

# 第3章

## 电路的基本分析方法

### 内容提要

本章主要介绍线性电阻电路分析的基本方法。首先介绍等效分析方法,利用等效的概念,讨论几种常见的等效变换方法,包括电阻、电容、电感、耦合电感等串联与并联的等效变换、电源的等效变换、含受控源电路的等效变换、T形电路和 $\Pi$ 形电路的等效变换以及具有零电压支路/零电流支路电路的等效变换等。其次介绍电路分析的一般方法,即以独立电流、电压变量列写电路方程的方法,包括以回路电流为未知变量的回路分析法、以节点电压为未知变量的节点分析法。最后介绍电路的对偶概念,利用对偶的概念,可以清楚地看出上述方法之间的联系。电路分析的一般方法是电路分析普遍适用的方法,是分析复杂电路的有效方法,也是计算机辅助电路分析的基础。

### 3.1 等效电路与等效变换

在对电路进行分析时,为了简便起见,有时可以把电路的一部分进行简化,即用一个较为简单的电路来替换该部分。如图 3.1.1(a)所示,电路由两个互相连接的一端口电路  $N$  和  $N_1$  构成,其中  $N_1$  又由若干电阻连接构成。从下面的讨论可知,可以用一个等效电阻  $R_{eq}$  来替换  $N_1$  在电路中的作用,如图 3.1.1(b)中  $N_2$  所示。如果替换前后电路  $N$  中所有电压和电流都保持不变,则称这种替换为**等效变换**(equivalent transformation)。显然,等效变换的条件是  $N_1$  和  $N_2$  的端口特性必须相同。

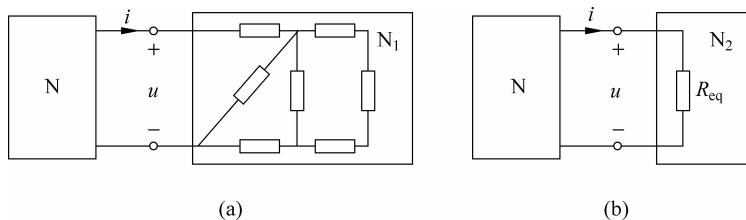


图 3.1.1 等效的概念

由等效变换的概念可引出等效电路的概念。如果端钮一一对应的  $n$  端电路  $N_1$  和  $N_2$  具有相同的端口特性,即相同的两组端口电压分别代入两个电路的端口特性方程会得出相同的两组端口电流,或者将相同的两组端口电流代入两个电路的端口特性方程会得出相同的两组端口电压,则二者互相等效,并互称**等效电路**(equivalent circuit)。

由于两个电路等效是指二者的端口特性相同,而不涉及二者的内部特性,所以两个等效电路的内部可以有很大的不同。例如二者的连接方式可以完全不同,一个是非常复杂的电路,而另一个却是很简单的电路。

电路的等效变换往往可以简化电路的分析。当任一线性电路的任一部分  $N_1$  等效变换成电路  $N_2$  后,电路的不变部分中的支路电压和支路电流并不因变换而有所改变。

### 3.2 二端电路的等效变换

由上一节讨论可知,两个二端电路互为等效,则这两个二端电路端口特性必定相同。下面分析一些常见二端电路的等效变换。

#### 3.2.1 电阻、电容、电感的串联与并联

##### 1. 电阻的串联与并联

线性非时变电阻在电路中最简单的连接形式是**串联**(series connection)和**并联**(parallel connection)。

将电阻依次连接,从而各电阻流过相同的电流,则称这些电阻的连接为串联。如图 3.2.1 所示,如果  $R=R_1+R_2$ ,两个电路的端口特性方程相同,即

$$u = (R_1 + R_2) = Ri \quad (3.2.1)$$

因此当  $R=R_1+R_2$  时,  $N$  和  $N'$  必然等效,反之亦然。电阻  $R$  称为电阻  $R_1$  与  $R_2$  串联的等效电阻。

