

腐蚀和膨胀

形态学运算的目的在于抽取图像的相关结构,这些结构可通过其子图表示当作集合,这可利用称之为结构元素(SE)的已知形状的另一集合对图像进行探测实现。SE 的形状选择通常根据相关或非相关图像结构的几何先验知识确定,利用非相关结构,可以抑制想要去除的噪声或目标。

用于图像处理的形态学方法如图 3.1 所示,图 3.1(a)和(b)分别是二值和灰度图像,图 3.1(c)仅用于渲染目的:它表示图 3.1(b)的明暗阴影,用于增强其拓扑效果。结构元素如图 3.1(d)所示:圆形、六角形、正方形、钻石形(即正方形边倾斜 45°)、水平线段和点对。以垂直结构元素作为探针,可以抽取出二值和灰度图像中的垂直结构(如图 3.1(e))

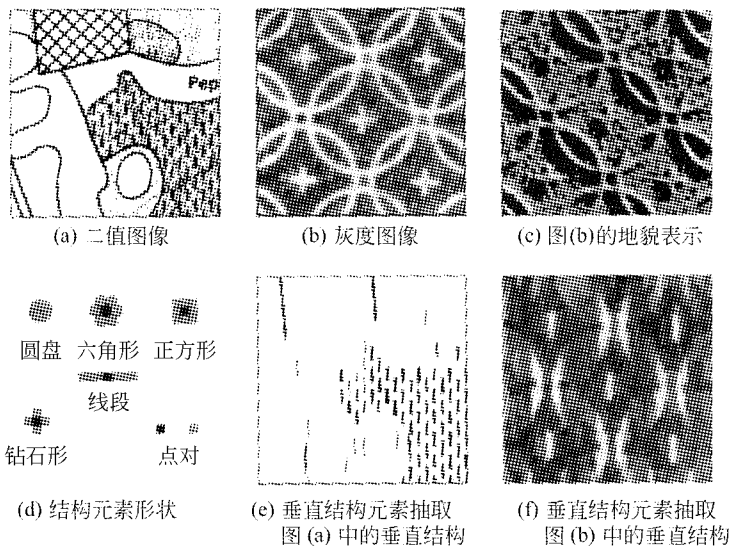


图 3.1 形态学图像处理方法: 二值和灰度图像均当作集合,另一称为结构元素的已知集合用于探测图像,并突出与其具有相似形状的结构

和(f))所示,这个例子中使用了形态学的两个基本运算组合:腐蚀和膨胀。这两种对偶运算好比形态学字母表中的字母,其他运算都可根据这两种运算表述。

本章内容组织如下:第3.1节详细介绍结构元素的概念;第3.2节和第3.3节分别描述腐蚀和膨胀;第3.4节概括了腐蚀和膨胀运算的一些性质,腐蚀/膨胀与其他一些图像变换如距离函数、Hausdorff距离、明克夫斯基运算、等级滤波器等将在第3.5节中讨论;第3.6节将介绍通过图顶点间的单邻域关系替代SE的形状概念将基本形态学运算扩展到一般图,通过主要处理独立的每一通道将其扩展到多通道图像;第3.7节介绍结构元素在实际中的应用;第3.8节阐述由腐蚀和膨胀简单组合的形态梯度运算;第3.9节概述一些算法;第3.10节给出了相关的文献注释和参考资料。

3.1 结构元素

结构元素是用于探测当前图像的一个小集合。由于 n 维图像的子图(subgraph)对应 $n+1$ 维集合,那么 $n+1$ 维结构元素可用于检测 n 维图像目标的形态。但为了避免混淆图像定义域上的空间单元与灰度级的强度单元,推荐使用 n 维结构元素(即图像定义域的子集)。后面提到的结构元素通常视为扁平结构元素,因为它在2-D图像情况下只有2维,相应地, $n+1$ 维结构元素被称作体、非扁平或灰度结构元素,它们用来探测当前图像的小灰度图像。利用扁平结构元素的运算,对于未知的灰度级尺度是可维的。也就是说,扁平结构元素不依赖图像灰度级。当利用非扁平结构元素时,它们的灰度值应与输入图像具有相同的单位和尺度。

