第3章

离散傅里叶变换

3.1 引言

有限长序列在数字信号处理中占有很重要的地位。计算机只能处理有限长序列，前面讨论的傅里叶变换和Z变换虽然能分析研究有限长序列，但无法利用计算机进行数值计算。在这种情况下，可以推导出另一种傅里叶变换式，称作离散傅里叶变换(DFT)。离散傅里叶变换是有限长序列的傅里叶变换，它相当于把信号的傅里叶变换进行等频率间隔采样。离散傅里叶变换除了在理论上具有重要意义之外，由于存在快速算法，也在各种数字信号处理的算法中，越来越起到核心作用。

有限长序列的离散傅里叶变换(DFT)和周期序列的离散傅里叶级数(DFS)本质上是一样的。在讨论离散傅里叶级数与离散傅里叶变换前先来回顾并讨论一下傅里叶变换的几种可能形式。

3.2 傅里叶变换的几种形式

傅里叶变换是建立以时间 t 为自变量的“信号”与以频率 f 为自变量的“频率函数”(频谱)之间的某种变换关系。所以“时间”或“频率”取连续还是离散值，就形成各种不同形式的傅里叶变换对。

在深入讨论离散傅里叶变换 DFT 之前，先概述 4 种不同形式的傅里叶变换对。

3.2.1 连续时间、连续频率——连续傅里叶变换(FT)

这是非周期连续时间信号 $x(t)$ 的傅里叶变换，其频谱 $X(\mathrm{j}\Omega)$ 是一个连续的非周期函数。这一变换对为

$$X(\mathrm{j}\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t}\,\mathrm{d}t \tag{3-1}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega t}\,\mathrm{d}\Omega \tag{3-2}$$

这一变换对的示意图见图 3-1(a)，可以看出时域连续函数造成频域是非周期的谱，而时域的非周期造成频域是连续的谱。

3.2.2 连续时间、离散频率——傅里叶级数(FS)

这是周期(T_p)连续时间信号 $x(t)$的傅里叶变换，得到的是非周期离散频谱密度函数 $X(\mathrm{j}k\Omega_0)$，这一变换对为

$$X(\mathrm{j}k\Omega_0) = \frac{1}{T_p}\int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\Omega_0 t}\,\mathrm{d}t \tag{3-3}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}k\Omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\Omega_0 t} \tag{3-4}$$

其中，$\Omega_0 = 2\pi F = \dfrac{2\pi}{T_p}$为离散频谱相邻两谱线之间的角频率间隔，$k$ 为谐波序号。

这一变换对的示意图见图 3-1(b)，可以看出时域的连续函数造成频域是非周期的频谱函数，而频域的离散频谱就与时域的周期时间函数相对应。

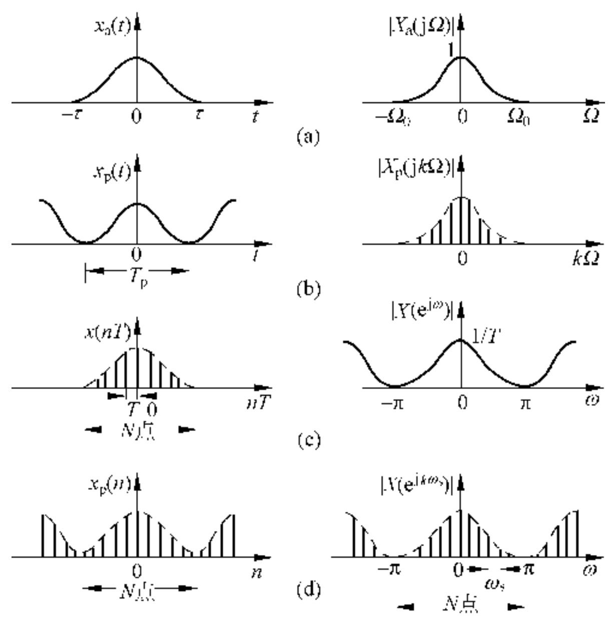

图 3-1　4 种形式的傅里叶变换对示意图

3.2.3 离散时间、连续频率——序列的傅里叶变换(DTFT)

这是非周期离散时间信号的傅里叶变换，得到的是周期性连续的频率函数。这正是第 2 章介绍的序列(离散时间信号)的傅里叶变换。这一变换对为

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \tag{3-5}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega \tag{3-6}$$