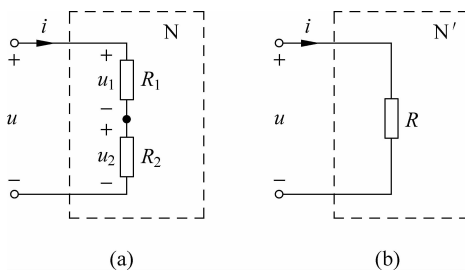


图 3.2.1 电阻的串联及其等效

同理,由  $n$  个电阻  $R_1, R_2, \dots, R_n$  串联而成的一端口电路  $N$  与仅含一个电阻  $R$  的一端口电路  $N'$ ,当  $R=R_1+R_2+\dots+R_n$  时,必然等效,其阻值

$$R = \sum_{k=1}^n R_k \quad (3.2.2)$$

就是  $n$  个线性非时变电阻串联的等效电阻。

电阻的串联连接常用于分压,其中每个串联电阻所承受的电压为总电压的一部分。对图 3.2.1(a),由式(3.2.1)可得电流  $i$  为

$$i = \frac{u}{R_1 + R_2} \quad (3.2.3)$$

于是可求出各电阻上的电压为

$$u_1 = R_1 i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u, \quad u_2 = R_2 i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u \quad (3.2.4)$$

上式就是两个电阻串联时的分压公式(voltage-divider equation)。下述分压公式表达了  $n$  个电阻串联后总电压在第  $k$  个电阻上的分配比例

$$u_k = \frac{R_k}{R} u = \frac{R_k}{\sum_{i=1}^n R_i} u \quad (3.2.5)$$

式中,  $u$  表示  $n$  个电阻串联电路的端口电压,  $u_k$  表示电阻  $R_k$  两端的电压。

将电阻都连接到同一对节点之间,从而各电阻两端的电压相同,则称这些电阻的连接为并联。如图 3.2.2 所示,两个电阻并联也是一个内部结构为已知的一端口电路。和两个电阻的串联等效变换类似,可以得出如图 3.2.2 所示的  $N$  和  $N'$  等效的条件为

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{或} \quad G = G_1 + G_2 \quad (3.2.6)$$

同理,由  $n$  个电阻  $R_1, R_2, \dots, R_n$  并联而成的一端口电路  $N$ ,其电导值为

$$G = \sum_{k=1}^n G_k \quad (3.2.7)$$

即为  $n$  个线性非时变电阻并联的等效电导。

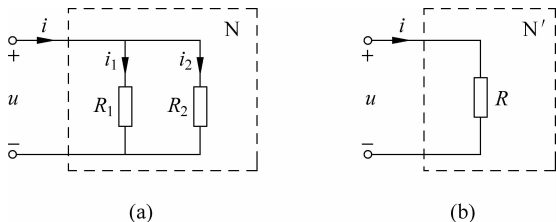


图 3.2.2 电阻的并联及其等效

电阻的并联连接常用于分流,其中每个并联电阻所承受的电流为总电流的一部分。下述分流公式(current-divider equation)表达了  $n$  个电阻并联后总电流在第  $k$  个电阻中的分配比例

