 2-3

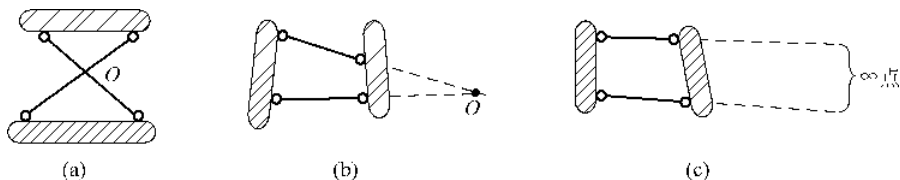


图 2-4

5) 无穷远瞬铰

若连接两刚片的两根链杆相互平行,则两链杆的约束作用等效于无穷远处的一個瞬铰(图 2-4(c))。

关于 ∞ 点和 ∞ 线的说明:

- (1) 每个方向上所有平行线的交点称为 ∞ 点。不同方向有不同的 ∞ 点。
- (2) 所有的 ∞ 点都在一条广义直线上,此广义直线称为 ∞ 线。
- (3) 所有的有限点都不在 ∞ 线上。

2. 平面杆系的计算自由度

1) 体系实际自由度 S 、计算自由度 W 与多余约束数 n 的关系

若所有的约束对象的自由度总和为 a ,非多余约束数为 c ,全部约束总数为 d ,则有体系实际自由度

$$S = a - c$$

体系计算自由度

$$W = a - d$$

多余约束数

$$n = d - c = S - W$$

因此

$$S \geq W, \quad n \geq -W$$

2) 平面体系计算自由度公式

(1) 刚片系

$$W = 3m - (3g + 2h + b) \quad (2-1)$$

式中, m 为内部无多余约束的刚片数; g 为简单刚结数; h 为简单铰数; b 为单链杆(含支杆)数。

(2) 链杆系

$$W = 2j - b \quad (2-2)$$

式中, j 为结点数; b 为单链杆(含支杆)数。

(3) 无支座平面体系的内部自由度(内部可变量) V

$$V = W - 3 \quad (2-3)$$

(4) 计算结果分析

若 $W > 0$ (或 $V > 0$), 体系(或内部)几何可变。

若 $W \leq 0$ (或 $V \leq 0$), 体系满足几何不变的必要条件, 但不一定几何不变, 还应进行几何构造分析。若 $W = 0$, 则 $S = n$; 当 $n = 0$ 时体系几何不变; 当 $n > 0$ 时体系几何可变且有多余约束。若 $W < 0$, 则 $n > S$, 无论是否几何不变, 体系均有多余约束。

3. 平面几何不变体系的基本组成规则

1) 二元体规则

用不共线的两根链杆连接一个结点于一刚片, 组成无多余约束的几何不变整体, 又称为二元体, 如图 2-5(a) 所示。

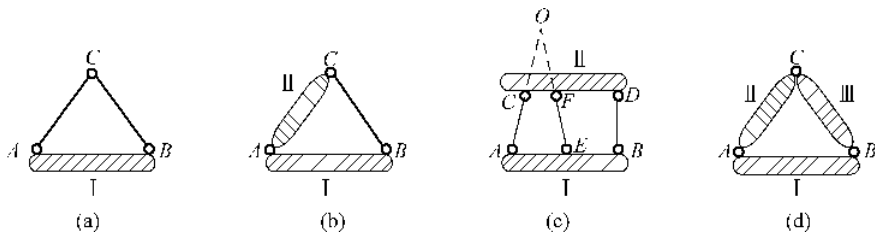


图 2-5

在一个体系上增加或排除二元体, 不改变原体系的几何组成性质。

2) 两刚片规则

(1) 两刚片间用一个铰和一根不通过该铰的链杆相连, 组成无多余约束的几何不变整体, 如图 2-5(b) 所示。

(2) 两刚片间用不共点也不完全平行的三根链杆相连, 组成无多余约束的几何不变整体, 如图 2-5(c) 所示。其中链杆 AC 和 EF 的约束作用等效于瞬铰 O 。

3) 三刚片规则

三刚片用不共线的三个铰两两相连, 组成无多余约束的几何不变整体, 如图 2-5(d) 所示。

在图 2-5 所示的四种体系中, 刚性链杆可以用刚片代换, 单铰可以用两根链杆代换。由此可知四种组成规则的本质相同, 可以归结为铰结三角形规则: 三个刚片(或链杆)用三个铰(含瞬铰)两两相连, 形成铰结三角形。若三铰不共线, 则铰结三角形几何不变且无多余约束。

4. 瞬变体系

计算自由度 $W = 0$ 、原为几何可变而在发生微小位移后又成为几何不变的体系, 称为瞬变体系(严格定义见问题解疑 2-6)。基本的瞬变体系有: 连接一结点于一刚片的两链杆共线(图 2-6(a)), 或连接三刚片的三铰共

线),连接两刚片的三链杆共点(图 2-6(b)),连接两刚片的不等长三链杆相互平行(图 2-6(c))等体系。

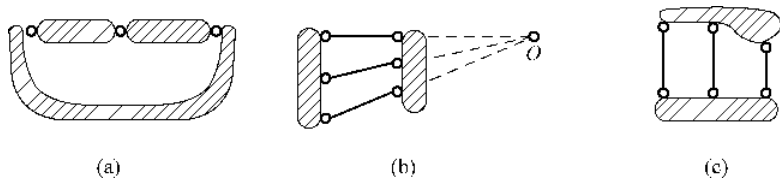


图 2-6

当 $W=0$ 时,瞬变体系在与瞬时相对运动的不同方向(一般为正交方向)上必有一个多余约束,而在运动方向上缺少一个约束,故称“体系瞬变,有多余约束”。

瞬变体系不能作结构使用。

2.2 学习要求

1. 搞清体系自由度与计算自由度的意义和区别,学会 W 的计算方法。
2. 重点掌握平面体系几何组成分析的基本规则,正确、灵活地运用基本规则和分析方法对一般平面体系进行几何组成分析。