形态学基础运算需要对每个结构元素定义一个原点,这个原点可使结构元素位于给定点或像素上:结构元素位于 x 点意味着其原点就是 x 。图3.2中给出了六角形和正方形同向扁平基本结构元素,从图中可以看出,在给定像素 p 点,与基本扁平结构元素相匹配的像素对应于图 ξ 中 p 的邻域加上像素 p 本身,即 $\bar{N}_\xi(p)$ 。注意,结构元素像素没有权值关系,因此,扁平结构元素完全由其空间范围定义,权值仅在非扁平元素中考虑,本书中形态学主要考虑扁平结构元素。

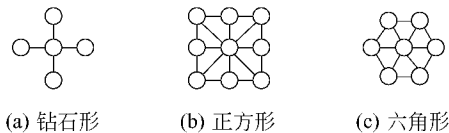


图3.2 基本扁平各向同性正方形和六角形结构元素(原点位于结构元素中心)

结构元素的形状和尺寸必须适合于待处理目标图像的几何性质,例如,线结构元素适合提取线形目标。图3.1(d)中已经给出了一些常见的结构元素,其他结构元素将在3.7节中介绍。

3.2 腐 蚀

当利用结构元素探测集合时,第1个出现的问题是“结构元素能否填入这个集合”,腐蚀集合是肯定地回答这个问题的轨迹点,当前集合表示二值图像目标或灰度图像的子图。

利用结构元素 B 对集合 X 的腐蚀表示为 $\epsilon_B(X)$, 其定义为当 B 的原点在 x , B 包含于 X 内的 x 的所有轨迹点:

$$\epsilon_B(X) = \{x \mid B_x \subseteq X\} \quad (3.1)$$

图 3.3 给出了 2-D 集合的例子, 公式(3.1)可根据集合平移的交集进行如下重写, 其中所有平移由 SE 确定:

$$\epsilon_B(X) = \bigcap_{b \in B} X_{-b}$$

后一种定义可直接扩展到二值或灰度级图像: 利用结构元素 B 对图像 f 的腐蚀表示为 $\epsilon_B(f)$, 其定义为以 B 的矢量 $-b$ 平移 f 的极小值:

$$\epsilon_B(f) = \bigwedge_{b \in B} f_{-b} \quad (3.2)$$

因此, 给定像素点的腐蚀值为图像中由结构元素定义的窗口内图像的极小值, 结构元素原点位于 x :

$$[\epsilon_B(f)](x) = \min_{b \in B} f(x+b) \quad (3.3)$$

这个等式提供了原始的腐蚀计算方法, 更多的有效方法将在第 3.9 节中详细介绍。

依据图像平移交集的腐蚀结果如图 3.4 所示, 其中结构元素为 3 像素的线段, 中间像素是其原点。注意通过简单将集合 X 用灰度图像 f 的子图替代, 公式(3.1)也可用于灰度图像:

$$\epsilon_B[SG(f)] = \{(x, t) \mid B_{(x, t)} \subseteq SG(f)\}$$

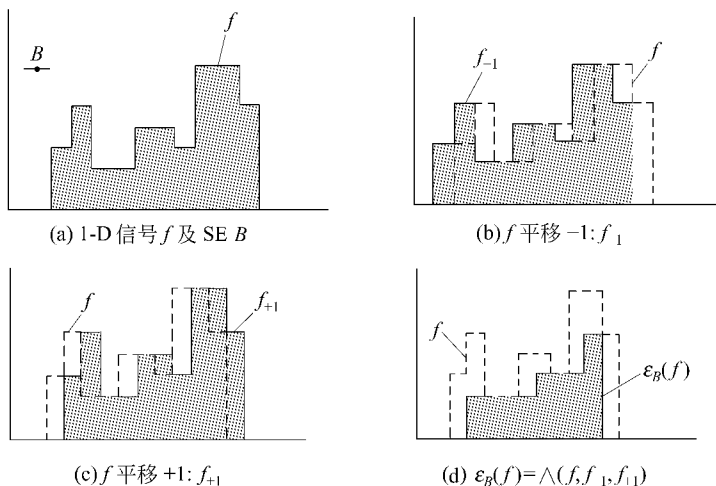


图 3.4 1-D 信号腐蚀: 结构元素定义的 3 种平移: f 、 f_{-1} 和 f_{+1} , B 对 f 的腐蚀 ϵ 因此等于这 3 幅图像间的逐点极小值(公式(3.2)), 给定像素的腐蚀值对应于原点在中心的 SE 所定义的邻域内的图像最小值(公式(3.3))