$$i_k = \frac{G_k}{\sum_{i=1}^n G_i} i \quad (3.2.8)$$

式中,  $i$  表示  $n$  个电阻并联电路的端口电流;  $i_k$  表示流经电阻  $R_k$  的电流。

式(3.2.2)和式(3.2.7)所表述的两个结论可以推广到多个线性时变电阻的串联与并联。 $n$  个电阻串联时的等效时变电阻为

$$R(t) = \sum_{k=1}^n R_k(t) \quad (3.2.9)$$

$n$  个电导并联时的等效时变电导

$$G(t) = \sum_{k=1}^n G_k(t) \quad (3.2.10)$$

在电路分析中,往往既有电阻的串联,又有电阻的并联,对这种电阻混联的电路,可以采用对电路的串联部分和并联部分单独进行等效简化的方法来进行分析。

**【例 3.2.1】** 图 3.2.3(a)所示为电阻混联的电路。试求电路的输入电阻  $R_i$ 。

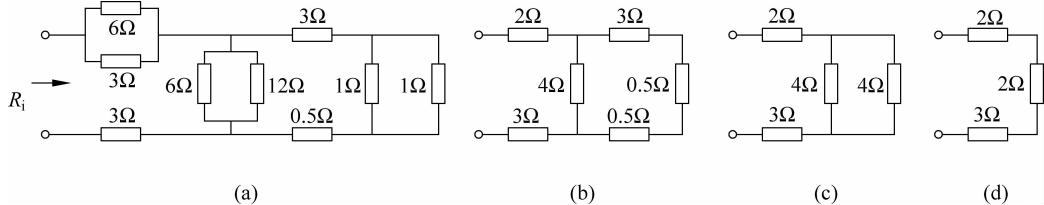


图 3.2.3 例 3.2.1

**解** 可以从最简单的串联或并联电阻的等效变换入手。对图 3.2.3(a)所示的电路,先将并联的  $3\Omega$  和  $6\Omega$  电阻等效为  $2\Omega$ ,并联的  $6\Omega$  和  $12\Omega$  电阻等效为  $4\Omega$ ,并联的  $1\Omega$  和  $1\Omega$  电阻等效为  $0.5\Omega$ ,得到图 3.2.3(b)所示的电路,再将三个串联的电阻等效为  $4\Omega$ ,得

到图 3.2.3(c)所示的电路,再进一步等效得到图 3.2.3(d)所示的电路,最后得到输入电阻为  $R_i = 7\Omega$ 。

MATLAB 计算程序:

% 采用 MATLAB 求解例 3.2.1

Ri = serz(pllz(6,3),pllz(6,12,serz(3,pllz(1,1),0.5)),3)

% 利用函数 serz()、pllz()计算输入电阻

计算结果:

Ri = 7

上面程序中用于计算串联、并联等效电阻的函数如下:

function z = serz(varargin)

% 计算电阻的串联,串联电阻的个数为任意

% 输入参数: varargin -- 串联电阻值列表,可为数值型,也可为符号型

% 输出参数: z -- 串联等效电阻

z = varargin{1};

for i = 2: length(varargin)

z = z + varargin{i};

end

function z = pllz(varargin)

% 计算电阻的并联,并联电阻的个数为任意

% 输入参数: varargin -- 并联电阻值列表,可为数值型,也可为符号型

% 输出参数: z -- 并联等效电阻

z = 1/varargin{1};

for i = 2: length(varargin)

z = z + 1/varargin{i};

end

z = 1/z;

**【例 3.2.2】** 图 3.2.4(a)所示为一无限电阻电路。其中所有电阻的阻值都为  $1\Omega$ 。试求电路的输入电阻  $R_i$ 。

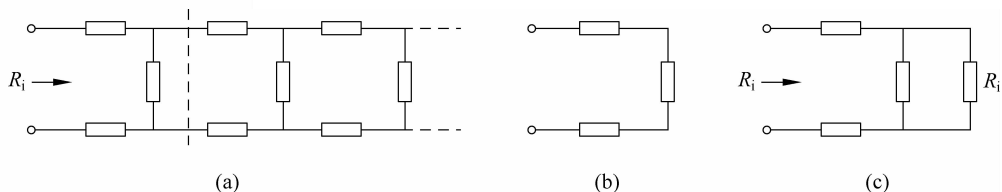


图 3.2.4 例 3.2.2

**解** 图 3.2.4(a)所示电路由无限多个如图 3.2.4(b)所示的电阻电路级连而成。由于电路是无限的,所以从左端切除一节如图 3.2.4(b)所示的电阻电路,剩下的仍然是一个和原电路相同的无限电阻电路,而且这个电路的输入电阻仍可认为是  $R_i$ 。所以,原电路可看成是一个如图 3.2.4(b)所示的电阻电路级连了一个电阻值为  $R_i$  的线性非时变电阻,如图 3.2.4(c)所示。根据图 3.2.4(c)的电路可以写出

