第 3 章 一阶逻辑

3.1 一阶逻辑基本概念

3.1.1 命题逻辑的局限性

在命题逻辑中，命题是最基本的单位，对简单命题不再进行分解，并且不考虑命题之间的内在联系和数量关系. 因而命题逻辑具有局限性，甚至无法判断一些简单而常见的推理. 考虑下面的推理：

凡偶数都能被 2 整除.

6 是偶数.

所以，6 能被 2 整除.

这个推理是公认的数学中的正确推理，但在命题逻辑中却无法判断它的正确性. 因为在命题逻辑中只能将推理中出现的 3 个简单命题依次符号化为 p,q,r，将推理的形式结构符号化为

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

由于上式不是重言式，所以认为这个推理是错误的. 为了克服命题逻辑的局限性，就需要引入个体词、谓词和量词，以期达到表达出个体与总体的内在联系和数量关系，这就是**一阶逻辑**所研究的内容. 一阶逻辑也称**一阶谓词逻辑**或**谓词逻辑**.

3.1.2 个体词、谓词与量词

在一阶逻辑中，要求将简单的陈述句(可能是命题，也可能不是命题)细分成主语与谓语，对含变量 x 的 $P(x)$(暂称为命题函数)，还要讨论在什么情况下为真，在什么情况下为假，并且讨论在 x 的指定的取值范围内是否对所有的 x 均为真，或存在 x 使其为真等进行讨论，在讨论中有 3 个要素是必不可少的，这就是个体词、谓词与量词，有了这 3 个要素的概念之后，就可以讨论一阶逻辑中命题(可含命题变项)符号化的问题了.

1. 个体词

个体词是指所研究对象中可以独立存在的具体的或抽象的客体. 例如,小王,小李,中国,$\sqrt{2}$,3 等都可作为个体词. 将表示具体或特定的客体的个体词称作**个体常项**,一般用小写英文字母 $a,b,c,\cdots$表示,而将表示抽象或泛指的个体词称为**个体变项**,常用 $x,y,z,\cdots$表示. 并称个体变项的取值范围为**个体域**(或称**论域**). 个体域可以是有穷集合,例如,$\{1,2,3\}$,$\{a,b,c,d\}$,$\{a,b,c,\cdots,x,y,z\}$,$\cdots$,也可以是无穷集合. 例如,自然数集合 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$,实数集合 $\mathbf{R}=\{x|x$ 是实数$\}\cdots$. 有一个特殊的个体域,它是由宇宙间一切事物组成的,称为**全总个体域**. 本书在论述或推理中如无指明所采用的个体域,都是使用的全总个体域.

例如,在"5 是素数","$x>y$"中,5,素数,x,y 都是个体词,其中,5,素数是个体常项,x,y 均为个体变项.

2. 谓词

谓词是用来刻画个体词性质及个体词之间相互关系的词. 考虑下面 4 个命题(或命题变项):

(1) $\sqrt{2}$是无理数.

(2) x 是有理数.

(3) 小王与小李同岁.

(4) x 与 y 具有关系 L.

在(1)中,$\sqrt{2}$是个体常项,"……是无理数"是谓词,记为 F,并用 $F(\sqrt{2})$表示(1)中命题. 在(2)中,x 是个体变项,"……是有理数"是谓词,记为 G,用 $G(x)$表示(2)中命题. 在(3)中,小王,小李都是个体常项,"……与……同岁"是谓词,记为 H,则(3)中命题符号化形式为 $H(a,b)$,其中,a:小王,b:小李. 在(4)中,x,y 为两个个体变项,"……与……有关系 L"是谓词,符号化为 $L(x,y)$.