2.3 解题方法提示

分析平面体系的几何组成时,要紧紧抓住铰结三角形基本规则以及它的不同形式:二元体规则、两刚片规则及三刚片规则;在引入瞬铰后可推广到三刚片六链杆体系。

当计算自由度 $W>0$ 时,体系必定几何可变,不必再作组成分析。当 $W\leq 0$,只满足了几何不变的必要条件,还须作几何组成分析才能确定体系是否不变。当然,也可以不必计算 W 值而直接进行几何组成分析。

下面就几何组成分析的方法提出几点建议。

1. 寻找几何不变的构造单元

首先找出体系中几何不变的局部——构造单元,由构造单元逐步扩展组装成整体。组装顺序可分为两种:

- (1) 从地基开始组成第一个构造单元,在此基础上按几何组成规则逐步组装成整体。
- (2) 从体系内部开始先组成第一个(或两个以上)构造单元,将它们看做大刚片,再利用规则组成整体。当体系与地基的连接只有三根不共点支杆时,一般都可先分析体系内部。

当用以上两种方法都难以找到构造单元时(如图 2-8(a)、图 2-11(a)所示体系),就应将地基作为一个大刚片参与整体分析。

2. 利用约束的等效代换

(1) 复杂形状(曲线、折线形)链杆的约束作用可以用直链杆代替,如图 2-7(a)、(b)所示。图 2-7(c)为一内部几何不变的小桁架,若通过铰 A 、铰 B 约束其他物体,其约束作用等效于直链杆 AB 。以上可称为构造等效变换。

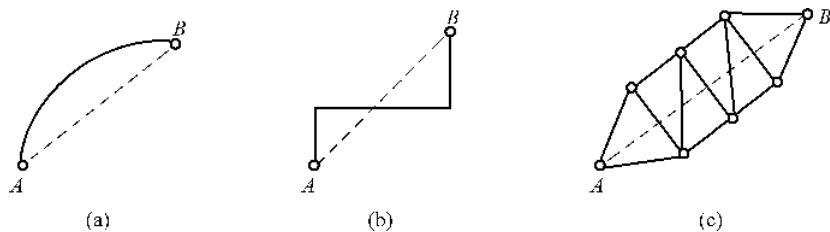


图 2-7

例如图 2-8(a)所示体系,若将 AD 、 BDE 、 EC 都看做刚片,无法用组成规则进行几何组成分析。若将折链杆 AD 、 CE 等效代换为直链杆,将地基看做大刚片 I, BDE 为刚片 II, 两刚片间由链杆 1、等效链杆 AD 、 CE 三链杆连接,即可按两刚片、三链杆规则分析,如图 2-8(b)所示。

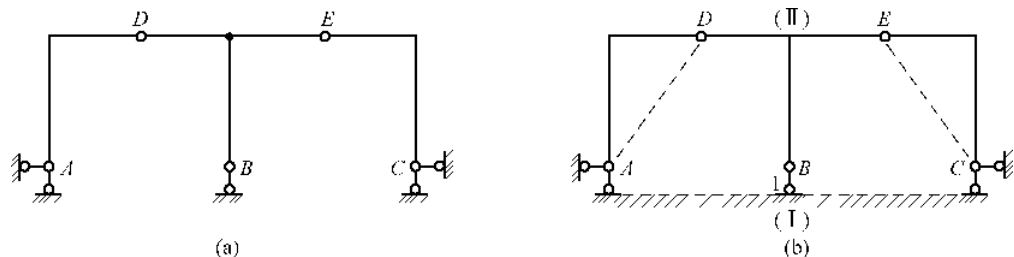


图 2-8

(2) 连接两刚片(并联)的两根链杆,等效于它们交点处的瞬铰。

(3) 用等效的多个单约束代替一个复约束,如用若干单链杆代替复链杆。

如图 2-9(a)所示的复链杆通过铰 A 、 B 、 C 分别约束三个刚片,它等效于三个单链杆 AB 、 BC 、 AC ,如图 2-9(b)。注意,铰 B 与链杆 AC 的距离为无限小,但 A 、 B 、 C 三铰不共线(因复链杆自身几何不变,其等效约束也应为几何不变的铰结三角形)。

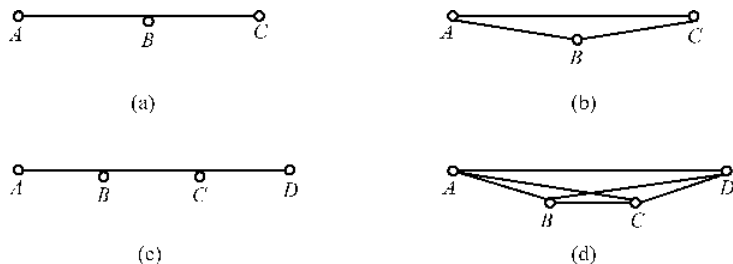


图 2-9