二值和灰度图像的腐蚀实例如图 3.5 所示, 图中被腐蚀的垂直条形目标缩为一些点, 因为结构元素中心位于这些点时可填入其对应的条形目标。连接顶部和底部图像边缘的条形目标没有像位于图像内部的那样被腐蚀, 因为已假设图像定义域外的值为 $t_{\max}$, 这是

一种腐蚀图像时消除边缘效应的常用方法(参见腐蚀的局部知识性质)。

非扁平结构元素在其定义域上的每一点具有灰度值,利用非扁平结构元素 B_0 的腐蚀定义为:

$$[\varepsilon_{B_0}(f)](x) = \min_{b \in D_{B_0}} \{f(x+b) - B_0(b)\}$$

体结构元素的灰度权值应置为图像强度值,由于难以满足这个条件和需要减法而导致的额外计算,因此灰度结构元素很少在实际中应用。

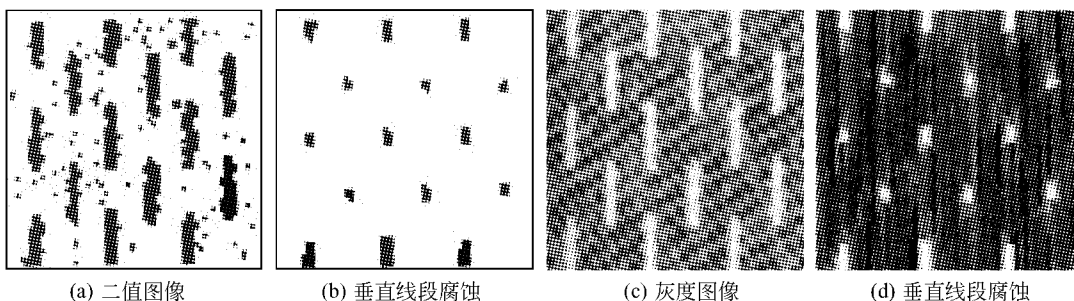


图 3.5 长度为 13 像素、原点位于中心的垂直线段对二值和灰度图像的腐蚀

3.3 膨胀

膨胀是腐蚀的对偶运算,是基于“结构元素是否击中集合?”这一问题提出来的,膨胀集合是肯定地回答这个问题的轨迹点。

利用结构元素 B 对集合 X 进行膨胀表示为 $\delta_B(X)$,其定义为当结构元素原点在 x ,结构元素 B 击中集合 X 的 x 的轨迹点:

$$\delta_B(X) = \{x \mid B_x \cap X \neq \emptyset\} \quad (3.4)$$

图 3.6 为圆形结构元素的膨胀实例。注意单一像素 x 的膨胀输出为结构元素的映射, x 为中心点: $\delta_B(x) = \tilde{B}_x$ 。公式(3.4)可依据集合平移的并集重写如下,其中平移由 SE 确定:

$$\delta_B(X) = \bigcup_{b \in B} X_{-b}$$

后一种定义可直接扩展到二值或灰度级图像:利用结构元素 B 对图像 f 的膨胀可以表示为 $\delta_B(f)$,其定义为以 B 的矢量 $-b$ 平移 f 的极大值:

$$\delta_B(f) = \bigvee_{b \in B} f_{-b} \quad (3.5)$$

换句话说,给定像素点 x 的膨胀值为图像中由结构元素定义的窗口内图像的极大值,且结构元素原点位于 x :

$$[\delta_B(f)](x) = \max_{b \in B} f(x+b) \quad (3.6)$$

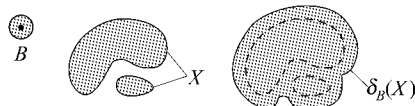


图 3.6 圆形结构元素 B 对集合 X 膨胀: X 的两个连通成分连为一体,当 B 位于颗粒间隔时 B 始终击中 X

图 3.7 为 1-D 信号的膨胀,图 3.8 给出了二值和灰度图像的膨胀实例,注意当线结构元素位于两线段之间时,要求结构元素足够长以击中灰线中的线段,这就是为什么膨胀后图像中的间隙被全部填充的原因。