同个体词一样,谓词也有常项与变项之分. 表示具体性质或关系的谓词称为**谓词常项**,表示抽象的或泛指的性质或关系的谓词称为**谓词变项**. 无论是谓词常项或变项都用大写英文字母 $F,G,H,\cdots$表示,要根据上下文区分. 在上面 4 个命题中,(1),(2),(3)中谓词 F,G,H 是常项,而(4)中谓词 L 是变项. 一般地,用 $F(a)$表示个体常项 a 具有性质 F(F 是谓词常项或谓词变项),用 $F(x)$表示个体变项 x 具有性质 F. 而用 $F(a,b)$表示个体常项 a,b 具有关系 F,用 $F(x,y)$表示个体变项 x,y 具有关系 F. 更一般地,用 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$表示含 $n(n\geqslant 1)$个命题变项 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 元谓词,$n=1$ 时,$P(x_1)$表示 x_1 具有性质 P,$n\geqslant 2$ 时,$P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$表示 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 具有关系 P. 实质上,n 元谓词 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$可以看成以个体域为定义域,以$\{0,1\}$为值域的 n 元函数或关系. 它

不是命题.要想使它成为命题,必须用谓词常项取代 P,用个体常项 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 取代 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,得$P(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是命题,或加量词(见下文).

有时将不带个体变项的谓词称为**0 元谓词**,例如,$F(a)$,$G(a,b)$,$P(a_1,a_2,\cdots,a_n)$等都是 0 元谓词,当 F,G,P 为谓词常项时,0 元谓词为命题.这样一来,命题逻辑中的命题均可以表示成 0 元谓词,因而可将命题看成特殊的谓词.

例 3.1 将下列命题在一阶逻辑中用 0 元谓词符号化,并讨论它们的真值.

(1) 只有 2 是素数,4 才是素数.

(2) 如果 5 大于 4,则 4 大于 6.

解 (1) 设 1 元谓词 $F(x)$:x 是素数.a:2,b:4.(1)中命题符号化为 0 元谓词的蕴涵式

$$F(b) \rightarrow F(a)$$

由于此蕴涵前件为假,所以(1)中命题为真.

(2) 设 2 元谓词 $G(x,y)$:x 大于 y. a:4,b:5,c:6.$G(b,a)$,$G(a,c)$是两个 0 元谓词,把(2)中命题符号化为

$$G(b,a) \rightarrow G(a,c)$$

由于 $G(b,a)$为真,而 $G(a,c)$为假,所以(2)中命题为假.

3. 量词

有了个体词和谓词的概念之后,对有些命题来说,还是不能准确地符号化,原因是还缺少表示个体常项或变项之间数量关系的词.表示个体常项或变项之间数量关系的词称为**量词**.量词可分以下两种.

(1) **全称量词** 日常生活和数学中常用的“一切的”、“所有的”、“每一个”、“任意的”、“凡”、“都”等词可统称为全称量词,将它们符号化为“$\forall$”.并用 $\forall x$,$\forall y$ 等表示个体域里的所有个体,而用 $\forall xF(x)$,$\forall yG(y)$等分别表示个体域里所有个体都有性质 F 和都有性质 G.

(2) **存在量词** 日常生活和数学中常用的“存在”、“有一个”、“有的”、“至少有一个”等词统称为存在量词,将它们都符号化为“$\exists$”.并用 $\exists x$,$\exists y$ 等表示个体域里有的个体,而用 $\exists xF(x)$,$\exists yG(y)$等分别表示在个体域里存在个体具有性质 F 和存在个体具有性质 G 等.

3.1.3 一阶逻辑命题符号化

本小节将用例题说明一阶逻辑中命题符号化的形式,以及注意事项.

例 3.2 在个体域分别限制为(a)和(b)条件时,将下面两个命题符号化.

(1) 凡人都呼吸.

(2) 有的人用左手写字.

其中，

(a) 个体域 D_1 为人类集合；

(b) 个体域 D_2 为全总个体域.

解 (a) 令 $F(x)$：x 呼吸. $G(x)$：x 用左手写字.

(1) 在 D_1 中除人外，再无别的东西，因而"凡人都呼吸"应符号化为

$$\forall xF(x) \tag{3.1}$$

(2) 在 D_1 中的有些个体(人)用左手写字，因而"有的人用左手写字"符号化为

$$\exists xG(x) \tag{3.2}$$

(b) D_2 中除有人外，还有万物，因而在(1)和(2)符号化时，必须考虑将人先分离出来. 令 $M(x)$：x 是人. 在 D_2 中，(1)和(2)可分别重述如下：

(1) 对于宇宙间一切事物而言，如果事物是人，则他要呼吸.