其中 ω 是数字频率，它和模拟角频率 Ω 的关系为 $\omega=\Omega T$。

这一变换对的示意图见图 3-1(c)，可以看出时域的离散造成频域的周期延拓，而时域的非周期对应于频域的连续。

3.2.4 离散时间、离散频率——离散傅里叶变换(DFT)

上面讨论的 3 种傅里叶变换对都不适用在计算机上运算，而时域及频域都是离散的情况可以，这就是离散傅里叶变换。一种常用的离散傅里叶变换对可表示为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}, \quad 0 \leqslant k \leqslant N-1 \tag{3-7}$$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{3-8}$$

比较图 3-1(a)、(b)和(c)可发现有以下规律：如果信号频域是离散的，表现为周期性的时间函数。相反，在时域上是离散的，则该信号在频域必然表现为周期性的频率函数。不难设想，一个离散周期序列，它一定具有既是周期又是离散的频谱，其示意图如图 3-1(d)所示。

由此可以得出一般的规律：一个域的离散对应另一个域的周期延拓，一个域的连续必定对应另一个域的非周期。表 3-1 对这 4 种傅里叶变换形式的特点作了简要归纳。

表 3-1 4 种傅里叶变换形式的归纳

时间函数	频率函数
连续和非周期	非周期和连续
连续和周期(T_p)	非周期和离散$\left(\Omega_0=\dfrac{2\pi}{T_p}\right)$
离散(T)和非周期	周期$\left(\Omega_s=\dfrac{2\pi}{T}\right)$和连续
离散(T)和周期(T_p)	周期$\left(\Omega_s=\dfrac{2\pi}{T}\right)$和离散$\left(\Omega_0=\dfrac{2\pi}{T_p}\right)$

下面先从周期性序列的离散傅里叶级数开始讨论，然后讨论可作为周期函数一个周期的有限长序列的离散傅里叶变换。

3.3 离散傅里叶级数(DFS)

3.3.1 DFS 的定义

设 $\tilde{x}(n)$ 是一个周期为 N 的周期序列，即

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n+rN), \quad r\ \text{为任意整数}$$

由于周期序列的数值随周期 N 在区间$(-\infty,+\infty)$内周而复始地重复变化，因而在整个 z 平面内找不到一个合适的衰减因子$|z|$，使周期序列绝对可和。即对于 z 平面内的任意 z 值，都有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(n)z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(n)||z|^{-n} = \infty$$

所以，周期序列不能用 Z 变换表示。

但是，正如连续时间周期信号可以用傅里叶级数表示一样，离散周期序列也可以用离散傅里叶级数表示，也就是用周期为 N 的复指数序列来表示。表 3-2 表示了连续周期信号与离散周期序列的复指数对比。

表 3-2　连续周期信号与离散周期序列的复指数对比

	基频序列	周　期	基　频	k 次谐波序列
连续周期	$e^{j\Omega_0 t}=e^{j\left(\frac{2\pi}{T_p}\right)t}$	T_p	$\Omega_0=\dfrac{2\pi}{T_p}$	$e^{j\left(\frac{2\pi}{T_p}\right)tk}$
离散周期	$e^{j\omega_0 n}=e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$	N	$\omega_0=\dfrac{2\pi}{N}$	$e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$

可见，周期为 N 的复指数序列的基频序列为 $e_1(n)=e^{j\omega_0 n}=e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$，$k$ 次谐波序列为 $e_k(n)=e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$。

由于 $e^{j\frac{2\pi}{N}n(k+rN)}=e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$，即 $e_{k+rN}(n)=e_k(n)$，因而，离散傅里叶级数的所有谐波成分中只有 N 个是独立的，这点和连续傅里叶级数不同(后者有无穷多个谐波成分)。因此在展开成离散傅里叶级数时，我们只能取 N 个独立的谐波分量，否则将产生二义性。为方便起见，取 k 为 $0\sim N-1$ 的 N 个独立谐波分量来构成$\tilde{x}(n)$的离散傅里叶级数，即

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \tag{3-9}$$

式中 $1/N$ 是习惯上采用的常数，$\tilde{X}(k)$是 k 次谐波的系数，为求解这个系数要利用以下性质，即

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)rn} = \begin{cases}1, & r = mN, m \text{ 为整数} \\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{3-10}$$