$$R_i = 1 + \frac{R_i}{1 + R_i} + 1$$

由此式求得

$$R_i = (1 \pm \sqrt{3})\Omega$$

由于输入电阻应为正值,因此  $R_i = (1 + \sqrt{3})\Omega$ 。

## 2. 电容的串联与并联

和电阻串联类似,将电容依次连接,从而各电容流过相同的电流,则称这些电容的连接为串联。为了提高电容承受的电压,可以将若干个电容串联后使用。如图 3.2.5(a)所示,各串联电容为  $C_k (k=1, 2, \dots, n)$ , 设串联前电容的初始电压分别为  $u_k(0) (k=1, 2, \dots, n)$ , 根据 KVL 和电容的电压、电流关系可以得到  $n$  个电容串联后的电压-电流关系为

$$u = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \left( u_k(0) + \frac{1}{C_k} \int_0^t i(\tau) d\tau \right) = \sum_{k=1}^n u_k(0) + \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \right) \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (3.2.11)$$

对图 3.2.5(b)所示的由一个电容  $C$  组成的一端口电路,其端口的电压-电流关系为

$$u = u(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (3.2.12)$$

比较式(3.2.11)和式(3.2.12)可知,串联等效电容的初始电压为各串联电容初始电压之和,即

$$u(0) = \sum_{k=1}^n u_k(0) \quad (3.2.13)$$

串联等效电容的倒数等于各串联电容倒数之和,即

$$\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \quad (3.2.14)$$

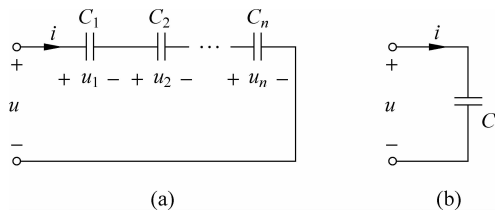


图 3.2.5 电容的串联等效

和电阻并联类似,将电容都连接到同一节点之间,从而各电容两端的电压相同,则称这些电容为并联。为了得到较大的电容,可将若干电容并联起来使用。如图 3.2.6(a)所示, $n$  个电容并联后组成的一端口电路的电压-电流关系为

$$i = \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n \left( C_k \frac{du_k}{dt} \right) = \left( \sum_{k=1}^n C_k \right) \frac{du}{dt} \quad (3.2.15)$$

图 3.2.6(b)所示的由一个电容  $C$  组成的一端口电路,其端口的电压-电流关系为

$$i = C \frac{du}{dt} \quad (3.2.16)$$

比较式(3.2.15)和式(3.2.16)可知,并联等效电容等于并联电容之和,即

$$C = \sum_{k=1}^n C_k \quad (3.2.17)$$

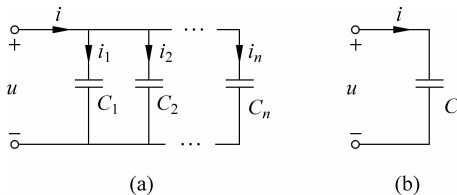


图 3.2.6 电容的并联等效

值得指出的是:电容并联时并未考虑各并联电容的初始电压,如各电容的初始电压相等,则并联等效电容的初始电压与各电容的初始电压相同;如各电容的  $u_k(0)$  不等,则在并联的瞬间,各电容上的电荷将重新分配,使各电容的初始电压相等,等效电容的初始电压为该初始电压。