(2) 在宇宙间存在着用左手写字的人.

于是(1)和(2)的符号化形式应分别为

$$\forall x(M(x) \to F(x)) \tag{3.3}$$

和

$$\exists x(M(x) \wedge G(x)) \tag{3.4}$$

其中，$F(x)$ 与 $G(x)$ 的含义同(a)中.

由例 3.2 可知，命题(1)和(2)在不同的个体域 D_1 和 D_2 中符号化的形式不一样，主要区别在于，在使用个体域 D_2 时，要将人从其他事物中区别出来，为此引进了谓词 $M(x)$，像这样的谓词称为**特性谓词**. 在命题符号化时一定要正确使用特性谓词.

在个体域 D_1 与 D_2 中，命题(1)与(2)都是真命题(在这里讨论的人是活着的人). 在 D_1 中，式(3.1)与式(3.2)正确地给出了(1)与(2)的符号化形式. 在 D_2 中，式(3.3)与式(3.4)给出的(1)与(2)的符号化形式的正确性可作如下说明. 在式(3.3)中，对于任意的 $x \in D_1$，若 x 代表某个人 a，则因 $M(a)$ 与 $F(a)$ 均为真，因而蕴涵式 $M(a) \to F(a)$ 为真. 而当 x 代表人以外的事物，如某棵树 b，则因 $M(b)$ 为假，所以 $M(b) \to F(b)$ 也为真，因而在式(3.3)中的蕴涵式不会出现前件真后件假的情况，所以式(3.3)正确给出了(1)的符号化形式. 而有些初学者，在 D_2 中常将(1)符号化为下面形式：

$$\forall x(M(x) \wedge F(x)) \tag{3.5}$$

式(3.5)不是(1)的符号化形式，若将它翻译成自然语言，应该是"宇宙间的任何事物都是人并且都呼吸"，这显然不是(1)的符号化形式，任何非人的个体 c 代入后，$M(c)$ 为假，所以式(3.5)为假. 因而命题(1)不能符号化为式(3.5)的形式. 对于式(3.4)，由于存在用左手写字的人，比如前任美国总统克林顿就用左手写字，当用 a 代表克林顿时，$M(a) \wedge G(a)$ 为真，所以式(3.4)为真. 有些人将(2)符号化为下面形式：

$$\exists x(M(x) \to G(x)) \tag{3.6}$$

式(3.6)已不是(2)的符号化形式,将它翻译成自然语言应该为“在宇宙间存在个体,如果此个体为人,则他用左手写字”,这显然改变了原命题的含义,因而式(3.6)不能代替式(3.4).

例 3.3 在个体域限制为(a)和(b)条件时,将下列命题符号化.

(1) 对于任意的 x,均有 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$.

(2) 存在 x,使得 $x+5=3$.

其中,

(a) 个体域 $D_1=\mathbf{N}$($\mathbf{N}$ 为自然数集).

(b) 个体域 $D_2=\mathbf{R}$($\mathbf{R}$ 为实数集).

解 (a) 令 $F(x)$:$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$,$G(x)$:$x+5=3$. 命题(1)的符号化形式为

$$\forall xF(x) \tag{3.7}$$

命题(2)的符号化形式为

$$\exists xG(x) \tag{3.8}$$

显然(1)为真命题,而(2)为假命题.

(b) 在 D_2 内,(1)与(2)的符号化形式还是式(3.7)和式(3.8),(1)仍然是真命题,而此时(2)也为真命题.

从例3.2和例3.3可以看出以下两点:

(1) 在不同个体域内,同一个命题的符号化形式可能不同,也可能相同.

(2) 同一个命题,在不同个体域中的真值也可能不同.

另外,作为一种规定,在本书中,讨论命题符号化时,若没有指明个体域,就采用全总个体域,见下例.

例 3.4 将下列命题符号化,并讨论真值.

(1) 所有的人都长着黑头发.

(2) 有的人登上过月球.

(3) 没有人登上过木星.

(4) 在美国留学的学生未必都是亚洲人.