将式(3-9)两端同乘以 $e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}$，并对 n 取 $0\sim N-1$ 的一个周期求和，得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)rn} &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-r)} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-r)}\right] = \tilde{X}(r)\end{aligned}$$

即

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \tag{3-11}$$

这就是求 k 取 $0\sim N-1$ 的 N 个谐波系数$\tilde{X}(k)$的公式。

由于

$$\tilde{X}(k+rN) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n(k+rN)} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} = \tilde{X}(k)$$

所以$\widetilde{X}(k)$也是一个以 N 为周期的周期序列。因此,时域离散周期序列的离散傅里叶级数在频域上仍然是一个周期序列。习惯上采用以下符号

$$W_N = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}}$$

这样,式(3-9)和式(3-11)又可表示为

$$\widetilde{X}(k) = \mathrm{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk} \tag{3-12}$$

$$\tilde{x}(n) = \mathrm{IDFS}[\widetilde{X}(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{X}(k) W_N^{-nk} \tag{3-13}$$

其中,符号 DFS[·]表示离散傅里叶级数正变换,IDFS[·]表示离散傅里叶级数反变换。

式(3-12)和式(3-13)中的表达式求和时都只取 N 个序列值,这一事实说明一个周期序列虽然是无限长序列,但只要研究一个周期的性质,其他周期的性质也就知道了。因此周期序列与有限长序列有着本质的联系。

3.3.2 DFS 的性质

1. 线性

设$\tilde{x}(n)$和$\tilde{y}(n)$都是以 N 为周期的序列,并且

$$\mathrm{DFS}[\tilde{x}(n)] = \widetilde{X}(k), \quad \mathrm{DFS}[\tilde{y}(n)] = \widetilde{Y}(k)$$

则

$$\mathrm{DFS}[a\,\tilde{x}(n) + b\,\tilde{y}(n)] = a\,\widetilde{X}(k) + b\,\widetilde{Y}(k) \tag{3-14}$$

其中 a,b 为任意常数。

2. 移位特性

设

$$\mathrm{DFS}[\tilde{x}(n)] = \widetilde{X}(k)$$

则

$$\mathrm{DFS}[\tilde{x}(n-m)] = W_N^{mk}\,\widetilde{X}(k) \tag{3-15}$$

3. 周期卷积

设$\tilde{x}(n)$和$\tilde{y}(n)$都是以 N 为周期的序列,它们的离散傅里叶级数分别为$\widetilde{X}(k)$和$\widetilde{Y}(k)$

若

$$\widetilde{F}(k) = \widetilde{X}(k)\,\widetilde{Y}(k)$$

则

$$\tilde{f}(n) = \mathrm{IDFS}[\widetilde{F}(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m)\,\tilde{y}(n-m) \tag{3-16}$$

这是一个卷积公式,但是和前面所讨论的线性卷积不同,$\tilde{x}(m)$和$\tilde{y}(n-m)$都是变量 m 的周期函数,周期为 N,因而乘积也是周期为 N 的周期函数,另外,卷积过程也只是在一个周期内进行,这类卷积通常称为周期卷积。在做这类卷积的过程中,当一个周期移出计算区间时,下一周期就移入计算区间。

周期卷积的过程可以用图 3-2 来说明,这是一个 $N=7$ 的周期卷积。每一个周期里$\tilde{x}_1(n)$有一个宽度为 4 的矩形脉冲,$\tilde{x}_2(n)$有一个宽度为 3 的矩形脉冲,图中画出了对应于

$n=0,1,2$ 时的 $\tilde{x}_2(n-m)$。周期卷积过程中一个周期的某一序列值移出计算区间时，相邻的同一位置的序列值就移入计算区间。运算在 $m=0$ 到 $N-1$ 区间内进行，即在一个周期内将 $\tilde{x}_2(n-m)$ 与 $\tilde{x}_1(m)$ 逐点相乘后求和，先计算出 $n=0,\ 1,\ \cdots,N-1$ 的结果，然后将所得结果周期延拓，就得到所求的整个周期序列 $\tilde{y}(n)$。

