第 0 章 导　　言

0.1 什么是数学实验

数学实验，概括地说是一种以实际问题为载体，以计算机为工具，以数学软件为平台，以学生为主体，借助教师辅导而完成的数学实践活动.

1. 以实际问题为载体

实验的直接目的是为了解决实际问题，所以它以解决实际问题为主线，每个实验都围绕某个实际问题展开，通过实际问题的分析和解决来学习数学知识以及培养用数学知识解决实际问题的意识和能力.

2. 以计算机为工具

用数学知识解决实际问题当然离不开数值计算，而计算机最强大的功能恰恰是高速、快捷的计算，所以计算机为我们提供便捷的计算工具，使我们摆脱繁重计算工作的困扰.

3. 以数学软件为平台

要使计算机充分发挥特长，科学的软件是必不可少的，利用它可以使计算机资源发挥更好的作用，从而避免低水平的重复劳动.

4. 以学生为主体

数学实验既然是实验，就要求学生多动手、多上机、勤思考、少讲多练，在老师指导下探索建立模型解决实际问题的方法，在失败与成功中获得真知，在实践中发挥聪明才智.

例 1　演示曲面的法线(以旋转曲面为例).

分析　要完成该问题可分两步进行：(1)首先画出旋转曲面的图形；(2)在旋转曲面上画法线.

实验步骤

(1) 设计拟画法线的旋转曲面的方程，即确定旋转曲面的方程(实际是确定旋转曲面的母线方程)；

(2) 找到实现目的的 MATLAB 语句：作旋转曲面图的函数是 `cylinder`；作曲面上法线的函数是 `surfnorm`.

寻找方法：查阅书籍；通过 MATLAB 帮助文件；通过上网查询或上网寻求帮助.

(3) 使用 MATLAB 的帮助系统，查询用法并实验，练习掌握(主要掌握各个参数的不同含义和功能)之后可完成本题.

可书写程序如下：

```
y = -1:0.1:1;x = 5 * cos(asin(y));                % 定出旋转曲面的“母线”
[X,Y,Z] = cylinder(x,20);                        % 形成旋转曲面
surfnorm(X(:,1:21),Y(:,1:21),Z(:,1:21));         % 在旋转曲面上画法线
view([120,18])                                   % 控制观察角
```

(4) 运行可看到图形，见图 0.1.1.

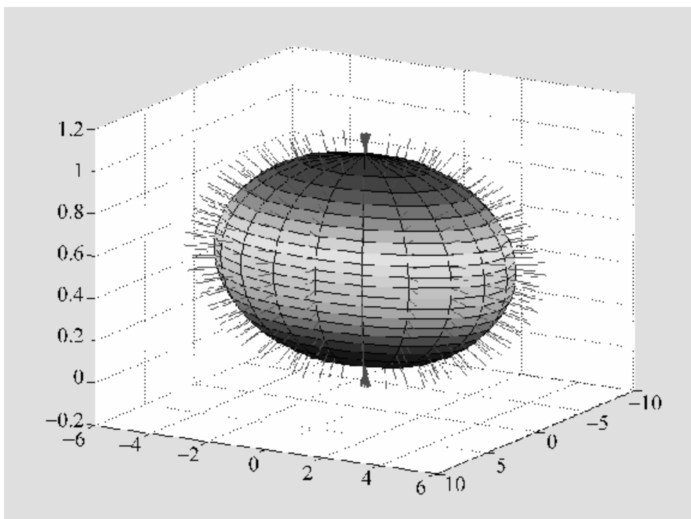

图 0.1.1　旋转曲面的法线

(5) 通过改变母线形状、画法线的选取点和观察视角来观察图形的变化，以取得对该问题的深层次理解.