解 由于本题没提出个体域,因而应采用全总个体域,并令 $M(x)$:x 为人.

(1) 令 $F(x)$:x 长着黑头发. 命题(1)符号化为

$$\forall x(M(x)\rightarrow F(x)) \tag{3.9}$$

设 a 为某金发姑娘,则 $M(a)$为真,而 $F(a)$为假,所以 $M(a)\rightarrow F(a)$为假,故式(3.9)所表示的命题为假.

(2) 令 $G(x)$:x 登上过月球. 命题(2)的符号化形式为

$$\exists x(M(x)\wedge G(x)) \tag{3.10}$$

设 a 是 1969 年登上月球完成阿波罗计划的一名美国人,则 $M(a)\wedge G(a)$ 为真,所以式(3.10)表示的命题为真.

(3) 令 $H(x)$:x 登上过木星.命题(3)符号化形式为

$$\neg\exists x(M(x)\wedge H(x)) \tag{3.11}$$

到目前为止,对于任何一个人(含已经去世的人)都还没有登上过木星,所以对任何人 a,$M(a)\wedge H(a)$ 均假,因而 $\exists x(M(x)\wedge H(x))$ 为假,故式(3.11)表示的命题为真.

(4) 令 $F(x)$:x 是在美国留学的学生,$G(x)$:x 是亚洲人.命题(4)符号化形式为

$$\neg\forall x(F(x)\to G(x)) \tag{3.12}$$

容易讨论,(4)中命题为真.

下面讨论 $n(n\geqslant 2)$ 元谓词的符号化问题.

例 3.5 将下列命题符号化.

(1) 兔子比乌龟跑得快.

(2) 有的兔子比所有的乌龟跑得快.

(3) 并不是所有的兔子都比乌龟跑得快.

(4) 不存在跑得同样快的两只兔子.

解 因为本题没有指明个体域,因而采用全总个体域.因为本例中出现 2 元谓词,因而引入两个个体变项 x 与 y.令 $F(x)$:x 是兔子,$G(y)$:y 是乌龟,$H(x,y)$:x 比 y 跑得快,$L(x,y)$:x 与 y 跑得同样快.这 4 个命题分别符号化为

$$\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\to H(x,y)) \tag{3.13}$$

$$\exists x(F(x)\wedge\forall y(G(y)\to H(x,y))) \tag{3.14}$$

$$\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\to H(x,y)) \tag{3.15}$$

$$\neg\exists x\exists y(F(x)\wedge F(y)\wedge L(x,y)) \tag{3.16}$$

对于存在 n 元谓词的命题,在符号化时应该注意以下几点:

(1) 分析命题中表示性质和关系的谓词,分别符号化为 1 元和 $n(n\geqslant 2)$ 元谓词.

(2) 根据命题的实际意义选用全称量词或存在量词.

(3) 一般说来,多个量词出现时,它们的顺序不能随意调换.例如,考虑个体域为实数集,$H(x,y)$ 表示 $x+y=10$,则命题"对于任意的 x,都存在 y,使得 $x+y=10$"的符号化形式为

$$\forall x\exists yH(x,y) \tag{3.17}$$

所给命题显然为真命题.但如果改变两个量词的顺序,得

$$\exists y\forall xH(x,y) \tag{3.18}$$

式(3.18)已不表示原命题,并且它表示的命题已为假命题.

(4) 有些命题的符号化形式可不仅一种.例如,在例 3.5 中,(3)还可以符号化为

$$\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y)) \tag{3.19}$$

(4)还可以符号化为

$$\forall x \forall y(F(x) \land F(y) \to \neg L(x,y)) \tag{3.20}$$

这样,式(3.15)和式(3.19)都是(3)的符号化形式,式(3.16)与式(3.20)都是(4)的符号化形式,它们都是正确的(3.2.1小节可以证明式(3.15)和式(3.19)是等值的,式(3.16)和式(3.20)是等值的).

由于引进了个体词、谓词和量词的概念,现在可以将本章开始时讨论的推理在一阶逻辑中符号化为如下形式:

$$\forall x(F(x) \to G(x)) \land F(a) \to G(a) \tag{3.21}$$

其中,$F(x)$:x是偶数,$G(x)$:x能被2整除,a:6.