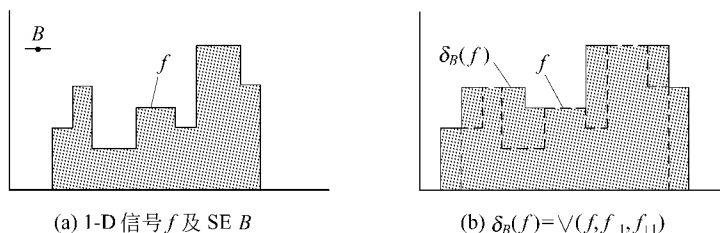


图 3.7 膨胀表示为一系列图像平移的逐点极大值(连续图像平移如图 3.4 所示),当 SE 中心位于某一像素时,该像素的膨胀值对应于 SE 所定义邻域内图像的最大值,注意以下等式也同样成立:

$$\delta_B[SG(f)] = \{(x, t) | B_{(x, t)} \cap SG(f) \neq \emptyset\}$$

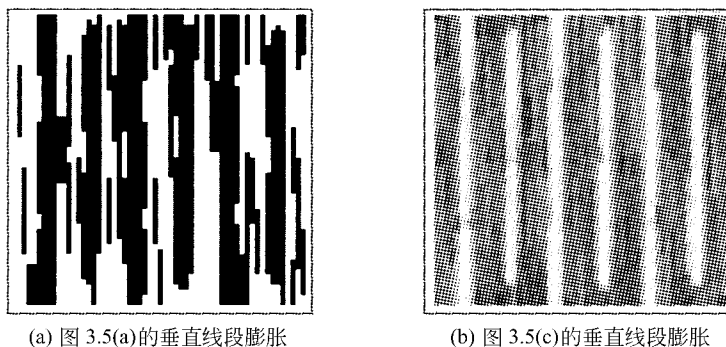


图 3.8 长度 13 像素原点位于中心的垂直线段对二值和灰度图像的膨胀(输入图像分别如图 3.5(a)和(c)所示),所计算的膨胀是假定图像定义域外的值为 0

若 nB 表示尺度为 n 的结构元素,即结构元素 B 被其映像 $\tilde{B}$ (参见式 2.8 中 $\tilde{B}$ 的定义)膨胀 $n-1$ 次:

$$nB = \delta_B^{(n-1)}(B) \quad (3.7)$$

其中 $n \geq 2$, B 为凸边形,而 nB 是以 n 为参数 B 的尺度扩展。图 3.9 中给出了基本三

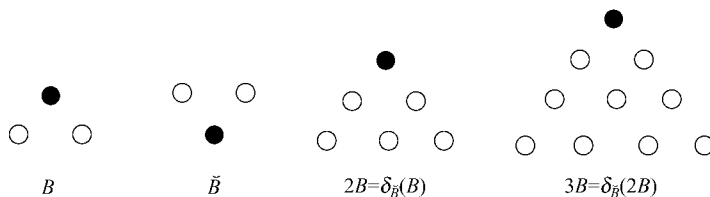


图 3.9 基本三角形结构元素 B 及其映像 $\tilde{B}$,对应尺度为 2 和 3 的结构元素是通过 1 次 B 膨胀和 2 次 $\tilde{B}$ 膨胀得到的

角形结构元素及其对应尺度为 2 和 3 的三角形元素结构。

利用非扁平结构元素 B_v 的膨胀定义为:

$$[\delta_{B_v}(f)](x) = \max_{b \in D_{B_v}} \{f(x+b) + B_v(b)\}$$

不同于扁平结构元素的膨胀或腐蚀,利用非扁平结构元素的灰度图像膨胀或腐蚀值不限于输入图像灰度值的极大值或极小值,特别是非扁平结构元素的腐蚀结果可能为负整数。

3.4 性 质

对偶性(Duality)