**【例 3.2.3】** 图 3.2.7(a)所示电路中开关 S 在  $t=0$  时刻闭合,试求开关 S 闭合后等效电容的电容值和初始电压。已知  $u_1(0)=u_{10}$ ,  $u_2(0)=u_{20}$ 。

**解** 开关 S 闭合后两个电容并联,等效电容值为  $C=C_1+C_2$ 。等效电容的初始电压  $u_0$  可通过电荷守恒定律来求得。开关闭合前,电容的电荷量为

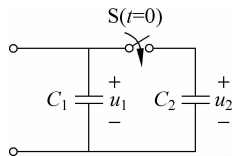


图 3.2.7 例 3.2.3

$$q_{C1} + q_{C2} = C_1 u_{10} + C_2 u_{20}$$

开关闭合后,由 KVL 可知,两电容上的电荷将重新分配,使两个电容两端的电压相等(满足 KVL),其大小为等效电容的初始电压  $u_0$ 。此时电容的电荷量为

$$q'_{C1} + q'_{C2} = C_1 u_0 + C_2 u_0$$

由电荷守恒定律可知

$$C_1 u_{10} + C_2 u_{20} = C_1 u_0 + C_2 u_0$$

求得等效电容的初始电压  $u_0$  为

$$u_0 = \frac{C_1 u_{10} + C_2 u_{20}}{C_1 + C_2}$$

### 3. 电感的串联与并联

电感串联和电感并联连接分析,可参照电容串联和电容并联的方法进行。

如图 3.2.8(a)所示,若干个电感串联后,其端口的电压-电流关系为

$$u = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \left( L_k \frac{di_k}{dt} \right) = \left( \sum_{k=1}^n L_k \right) \frac{di}{dt} \quad (3.2.18)$$

由上式可知,串联等效电感(如图 3.2.8(b)所示)等于串联电感之和,即

$$L = \sum_{k=1}^n L_k \quad (3.2.19)$$

和电容并联类似,电感串联时并未考虑各串联电感的初始电流,如各电感的初始电流相等,则串联等效电感的初始电流与各电感的初始电流相同;如各电感的  $i_k(0)$  不等,

则在串联的瞬间,各电感上的磁通链将重新分配,使各电感的初始电流相等,等效电感的初始电流为各电感串联后的初始电流。

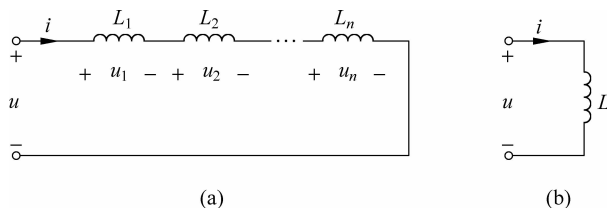


图 3.2.8 电感的串联等效

为了提高电感承受的电压,可以将若干个电感串联后使用。

对于并联电感电路,如图 3.2.9(a)所示,设并联前电感的初始电流为  $i_k(0)$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ),根据 KCL 和电感元件的电压-电流关系,可得并联电感电路的端口电压-电流关系为

$$\begin{aligned} i &= \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n \left( i_k(0) + \frac{1}{L_k} \int_0^t u_k(\tau) d\tau \right) \\ &= \sum_{k=1}^n i_k(0) + \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \right) \int_0^t u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

由上式可知,并联等效电感(如图 3.2.9(b)所示)的初始电流为各电感的初始电流之和,即

$$i(0) = \sum_{k=1}^n i_k(0) \quad (3.2.21)$$

并联等效电感的倒数等于各并联电感倒数之和,即

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \quad (3.2.22)$$

为了得到较大的电感,可以将若干个电感串联后使用。

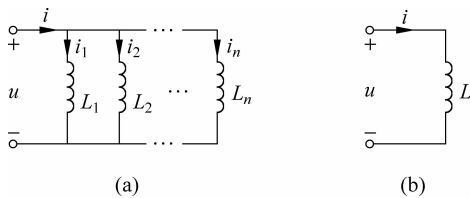


图 3.2.9 电感的并联等效

#### 4. 耦合电感的串联与并联

耦合电感的两个线圈可以串联连接构成一个电感,如图 3.2.10 所示。耦合线圈的自感和互感分别为  $L_1$ 、 $L_2$  和  $M$ 。图 3.2.10(a)是异名端相连接,称为顺接;图 3.2.10(b)是同名端相连接,称为反接。



根据 KVL, 对图 3.2.10(a)、(b) 所示电路, 由耦合电感的电压-电流关系式(2.2.14) 可得

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 = \left( L_1 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt} \right) + \left( \pm M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} \right) \\ &= (L_1 + L_2 \pm 2M) \frac{di}{dt} \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