3.1.4 一阶逻辑公式与分类

同在命题逻辑中一样,为在一阶逻辑中进行演算和推理,还必须给出一阶逻辑中公式的抽象定义,以及它们的解释和分类.为此,首先给出**一阶语言**的概念,所谓一阶语言是用于一阶逻辑的形式语言,而一阶逻辑就是建立在一阶语言基础上的逻辑体系,一阶语言本身不具备任何意义,但可以根据需要被解释成具有某种含义.一阶语言的形式是多种多样的.本书给出的一阶语言是便于将自然语言中的命题符号化的一阶语言,记它为$\mathscr{L}$.

定义3.1 一阶语言$\mathscr{L}$的字母表定义如下:

(1) 个体常项:$a,b,c,\cdots,a_i,b_i,c_i,\cdots,i\geqslant 1$.

(2) 个体变项:$x,y,z,\cdots,x_i,y_i,z_i,\cdots,i\geqslant 1$.

(3) 函数符号:$f,g,h,\cdots,f_i,g_i,h_i,\cdots,i\geqslant 1$.

(4) 谓词符号:$F,G,H,\cdots,F_i,G_i,H_i,\cdots,i\geqslant 1$.

(5) 量词符号:$\forall$,$\exists$.

(6) 联结词符号:$\neg$,$\land$,$\lor$,$\to$,$\leftrightarrow$.

(7) 括号与逗号:(),,.

3.1.3小节式(3.1)~式(3.21)所用符号均为$\mathscr{L}$字母表中的符号.

为方便起见,再给出$\mathscr{L}$的**项**的概念.

定义3.2 $\mathscr{L}$的项的定义如下:

(1) 个体常项和个体变项是项.

(2) 若$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是任意的$n$元函数,$t_1,t_2,\cdots,t_n$是任意的$n$个项,则$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)$是项.

(3) 所有的项都是有限次使用(1),(2)得到的.

定义3.3 设$R(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是$\mathscr{L}$的任意n元谓词,$t_1,t_2,\cdots,t_n$是$\mathscr{L}$的任意的n个项,则称$R(t_1,t_2,\cdots,t_n)$是$\mathscr{L}$的**原子公式**.

例3.5中的1元谓词$F(x)$,$G(y)$,2元谓词$H(x,y)$,$L(x,y)$等都是原子公式.

定义 3.4 $\mathscr{L}$的**合式公式**定义如下：

(1) 原子公式是合式公式.

(2) 若 A 是合式公式，则$(\neg A)$也是合式公式.

(3) 若 A,B 是合式公式，则 $(A\wedge B)$,$(A\vee B)$,$(A\rightarrow B)$,$(A\leftrightarrow B)$也是合式公式.

(4) 若 A 是合式公式，则$\forall xA$,$\exists xA$ 也是合式公式.

(5) 只有有限次地应用(1)～(4)构成的符号串才是合式公式.

合式公式也称为**谓词公式**,简称**公式**.

在定义 3.4 中出现的字母 A,B 是代表任意公式的元语言符号. 为方便起见,公式$(\neg A)$,$(A\wedge B)\cdots$的最外层括号可以省去,使其变成$\neg A$,$A\wedge B\cdots$式(3.1)～式(3.21)都是$\mathscr{L}$中的公式.

因为本书只引进一种一阶语言 $\mathscr{L}$,下文的讨论中都是在 $\mathscr{L}$ 中,因而一般不再提及 $\mathscr{L}$. 另外,下文中出现的 A,B 等符号均指任意的合式公式,简称为公式. 例如,A 可以是$F(x)$,$G(x)$等原子公式,也可以不是原子公式,如 $F(x)\rightarrow\forall yG(y)$, $\forall x(F(x,y)\wedge G(x,z))$等按合式公式形成规则形成的各种公式.

定义 3.5 在公式$\forall xA$ 和$\exists xA$ 中,称 x 为**指导变元**,A 为相应量词的**辖域**. 在$\forall x$和$\exists x$ 的辖域中,x 的所有出现都称为**约束出现**,A 中不是约束出现的其他变项均称为是**自由出现**的.