膨胀和腐蚀相对于补集是对偶变换:

$$\epsilon_B = C\delta_B C$$

这就是说,图像腐蚀等价于该图像被同一结构元素膨胀的补(反之亦然)。对偶性可描述如下:

$$\begin{aligned}\delta_B(f^c) &= \bigvee_{b \in B} [t_{\max} - f_{-b}] \\ &= t_{\max} - \bigwedge_{b \in B} [f_{-b}] \\ &= t_{\max} - \epsilon_B(f) \\ &= [\epsilon_B(f)]^c\end{aligned}$$

对偶性揭示了腐蚀和膨胀不能对称处理图像目标及其背景:腐蚀收缩图像目标而扩张背景(膨胀则相反)。实际上,腐蚀和膨胀不是自对偶变换,而且腐蚀和膨胀不存在逆变换,这两种变换均无法保持输入图像的同伦性。

递增性(Increasingness)

腐蚀和膨胀对平移具有不变性,同时也保持了图像的顺序关系,即它们均为递增变换。

$$f \leq g \Rightarrow \begin{cases} \epsilon(f) \leq \epsilon(g) \\ \delta(f) \leq \delta(g) \end{cases}$$

利用这一性质,扁平结构元素的灰度图像腐蚀和膨胀可表示为二值图像变换之和。实际上,腐蚀和膨胀的递增性质意味着图像连续截面间的顺序关系被这些运算所保持。举例来说,对于所有 $i \geq j$, $\epsilon CS_i \subseteq \epsilon CS_j$, 因此,截面变换后的累加仍然为图像的子图。换句话说,扁平结构元素的膨胀和腐蚀对阈值分解是不变的,因此属于平面运算类型:

$$\begin{aligned}\epsilon_B &= \sum_{t=1}^{t_{\max}} \epsilon_B CS_t \\ \delta_B &= \sum_{t=1}^{t_{\max}} \delta_B CS_t\end{aligned}$$

非扁平结构元素腐蚀和膨胀是递增性运算,对于阈值分解具有非不变性,也就是说它们是非扁平运算。

分配律(Distributivity)

腐蚀满足逐点极大运算 $\vee$ 的分配律,而膨胀满足逐点极小运算 $\wedge$ 的分配律:

$$\delta(\bigvee_i f_i) = \bigvee_i \delta(f_i)$$

$$\epsilon(\bigwedge_i f_i) = \bigwedge_i \epsilon(f_i)$$

例如,对两幅图像的逐点极大值膨胀可通过同一结构元素对图像逐点极大值的单一膨胀得到,这可以提高运算速度。

结合性(Composition)

下面两个等式给出了膨胀和腐蚀的结合性:

$$\delta_{B_2} \delta_{B_1} = \delta_{(\widetilde{B_2} B_1)} \quad (3.8)$$

$$\epsilon_{B_2} \epsilon_{B_1} = \epsilon_{(\widetilde{B_2} B_1)} \quad (3.9)$$

这两个性质在实际中非常有用,因为可以利用这两个性质把大结构元素形态学运算分解为一系列小结构元素的运算,例如,利用尺度为 n 的结构元素进行膨胀或腐蚀运算等价于利用对应尺度为 1 的结构元素对图像进行 n 次膨胀或腐蚀: $\delta_{nB} = \delta_B^{(n)}$

图 3.10 中展示了利用尺度为 n 的正方形结构元素的腐蚀图像,等价于先利用尺度为 n 的水平结构元素进行腐蚀,然后利用尺度为 n 的垂直结构元素腐蚀图像。这意味着相比分解方法,每像素需要 $2(n-1)$ 次运算,不分解则需 n^2-1 次运算,即运算复杂度分别为 $o(n)$ 和 $o(n^2)$ 。实际上,当结构元素原点与像素一致时,计算腐蚀和膨胀的基本运算在于搜索图像像素极大或极小值落入结构元素内的每个像素(见公式(3.3)和公式(3.6))。