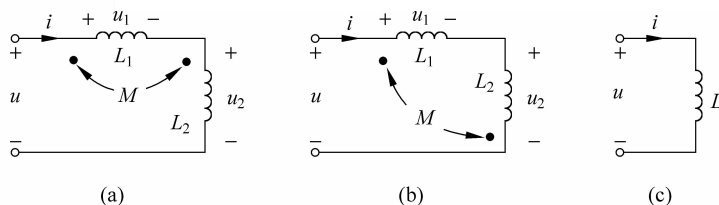


图 3.2.10 耦合电感的串联等效

对图 3.2.10(c) 所示的由一个电感构成的电路, 其电压-电流关系为

$$u = L \frac{di}{dt} \quad (3.2.24)$$

比较式(3.2.23)和式(3.2.24)可知, 耦合电感的串联可用一个电感来等效, 其等效电感为

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M \quad (3.2.25)$$

由上式可知, 对图 3.2.10(a) 所示电路, 电流  $i$  从两个线圈的同名端流入两线圈(顺接), 互感磁通和自感磁通互相加强, 式(3.2.25)中  $2M$  前取“+”号, 等效电感大于两自感之和; 图 3.2.10(b) 所示电路, 电流  $i$  从两个线圈的异名端流入两线圈(反接), 互感磁通减弱, 自感磁通互相减弱, 式(3.2.25)中  $2M$  前取“-”号, 等效电感小于两自感之和, 但不会成为负值。

耦合电感的并联也可用等效电感替代, 如图 3.2.11 所示。图 3.2.11(a) 是两个线圈的同名端连接在一起, 图 3.2.11(b) 是两个线圈的异名端连接在一起。假设耦合电感的初始电流为零, 即  $i_1(0) = i_2(0) = 0$ 。对图 3.2.11(a)、(b) 所示电路, 由耦合电感的电压-电流关系式(2.2.15) 可得

$$\begin{cases} i_1 = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t u_1 d\tau - \frac{\pm M}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t u_2 d\tau \\ i_2 = -\frac{\pm M}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t u_1 d\tau + \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t u_2 d\tau \end{cases} \quad (3.2.26)$$

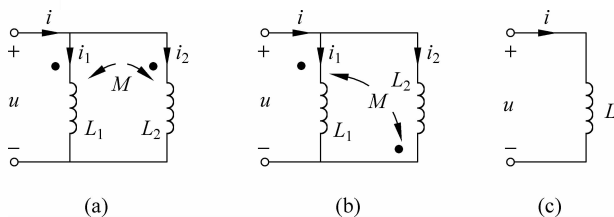


图 3.2.11 耦合电感的并联等效

根据 KCL, 有

$$i = i_1 + i_2 = \left( \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t u_1 d\tau - \frac{\pm M}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t u_2 d\tau \right) + \left( -\frac{\pm M}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t u_1 d\tau + \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t u_2 d\tau \right) = \frac{L_1 + L_2 \mp 2M}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t u d\tau \quad (3.2.27)$$

对图 3.2.11(c) 所示的由一个电感构成的电路, 设电感的初始电流为零, 其电压-电流关系为

$$i = \frac{1}{L} \int_0^t u d\tau \quad (3.2.28)$$

比较式 (3.2.28) 和式 (3.2.29) 可知, 耦合电感的并联可用一个电感来等效, 其等效电感为

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M} \quad (3.2.29)$$

### 3.2.2 含独立电源电路的等效变换

如果电路中含有独立电源, 则称这种电路为含源电路。含源电路的等效和用等效变换对其进行简化是电路分析中的基本方法之一。

#### 1. 独立电源的串联与并联

##### (1) 电压源的串联

电压源可以进行串联连接。两个电压源的串联连接如图 3.2.12(a) 所示。根据 KVL, 该含源一端口电路的端口电压为电压源的端口电压之和; 由 KCL 可知, 端电流  $i$  是流过每个电压源的电流, 为任意值。因此该一端口电路的端口电压取确定值而端电流取任意值, 其端口特性方程可表示为

$$u = u_{S1} + u_{S2} \quad (3.2.30)$$

对如图 3.2.12(b) 所示仅含一个电压源的一端口电路, 其端口特性方程为

$$u = u_S \quad (3.2.31)$$

显然, 当  $u_S = u_{S1} + u_{S2}$  时两个一端口电路互为

等效。由此可以得出下述结论: 两个电压分别为  $u_{S1}$ 、 $u_{S2}$  的电压源的串联组合等效于一个电压为  $u_S = u_{S1} + u_{S2}$  的电压源; 一个电压为  $u_S$  的电压源可以分解为两个电压源的串联, 两个电压源的电压满足  $u_S = u_{S1} + u_{S2}$ 。对多个电压源的串联, 可以得到类似的结论。