例 3.6 指出下列各公式中的指导变元,各量词的辖域,自由出现以及约束出现的个体变项.

(1) $\forall x(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$ (3.22)

(2) $\forall x(F(x)\rightarrow G(y))\rightarrow\exists y(H(x)\wedge L(x,y,z))$ (3.23)

解 (1) x 是指导变元. 量词$\forall$的辖域 $A=(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$,在 A 中,x 是约束出现的,而且约束出现两次,y 和 z 均为自由出现的,而且各自由出现一次.

(2) 公式中含两个量词,前件上的量词的指导变元为 x,$\forall x$ 的辖域 $A=(F(x)\rightarrow G(y))$,其中 x 是约束出现的,y 是自由出现的. 后件中的量词的指导变元为 y,$\exists y$ 的辖域为$(H(x)\wedge L(x,y,z))$,其中 y 是约束出现的,x,z 均为自由出现的. 在整个公式中,x 约束出现一次,自由出现两次,y 自由出现一次,约束出现一次,z 只自由出现一次.

本书用 $A(x_1,x_2,\cdots,x_n)$表示含 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为自由出现的公式. 用 Δ 表示量词($\forall$ 或$\exists$). 在 $\Delta x_iA(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)$中,$x_i$ 是约束出现的,其余的个体变项都是自由出现的. 而在 $\Delta x_1\Delta x_2\cdots\Delta x_nA(x_1,x_2,\cdots,x_n)$中,无自由出现的个体变项.

可将例 3.6(1)中公式简记为 $A(y,z)$,这表明(1)中公式含自由出现的个体变项 y,z. 而$\forall yA(y,z)$中只含 z 为自由出现的公式,$\exists z\forall yA(y,z)$中已无自由出现的个体变项了,此时的公式为

$$\exists z\forall y\forall x(F(x,y)\rightarrow G(x,y,z))\tag{3.24}$$

定义 3.6 设 A 是任意的公式,若 A 中不含自由出现的个体变项,则称 A 为**封闭的公式**,简称**闭式**.

易知式(3.1)~式(3.21)以及式(3.24)都是闭式,而式(3.22)和式(3.23)则不是闭式.要想使含 $r(r\geqslant 1)$ 个自由出现个体变项的公式变成闭式至少要加上 r 个量词,将式(3.22)加了两个量词就变成了闭式(3.24)了.类似地,也可以用加量词的方法将式(3.23)变成闭式.

按定义 3.4 定义的合式公式,一般说来没有确定的意义,一旦将其中的变项(个体变项,项的变项,谓词变项等)用指定的常项代替,所得公式可能具备一定的涵义,有时可以变成命题了.

例 3.7 将下面公式

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(x)) \tag{3.25}$$

中的变项指定成常项,使其成为命题.

解 指定个体变项的变化范围,并指定谓词 F,G 的涵义,下面给出两种指定法.

(a) 令个体域 D_1 为全总个体域,$F(x)$ 为 x 是人,$G(x)$ 为 x 是黄种人,则式(3.25)表达的命题为"所有的人都是黄种人",这是假命题.

(b) 令个体域 D_2 为实数集合 $\mathbf{R}$,$F(x)$ 为 x 是自然数,$G(x)$ 为 x 是整数,则式(3.25)表达的命题为"自然数都是整数",这是真命题.

还可以给出其他各种不同指定,使式(3.25)表达各种不同形式的命题.

上面指定公式中的个体域以及个体变项、谓词变项等的具体涵义称作对它的解释.一般地,给定一阶语言的解释,在这个解释下解释公式.定义 3.1 给出了一般性的一阶语言的定义.定义中的个体常项、函数符号和谓词符号称作**非逻辑符号**,其余的符号称作**逻辑符号**.就一个具体的应用而言,一阶语言 $\mathscr{L}$ 只涉及某些非逻辑符号.记它所使用的非逻辑符号集为 L,称 $\mathscr{L}$ 是非逻辑符号集 L **生成的一阶语言**.不同的非逻辑符号集生成各种不同的具体的一阶语言,但它们使用相同的逻辑符号和相同的生成规则.解释是对这种具体的一阶语言而言的,定义如下.