思考　我们知道曲面上点的法线也可以通过曲面方程的偏导数求出来，现在已经用现成的命令绘制出了曲面的法线，能否用我们熟悉的方法来绘制曲面的法线呢？如果经过我们自己的努力实现此目的，将两者比较分析，岂不美哉！如果没能实现，思考为什么，找出症结所在，并设法解决. 如果解决了，很好！如果没能解决，再找原因，再设法解决. 依此类推，就这样进行思考——实验——再思考——再实验的培养技能过程. 如果最后圆满解决，则真正理解了数学实验的涵义，同时也了解了 MATLAB 语言关于该命令的核心算法，并能深刻体会 MATLAB 的简捷高效性.

0.2　开设数学实验的原因和目的

1. 引导学生进入自己体验数学、了解数学、学习数学的境界

长久以来，数学一直被认为是一门高度抽象的学科. 对大多数人来说，无论是研究数学还是学习数学，都是从公理体系出发，沿着“定义——定理——证明——推论”这样一条逻辑演绎的道路行进. 公理化体系的建立，充分展示了数学的高度抽象性和严谨的逻辑性，使数学成为有别于其他自然科学的独树一帜的科学领域. 但是，在完美的公理化体系的包装下，数学家们发现问题、处理问题、解决问题的思维轨迹往往被掩盖了. 在学习中，常常有学生问：“当初的数学家是怎样想到这个问题的？他们是怎样发现证明的方法的？”事实上，理性的认识以感性认识为基础，数学的抽象来源于对具体数学现象的归纳和总结. 因此，通过开设数学实验，可使学生采用归纳的方法和实验的手段来学习和理解数学，进入自己体验数学、了解数学、学习数学的境界.

2. 培养学生应用数学解决实际问题的素质和能力

21 世纪，各个学科的发展正走向“数学化”，数学的应用正走向“普及化”，因此，如何加强“用数学”的教育，培养学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力，已经成为当前大学数学教育的重要课题. 因此，通过开设数学实验，要使学生在自己动手、动脑理解数学概念和定理、解决一些实际问题的实验过程中，学会应用数学的方法和过程，逐渐提高应用数学的意识和能力，为更广泛更深入的数学应用打下坚实的基础.

3. 培养学生学习数学的兴趣和积极性，促成数学教学的良性循环

长期以来，内容多、负担重、枯燥乏味、学生学习积极性不高，一直困扰着大学数学教育工作者，与此形成鲜明对照的是受大环境支配的计算机热. 由同学自己动手，用他们熟悉的、喜欢“玩”的计算机去理解数学中的抽象概念和结论，去解决几个经过简化的实际问题，让学生亲身感受到学习数学及应用所学的数学知识解决实际问题的“酸甜苦辣”.“做然后知不足”，在培养学生独立解决问题的能力的同时，也激发了他们进一步学好数学的兴趣和积极性，因此，开设数学实验可以促成数学教育的良性循环.

0.3　怎样做数学实验

为了做好数学实验，建议实验者遵循如下步骤：

（1）明确所提出的需要研究和解决的实际问题，这是进行实验的直接目的，也是进行实验的主线.

（2）设计一定的实验方式对所提出的问题进行观察和分析. 如：建立实际问题的数学模型，计算并列出各种实验数据，画出函数曲线进行观察、比较和思考，进行必要的公式

演算和推导，等等. 这一实验步骤往往要借助计算机作为实验辅助工具，它是做好实验的基础.

（3）在完成上述步骤的过程中，努力发现问题的规律，并且对实验结果和规律性给出尽可能清晰的描述，同时提出你自己的猜想或见解.

（4）通过数学的分析或证明（有时也借助计算机），给出支持你所获结论的论证.

（5）总结全过程，写出实验报告.

同时，为了达到我们预期的目标，请实验者尽量做到以下几点：

（1）要将动手、动脑结合起来，通过认真的思考设计出实验方式，再根据现有的实验结果进行深入的思考，然后再设计出实验方式，数学实验就是思考——实验——再思考——再实验的循环往复过程，最后直至问题完全解决（至少自己比较满意）. 当然，通常思考和实验并没有明显的界限，往往是实验中有思考，思考中有实验.

（2）在实验中，要对给出的数学现象进行认真的观察和研究，发现一些值得思考的问题，甚至是某些困惑或怀疑，这是实验的关键环节.