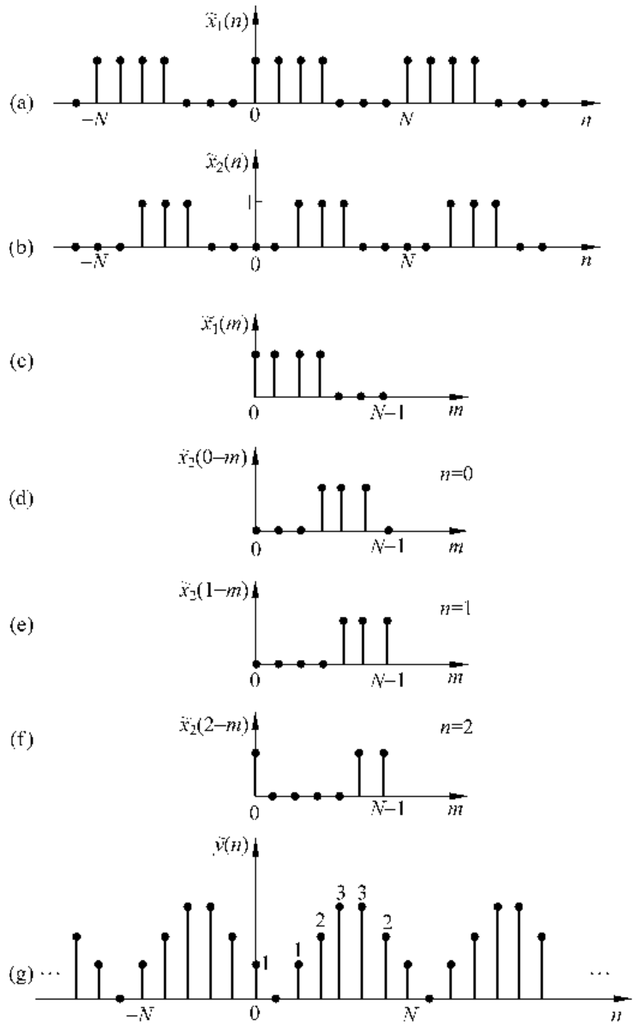

图 3-2　两个周期为 7 的序列的周期卷积

3.4　离散傅里叶变换

3.4.1　DFT 的定义

由上一节的讨论可知，周期序列实际上只有有限个序列值有意义，因而它和有限长序列有着本质的联系。本节将根据周期序列和有限长序列之间的关系，由周期序列的离散

傅里叶级数表达式推导得到有限长序列的离散频域表示即离散傅里叶变换(DFT)。

1. 有限长序列和周期序列之间的关系

周期序列只有有限个序列值是独立的。对于长度为 N 的有限长序列,可以看成周期为 N 的周期序列的一个周期,就相当于计算了有限长序列。

设 $x(n)$为有限长序列,长度为 N,把它看成周期序列$\tilde{x}(n)$的一个周期,而把$\tilde{x}(n)$看成$x(n)$以 N 为周期的周期延拓,这样就建立了有限长序列 $x(n)$和周期序列之间的联系,即

$$x(n)=\begin{cases}\tilde{x}(n), & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

或
$$x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n) \tag{3-17}$$

$$\tilde{x}(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+rN) \tag{3-18}$$

上述关系如图 3-3 所示。习惯上把$\tilde{x}(n)$的第一个周期($n=0$ 到 $N-1$)定义为"主值区间",而主值区间上的序列称为"主值序列",所以 $x(n)$是$\tilde{x}(n)$的"主值序列"。

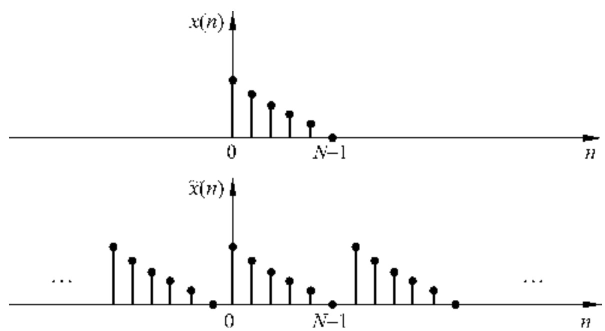

图 3-3 有限长序列及其周期延拓

对不同 r 值,$x(n+rN)$之间彼此并不重叠,故式(3-18)也可写成

$$\tilde{x}(n)=x(n \bmod N)=x((n))_N \tag{3-19}$$

用$((n))_N$ 表示($n \bmod N$),其数学上就是表示"n 对 N 取余数",或称"n 对 N 取模值"。

令
$$n=n_1+mN,\quad 0\leqslant n_1\leqslant N-1, m\text{ 为整数}$$

则 n_1 为 n 对 N 的余数。不管 n_1 加上多少倍的 N,其余数皆为 n_1,即周期性重复出现的 $x((n))_N$ 数值是相等的。例如,$\tilde{x}(n)$是周期为 $N=8$ 的序列,求 $n=19$ 和 $n=-2$ 两数对 N 的余数。