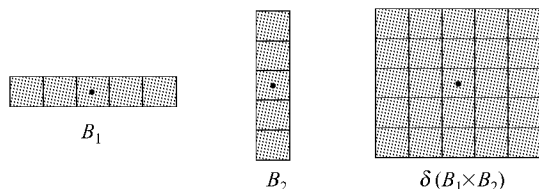


图 3.10 利用水平结构元素先膨胀(或腐蚀)后利用相同长度垂直结构元素的膨胀(或腐蚀)等于利用正方形结构元素的膨胀(或腐蚀),见公式(3.8)(或公式(3.9))

分解性质对于硬件实现同样重要,其中邻域尺度是固定的(例如:快速 3×3 邻域处理),通过层叠结构元素运算,可得到大尺度邻域。例如:宽度为 $2n+1$ 像素的正方形结构元素腐蚀等价于 n 次 3×3 正方形结构元素的连续腐蚀。

顺序关系(Ordering relations)

腐蚀小于等于相同结构元素的膨胀: $\epsilon_B \leq \delta_B$,但膨胀不是扩展运算而腐蚀不是非扩展运算,如图 3.11 所示利用不包括原点结构元素(如图 3.11(c)所示)的腐蚀图像(如图

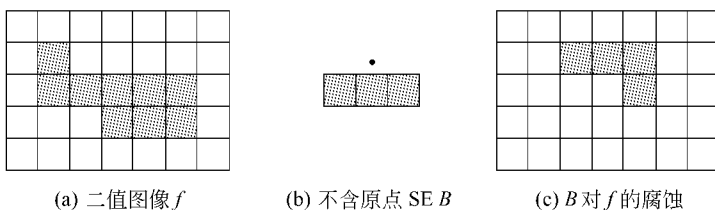


图 3.11 利用不包括原点的结构元素腐蚀图像:结构元素为 3 像素水平线段,原点位于线段中间上方(图(b)中的黑点),腐蚀后的图像不包括于原始图像

3.11(b)所示)不包含在原始图像中(如图 3.11(a)所示)。但是,如果结构元素 B 包含原点,则有以下顺序关系:

$$\epsilon_B \leq \text{id} \leq \delta_B \Leftrightarrow B \text{ 包含其原点。}$$

局部知识(Local knowledge)

现在对膨胀和腐蚀的局部知识性质加以评价,当结构元素可完全填入图像定义域内时,则运算结果确实可知,并且没有边缘效应。实际上,对与边界不相交的定义域的子集没有影响,只是定义域被当前结构元素腐蚀:

$$\epsilon_B(f | D_f) | \epsilon_B(D_f) = \epsilon_B(f) | \epsilon_B(D_f)$$

$$\delta_B(f | D_f) | \epsilon_B(D_f) = \delta_B(f) | \epsilon_B(D_f)$$

在图像上进行测量时,必须考虑这些公式。实际上,对于给定变换后的无偏测量必须严格限定在腐蚀的框架内。当处理图像时,图像的边界效应可通过假设图像平面外的特定值加以处理。比如:腐蚀时用 $t_{\max}$,而膨胀时为 0,这样做可避免在每一次形态学运算后的图像定义域收缩。例如,图 3.5(a)和图 3.5(c)与图像边界相连的垂直条没有从边界中被腐蚀,这是因为假设图像平面外的值置为 $t_{\max}$ (如图 3.5(b)和图(d)所示)。

可维性(Dimensionality)

膨胀的可维性取决于所用结构元素是否扁平,结果同样适用于腐蚀。

对于强度轴上的未知尺度 Δ_t ,扁平结构元素 B_f 的膨胀是可维的:

$$\Delta_t \delta_{B_f} = \delta_{B_f} \Delta_t$$

然而,对于强度轴上的未知尺度 Δ_t ,非扁平结构元素 B_v 的膨胀是不可维的,因为结构元素的灰度级必须具有相应的尺度:

$$\Delta_t \delta_{B_v} = \delta_{\Delta_t B_v} \Delta_t.$$

图 3.12 给出了非扁平结构元素和扁平结构元素腐蚀的偏差,图 3.12(a)和图 3.12(b)表明 $\Delta_t \epsilon_{B_v}$ 不等于 $\epsilon_{B_v} \Delta_t$,而图 3.12(c)和图 3.12(d)表明 $\Delta_t \epsilon_{B_f}$ 等价于 $\epsilon_{B_f} \Delta_t$ 。