（3）发现问题之后，不等、不靠，要通过自己的分析思考和实验最终使问题得到解决. 实验者应该学习、体会和掌握的是探索和发现数学规律的方法和过程以及解决实际问题的过程与步骤.

第 1 章 理解与计算实验

1.1 函数的极限

1.1.1 引

1. 问题：老张在银行存入 1000 元，复利率为每年 10%，分别以按年结算和按连续复利结算两种方式计算 10 年后老张在银行的存款额.（注：按复利计算，若每年结算 m 次，则每个结算周期的复利率为 r/m，r 为年利率.）

2. 分析：令 P_n 表示 n 年后的存款额，r 表示年利率，用 P 表示本金，则

（1）按年结算，$P_{10}=P(1+r)^{10}$；

（2）按复利结算，设每年结算 m 次，则每个结算周期的复利率为 r/m，所以 10 年后的存款额为 $P\left(1+\dfrac{r}{m}\right)^{10m}$，而我们所说的是按连续复利计算，即一年结算无数次，所以按连续复利计算的 10 年后的存款额应为 $P_{10}=\lim\limits_{m\to\infty}P\left(1+\dfrac{r}{m}\right)^{10m}$.

3. 问题的解决：由上述分析可知，第一种结算方式比较容易计算，只要将表达式输入并代入具体的数值，即可得到结果；第二种结算方式需要计算极限.本节重点进行与极限相关的实验.

1.1.2 实验目的

1. 掌握用 MATLAB 软件求函数极限的方法.
2. 理解函数极限的概念.
3. 解决“引”中的实际问题.

1.1.3 相关的知识内容

1. MATLAB 用来求极限的命令

在 MATLAB 中求数列和函数极限的命令主要是 `limit`，其相应的格式与功能见表 1.1.1.

注 （1）`limit` 命令中的极限变量必须是符号形式的变量，使用前需要先定义.

(2) 经常要用到一个重要的常量——无穷大,在 MATLAB 中用 `inf` 表示.

(3) 在 MATLAB 中用 `NaN` 表示不存在.

表 1.1.1 MATLAB 计算极限命令功能表

数学运算	MATLAB 命令
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$	`limit(f)`
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	`limit(f,x,a)`或 `limit(f,a)`(只有一个变量的时候)
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$	`limit(f,x,a,'left')`
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$	`limit(f,x,a,'right')`

例 1.1.1 计算$\lim\limits_{x\to 0} e^{-x}$的值.

解 输入语句

```
syms x;              % 将 x 定义成符号变量
limit(exp(-x))       % 计算 lim(x→0) e^(-x) 的值
```

得结果 ans =1,如再输入语句

```
f = abs(x)/x;        % 定义要计算极限的函数为 f=|x|/x
limit(f,x,0)         % 求当 x→0 时 f 的极限
```

得结果 ans =NaN,结果表明极限不存在.

注 如果要了解 `limit` 函数的详细信息,请查阅帮助文件,只要输入 `help limit` 命令即可.

例 1.1.2 求 $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$.

解 如果在草纸上求该极限,过程如下:

(1) 先通分得 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x+1-3}{x^3+1}$;

(2) 再约分 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-2}{x^2-x+1}$;

(3) 最后算出结果为-1.

下面用计算机计算,输入命令

```
syms x;f = 1/(x + 1) - 3/(x^3 + 1);limit(f,x, - 1)
```

得结果 ans = - 1.

画出函数图形:

```
ezplot(f,[-6,6]);hold on;x = linspace(-6,6,100);
y = linspace(-6,6,100);
plot(x,-1,-1,y)
```

结果如图 1.1.1.