因为

$$n=19=3+2\times 8,\quad \text{故}((19))_8=3$$

$$n=-2=6+(-1)\times 8,\quad \text{故}((-2))_8=6$$

因此$\tilde{x}(19)=((19))_8=x(3)$,$\tilde{x}(-2)=((-2))_8=x(6)$

同理,频域周期序列$\widetilde{X}(k)$也可看成是对有限长序列 $X(k)$的周期延拓,而有限长序列

$X(k)$看成周期序列$\widetilde{X}(k)$的主值序列，即

$$\widetilde{X}(k) = X((k))_N \tag{3-20}$$

$$X(k) = \widetilde{X}(k)R_N(k) \tag{3-21}$$

2. 有限长序列的离散傅里叶变换

从 DFS 和 IDFS 的定义可以看出，求和运算只限定在 $n=0$ 到 $N-1$ 和 $k=0$ 到 $N-1$ 的主值区间内进行，因而完全适用于主值序列 $x(n)$与 $X(k)$。因此得到一个新的定义，这就是有限长序列的离散傅里叶变换定义：长度为 N 的有限长序列 $x(n)$，其离散傅里叶变换$X(k)$仍然是一个长度为 N 的频域有限长序列，它们的关系为

$$X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \quad 0 \leqslant k \leqslant N-1 \tag{3-22}$$

$$x(n) = \mathrm{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{3-23}$$

长度为 N 的有限长序列和周期为 N 的周期序列，都是由 N 个值定义，但有一点需要记住，凡是谈到傅里叶变换关系之处，有限长序列都是作为周期序列的一个周期来表示的，都隐含有周期性的意思。

例 3-1 已知序列 $x(n)=\delta(n)$，求它的 N 点 DFT。

解：单位脉冲序列的 DFT 很容易由 DFT 的定义式(3-22)得到

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1}\delta(n)W_N^{nk} = W_N^0 = 1$$

$\delta(n)$的 $X(k)$如图 3-4 所示，这是一个很特殊的例子，它表明对序列 $\delta(n)$来说，不论对它进行多少点的 DFT，所得结果都是一个离散矩形序列。

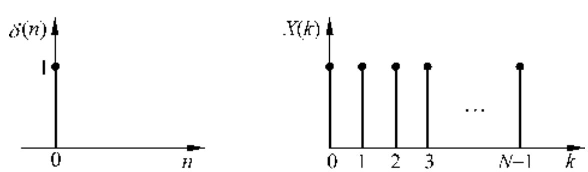

图 3-4 序列 $\boldsymbol{\delta(n)}$及其离散傅里叶变换

在一般情况下，$X(k)$是一个复量，可表示为

$$X(k) = X_R(k) + jX_I(k)$$

或

$$X(k) = |X(k)|e^{j\theta(k)}$$

例 3-2 求有限长序列 $x(n)=\begin{cases} a^n, & 0\leqslant n\leqslant N-1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$ 的 DFT，其中 $a=0.8$，$N=8$。

解：$X(k) = \sum_{n=0}^{8-1} x(n)W_8^{nk} = \sum_{n=0}^{7} a^n e^{-j\frac{2\pi}{8}nk} = \sum_{n=0}^{7}(ae^{-j\frac{2\pi}{8}k})^n = \dfrac{1-a^8}{1-ae^{-j\frac{\pi}{4}k}}, \quad 0\leqslant k\leqslant 7$