##### (2) 电流源的串联

两个电流大小相等且方向一致的电流源可以串联在一起形成一个一端口电路, 如

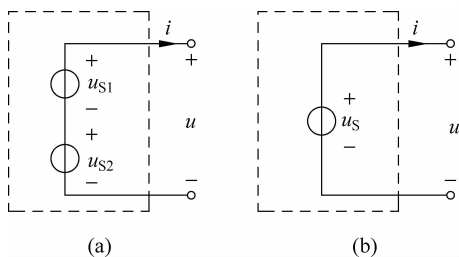


图 3.2.12 电压源的串联及其等效

图 3.2.13(a)所示。具有不同电流或方向相反的电流源是不允许串联连接的,因为这种情况不满足 KCL。

对图 3.2.13(a)所示的一端口电路,其端口特性方程为

$$i = i_s \quad (3.2.32)$$

图 3.2.13(b)所示的一端口电路由一个电流源构成,其端口特性方程为

$$i = i_s \quad (3.2.33)$$

比较式(3.2.32)和式(3.2.33)可得出下述结论:两个电流同为  $i_s$  的电流源的串联等效于

一个电流为  $i_s$  的单一电流源;一个电流为  $i_s$  的单一电流源可分解为两个电流同为  $i_s$  的电流源的串联组合。对多个电流相同的电流源的串联,可以得到类似的结论。

### (3) 电压源与电流源的串联

电压源和电流源可以串联连接,如图 3.2.14(a)所示。由 KCL 可知,其端电流等于电流源的端电流;由 KVL 可知,端口电压  $u$  可取任意值。因此该一端口电路的口特性方程为

$$i = i_s \quad (3.2.34)$$

显然,该电路可以用图 3.2.14(b)所示的单个电流源来等效,电流源的电流为  $i_s$ 。对多个电压源和多个电流大小相等且方向相同的电流源的串联,可以得到同样的结论。

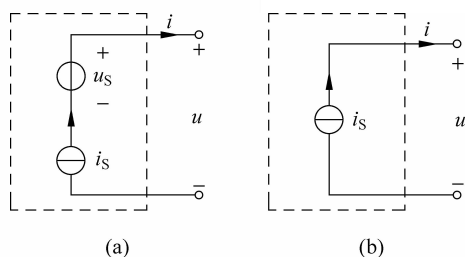


图 3.2.14 电压源和电流源的串联及其等效

### (4) 电压源的并联

只有端口电压大小相等且方向相同的两个电压源才可并联在一起形成一个一端口电路,如图 3.2.15(a)所示。具有不同电压或方向相反的电压源是不允许并联连接的,因为这种情况不满足 KVL。和上面的讨论类似,可以得出如下结论:图 3.2.15(a)所示的一端口电路可用如图 3.2.15(b)所示的一个电压为  $u_s$  的电压源来等效。与之相反,一个电压为  $u_s$  的电压源可以分解为两个电压为  $u_s$  的电压源的并联组合。对多个端口电压大小相等且方向相同的电压源的并联,可以得到类似的结论。

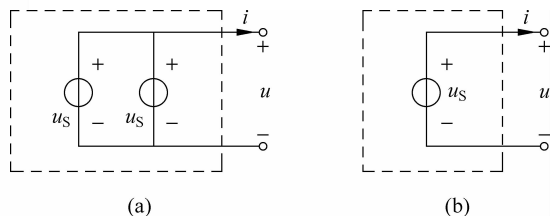


图 3.2.15 电压源的并联及其等效