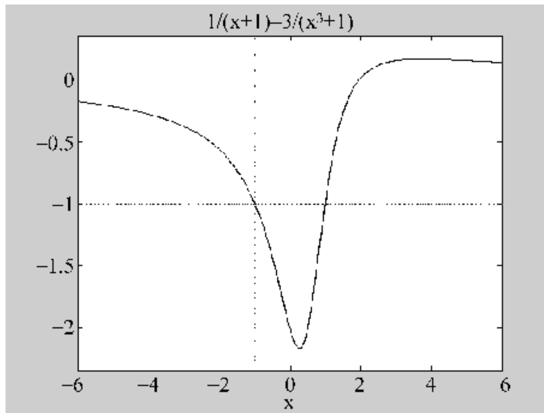

图 1.1.1 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}$的图形

注 (1) 语句中 ezplot 命令是符号函数特有的绘图函数,“,”前面的是函数值符号变量,后面的是所画图形的自变量的取值范围. 要了解它的详细内容,请查阅帮助文件.

(2) hold 是一个开关命令,如果输入并运行了命令 hold on,则在其之后运行的绘图命令将在最近的图形上作图,直到遇到 hold off 命令为止,如果输入并运行了命令 hold off,则在其之后运行的绘图命令将在空白图上作图,直到遇到 hold on 命令为止.

例 1.1.3 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

解 输入命令

```
syms x;limit(((x + 1)/(x - 1))^x,x,inf)
```

运行得结果 `ans = exp(2)`.

注 第一个语句用来说明自变量是符号变量,在应用时,如果在一个工作空间中要求很多函数的极限,而这些函数的自变量都可用 x 表示,则只说明一次即可. 这里的例题所输入的语句是完整的解题语句.

例 1.1.4 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$.

解 输入命令

```
syms x;limit(x^x,x,0,'right')
```

得到结果 ans = 1.

练习 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$； (3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$；

(4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$； (5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{4x^2-7x+1}$； (6) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}$.

2. 理解函数极限的概念

数列$\{x_n\}$收敛或有极限是指当 n 无限增大时，x_n 与某常数无限接近或 x_n 趋向于某一定值.就图形而言，也就是其点列以某一平行于 y 轴的直线为渐近线.

例 1.1.5 观察数列$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$当 $n\to\infty$时的变化趋势.

解 输入命令

```
n=1:100;xn=n./(n+1)                 % 取出数列的前 100 项
```

从这前 100 项(这些项的数值略，读者可以在运行结果中看到)看出，随着 n 的增大，$\dfrac{n}{n+1}$越来越大，而且越来越接近 1，但始终没有超过 1.画出$\{x_n\}$的图形，为此输入语句

```
plot(n,xn,'k')
```

为了更好地看出变化趋势，可以将 n 取得再大一些，图 1.1.2 是 $n=400$ 时，即取出前 400 项观察其趋势的曲线图.

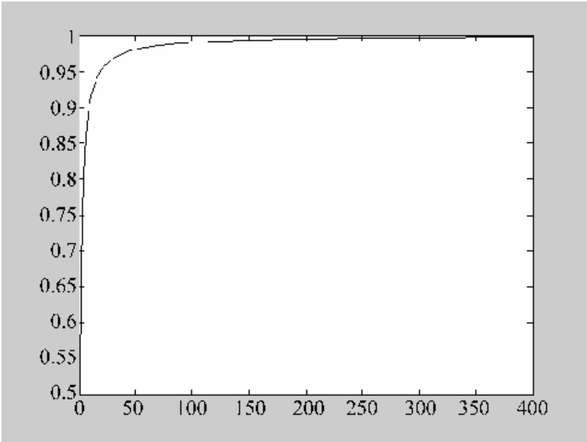

图 1.1.2 数列$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$的曲线图

因为我们考察的是数列，理想的图形是点列图，怎样才能画出点列图呢？可以采用如下方法：在最后一个语句的引号中加入“.”，即将语句改为 plot(n,xn,'k.').试试看，观察图形并解释其原因.还有其他方法吗？

由图 1.1.2 可以看出，随着 n 的增大，点列与直线 $y=1$ 无限接近，因此可得结论：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

再用求极限语句

```
syms n;limit(n/(n+1),n,+inf)
```

求其极限，也得到结果 ans =1.

关于函数的极限概念，也可用上述方法理解.