定义 3.7 设 L 是非逻辑符号集,$\mathscr{L}$ 是由 L 生成的一阶语言,$\mathscr{L}$ 的**解释** I 由下面 4 部分组成:

(a) 非空的个体域 D.

(b) 对每一个个体常项 $a\in L$,有一个 $\bar{a}\in D$,$\bar{a}$ 称作 a 的解释.

(c) 对每一个 n 元函数符号 f,有一个 D 上的 n 元函数 $\bar{f}$,$\bar{f}$ 称作 f 的解释.

(d) 对每一个 n 元谓词符号 F,有一个 D 上的 n 元谓词 $\bar{F}$,$\bar{F}$ 称作 F 的解释.

设 A 是 $\mathscr{L}$ 中的一个公式,把 A 中的每一个个体常项、函数符号和谓词符号替换成它的解释,得到公式 $\bar{A}$,在解释 I 下,称 $\bar{A}$ 是 A 的解释,或称在解释 I 下,A 被解释成 $\bar{A}$.

例 3.8 给定解释 I 如下:

(a) 个体域 $D=\mathbf{N}$($\mathbf{N}$ 为自然数集合,即 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$).

(b) $\bar{a}=0$.

(c) $\bar{f}(x,y)=x+y$,$\bar{g}(x,y)=x\cdot y$.

(d) $\bar{F}(x,y)$为 $x=y$.

在 I 下,下列哪些公式为真?哪些为假?哪些的真值还不能确定?

(1) $F(f(x,y),g(x,y))$.

(2) $F(f(x,a),y)\rightarrow F(g(x,y),z)$.

(3) $\neg F(g(x,y),g(y,z))$.

(4) $\forall xF(g(x,y),z)$.

(5) $\forall xF(g(x,a),x)\rightarrow F(x,y)$.

(6) $\forall xF(g(x,a),x)$.

(7) $\forall x\forall y(F(f(x,a),y)\rightarrow F(f(y,a),x))$.

(8) $\forall x\forall y\exists zF(f(x,y),z)$.

(9) $\exists xF(f(x,x),g(x,x))$.

解 (1) 在 I 下,公式被解释成“$x+y=x\cdot y$”,这不是命题.

(2) 公式被解释成“$(x+0=y)\rightarrow(x\cdot y=z)$”,这也不是命题.

(3) 公式被解释成“$x\cdot y\neq y\cdot z$”,同样不是命题.

(4) 公式被解释成“$\forall x(x\cdot y=z)$”,不是命题.

(5) 公式被解释成“$\forall x(x\cdot 0=x)\rightarrow(x=y)$”,由于蕴涵式的前件为假,所以被解释的公式为真.

(6) 公式被解释成“$\forall x(x\cdot 0=x)$”,为假命题.

(7) 公式被解释成“$\forall x\forall y((x+0=y)\rightarrow(y+0=x))$”,为真命题.

(8) 公式被解释成“$\forall x\forall y\exists z(x+y=z)$”,这也为真命题.

(9) 公式被解释成“$\exists x(x+x=x\cdot x)$”,为真命题.

从例 3.8 可以看出,闭式在给定的解释中都变成了命题(见公式(6)～公式(8)),其实闭式在任何解释下都变成命题.

定理 3.1 封闭的公式在任何解释下都变成命题.

本定理的证明略.

不是闭式的公式在某些解释下也可能变为命题.例如,例 3.8 中公式(5)变成了真命题,可它不是闭式.

在一阶逻辑中同在命题逻辑中一样,有的公式在任何解释下均为真,有些公式在任何解释下均为假,而又有些公式既存在成真的解释,又存在成假的解释.下面给出公式类型的定义.

定义 3.8 设 A 为一公式,若 A 在任何解释下均为真,则称 A 为**永真式**(或称**逻辑有效式**).若 A 在任何解释下均为假,则称 A 为**矛盾式**(或称**永假式**).若至少存在一个解释