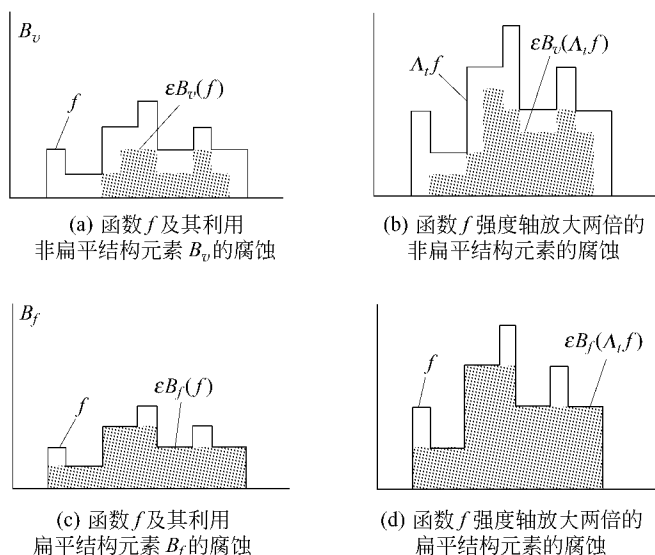


图 3.12 1-D 信号强度轴未知尺度的腐蚀和维: (a)和(b)采用非扁平结构元素,注意对负亮度的非扁平结构的腐蚀被置为 0; (c)和(d)采用扁平结构元素

对图像平面上的未知尺度 Λ_D , 同时利用扁平和非扁平结构元素的膨胀不可维:

$$\delta_B \Lambda_D \neq \Lambda_D \delta_B$$

实际上, 结构元素的尺度必须依据图像的扩大而进行设置:

$$\delta_{\Lambda_D B} \Lambda_D = \Lambda_D \delta_B$$

3.5 与其他变换的关联

在一般图像处理中, 腐蚀和膨胀与其他已知的变换紧密关联。本节重点强调 4 种关联关系: 依据腐蚀的距离函数、基于膨胀的 Hausdorff 距离、明克夫斯基加(或减)作为膨胀(或腐蚀)以及基于膨胀和腐蚀的等级滤波实例。

3.5.1 距离函数

利用尺度为 n 的钻石形 $\blacklozenge$ 或正方形 $\blacksquare$ 对集合 X 的基本腐蚀, 等价于 X 上对应距离函数的所有阈值都严格大于 n :

$$\epsilon_{\blacklozenge}^{(n)}(X) = \{x \in X \mid D_4(x) > n\} = T_{[n+1, t_{\max}]}[D_4(X)]$$

$$\epsilon_{\blacksquare}^{(n)}(X) = \{x \in X \mid D_8(x) > n\} = T_{[n+1, t_{\max}]}[D_8(X)]$$

如图 3.13 所示的城市距离可说明这种关系, 形态学运算可利用这个原理提高计算速度(参见第 3.9 节)。伪欧氏腐蚀, 即利用给定尺度圆盘结构元素的最优估计进行腐蚀, 可通过对有界欧氏距离函数进行阈值处理得到:

$$\epsilon_{\epsilon}^{(n)}(X) = \{x \in X \mid D_{\epsilon}(x) > n\} = T_{[n+1, t_{\max}]}[D_{\epsilon}(X)]$$