例 1.1.6 分析函数 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的变化趋势.

解 画出函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的图形.

```
x = -1:0.001:1;y = x.*sin(1./x);plot(x,y)
```

运行结果见图 1.1.3，从图形上看，$x\sin\dfrac{1}{x}$ 随着 $|x|$ 的减小，振幅越来越小且趋近于 0，频率越来越高作无限次振荡.再在图 1.1.3 上作出 $y=\pm x$ 的图像，

```
hold on;plot(x,x,x,-x)                %使用了 hold 开关项
```

运行结果见图 1.1.4.

求其极限

```
syms x;f = x*sin(1/x);
```

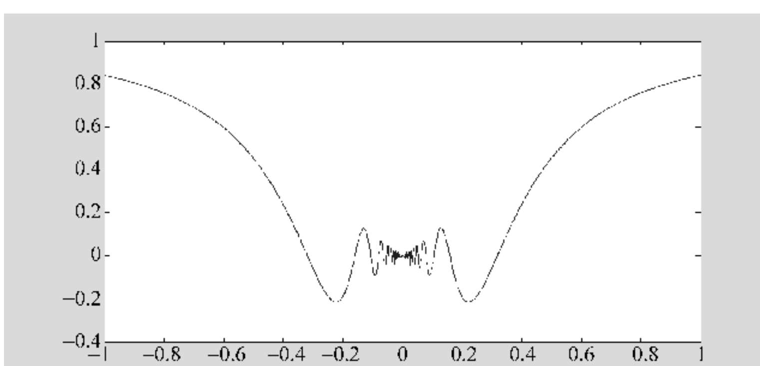

图 1.1.3 函数 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 的曲线图

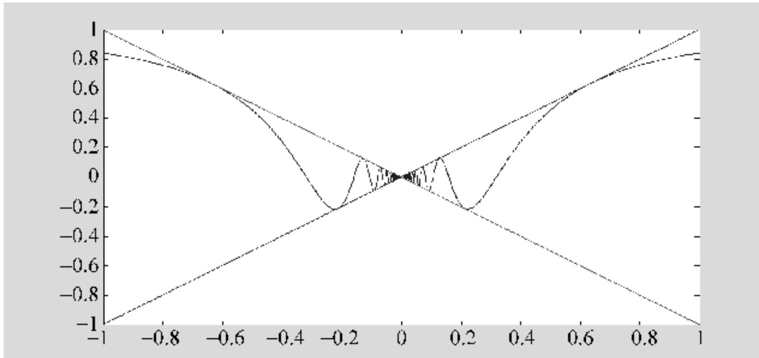

图 1.1.4 函数 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 的变化曲线图

```
limit(f)
```

得结果 `ans = 0`.

例 1.1.7 分析函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的变化趋势.

解 输入命令,作出函数图形(见图 1.1.5):

```
hold off;
x = -1:0.01:1;y = sin(1./x);
plot(x,y)
```

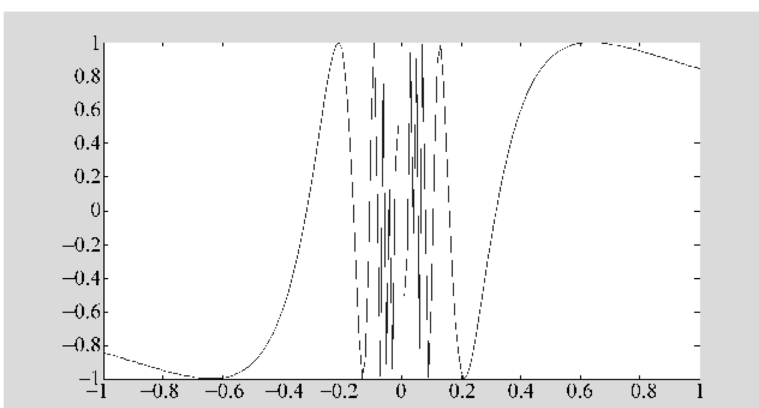

图 1.1.5 函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 的曲线图