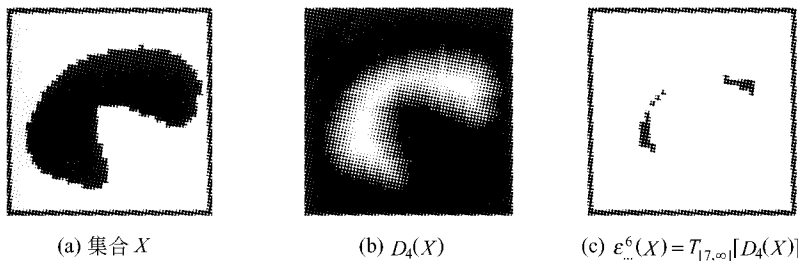


图 3.13 距离函数和腐蚀: 集合 X 被大小为 6 的钻石结构元素腐蚀可通过 X 上 4-连通距离 D 的阈值化得到

3.5.2 集合间的距离

在第 2.7 节中, 已经详细介绍了离散空间中点之间的距离概念, 两集合间的距离可利用 Hausdorff 距离概念定义。若 X 和 Y 表示两个集合, 则集合间的 Hausdorff 距离是半径 λ 圆盘结构元素 B 的最小值, 使得 B_{λ} 对 X 的膨胀包含 Y , B_{λ} 对 Y 的膨胀包含 X , Hausdorff 距离表示为 $d_H(X, Y)$:

$$d_H(X, Y) = \min\{\lambda \mid X \subseteq \delta_{B_{\lambda}}(Y), Y \subseteq \delta_{B_{\lambda}}(X)\}$$

其中 B_λ 表示圆盘半径 λ 。Hausdorff 距离对噪声敏感,在计算之前去除噪声十分重要。利用 Hausdorff 距离在大图像中匹配某一模式详见 (Huttenlocher 等人,1993),可作为一种校正选择方法。

3.5.3 明克夫斯基运算

集合 B 减去集合 X 的明克夫斯基运算是 X 以 B 的矢量平移后的交集,表示为 $\ominus$:

$$X \ominus B = \bigcap_{b \in B} X_b$$

注意与腐蚀定义(公式(3.1))相似,从后面的式子可以看出 $\epsilon_B(X) = X \ominus \check{B}$:

$$\epsilon_B(X) = \bigcap_{b \in B} X_{-b} = \bigcap_{-b \in B} X_b = \bigcap_{b \in \check{B}} X_b = X \ominus \check{B}$$

腐蚀因此等价于明克夫斯基差运算,当且仅当结构元素关于原点对称(即 $B = \check{B}$)。同样的方式适用于明克夫斯基加 $\oplus$:

$$X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b$$

因此 $\delta_B(X) = X \oplus \check{B}$ 。

本书中将沿用提出的定义和概念,但是值得一提的是有关膨胀、腐蚀和明克夫斯基差的概念和定义相当混乱。产生混乱的原因有两个方面:第一,尽管有腐蚀具有唯一的定义,但明克夫斯基差有两种不同的定义,对膨胀反之亦然;第二,同一符号被不同的使用者用来表示不同的运算,所有这些问题被概括在表 3.1 中。

表 3.1 利用结构元素 B 对集合 X 的基本形学变换及其与明克夫斯基运算之间的关系

变 换	定 义	公 式 化
明克夫斯基和	$\bigcup_{b \in B} X_b$	$X+B$ 或 $X \oplus B$
明克夫斯基差	$\bigcap_{b \in B} X_{-b}$	$X-B$ 或 $X \ominus B$
重新定义的明克夫斯基差 ^a	$\bigcap_{b \in B} X_b$	$X \ominus B$
腐蚀(第 1 种概念 ^b)	$\bigcap_{b \in B} X_{-b}$	$X \ominus B$ 或 $\epsilon_B(X)$
腐蚀(第 2 种概念 ^c)	同上	$X \ominus B$ 或 $\epsilon_B(X)$
膨胀(第 1 种概念 ^a)	$\bigcup_{b \in B} X_{-b}$	$X \oplus \check{B}$ 或 $\delta_B(X)$
膨胀(第 2 种概念)	$\bigcup_{b \in B} X_b$	$X \oplus B$ 或 $\delta_B(X)$

注: a : 本书已定义

b : 基于从新定义的明克夫斯基差且本书已定义

c : 基于原明克夫斯基差

从表中可以看出,我们采用重新定义的明克夫斯基差(腐蚀的第 1 种概念的集合)和膨胀的第 1 种定义。注意我们使用明克夫斯基差和明克夫斯基和仅仅是为了方便。例如,公式(3.7)可以重写为:

$$nB = (n-1)B \oplus B$$

其中 $1B=B$

3.5.4 等级滤波器

结构元素为 B 、等级为 k 的等级滤波器,其输出值可通过在落入当前以 SE 为中心按