因此得

$X(0)=4.161\,14$ $X(1)=0.710\,63-j0.925\,58$

$X(2)=0.507\,46-j0.405\,97$ $X(3)=0.470\,17-j0.169\,87$

$X(4)=0.46235$ $\qquad$ $X(5)=0.47017+\mathrm{j}0.16987$

$X(6)=0.50746+\mathrm{j}0.40597$ $\qquad$ $X(7)=0.71063+\mathrm{j}0.92558$

例 3-3 已知序列 $x(n)=R_4(n)$，求 $x(n)$的 8 点和 16 点 DFT。

解：设变换区间 $N=8$，则

$$X(k)=\sum_{n=0}^{8-1}x(n)W_8^{nk}=\sum_{n=0}^{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{8}nk}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3\pi}{8}nk}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}k\right)},\quad k=0,1,\cdots,7$$

设变换区间 $N=16$，则 $X(k)=\sum_{n=0}^{16-1}x(n)W_{16}^{nk}=\sum_{n=0}^{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{16}nk}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3\pi}{16}nk}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{16}k\right)}$，$k=0$，$1,\cdots,15$，由此可以看出，$x(n)$的 DFT 结果与变换区间长度 N 的取值有关。讨论完 DFT 与 Z 变换的关系及 DFT 的物理意义后，上述问题就会得到解释。

3.4.2 DFT 和 Z 变换的关系

设序列 $x(n)$的长度为 N，其 Z 变换和 DFT 分别为

$$X(z)=\mathcal{Z}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$$

$$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk},\quad 0\leqslant k\leqslant N-1$$

比较 Z 变换和 DFT，可以看出，当 $z=W_N^{-k}$ 时，

$$X(z)\big|_{z=W_N^{-k}}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=\mathrm{DFT}[x(n)]$$

即

$$X(k)=X(z)\big|_{z=W_N^{-k}},\quad 0\leqslant k\leqslant N-1 \tag{3-24}$$

$z=W_N^{-k}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}$表明 W_N^{-k} 是 z 平面单位圆上幅角为 $\omega=\dfrac{2\pi}{N}k$ 的点，也即将 z 平面单位圆 N 等分后的第 k 点，所以 $X(k)$也就是 Z 变换在单位圆上的 N 点等间隔采样。

另外，由于序列的傅里叶变换 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$就是单位圆上的 Z 变换，根据式(3-24)，DFT 与序列傅里叶变换 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$的关系为

$$X(k)=X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \tag{3-25}$$

式(3-25)说明，$X(k)$也可以看作序列 $x(n)$的傅里叶变换 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$在区间$[0,\ 2\pi]$上的 N 点等间隔采样，其采样间隔为 $\omega=\dfrac{2\pi}{N}$，这就是 DFT 的物理意义。显而易见，DFT 的变换区间长度 N 不同，表示对 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$在区间$[0,\ 2\pi]$上的采样间隔和采样点数不同，所以 DFT 的变换结果也不同。DFT 与 Z 变换和序列傅里叶变换的关系如图 3-5 所示。

信号时域采样理论实现了信号时域的离散化，使我们能用数字技术在时域内对信号进行处理。而离散傅里叶变换理论实现了频域离散化，因而开辟了用数字技术在频域内处理信号的新途径，从而推进了信号的频谱分析技术向更深更广的领域发展。

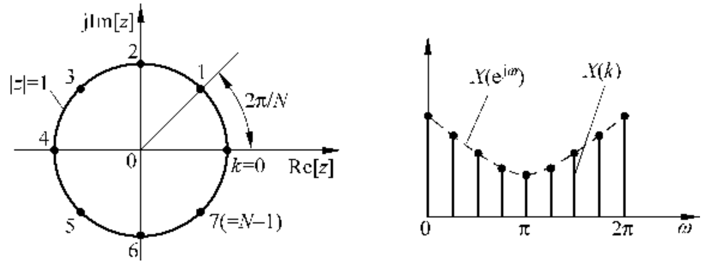

图 3-5　DFT 与 Z 变换和序列傅里叶变换的关系

3.4.3　DFT 的性质

本节讨论 DFT 的一些性质，它们本质上和周期序列的 DFS 概念有关，而且是由有限长序列及其 DFT 表示式隐含的周期性得出的。以下讨论的序列都是 N 点有限长序列，用 DFT[·]表示 N 点 DFT，且设

$$\mathrm{DFT}[x_1(n)]=X_1(k),\quad \mathrm{DFT}[x_2(n)]=X_2(k)$$

1. 线性

$$\mathrm{DFT}[ax_1(n)+bx_2(n)]=aX_1(k)+bX_2(k)\tag{3-26}$$

式中，a，b 为任意常数，该式可根据 DFT 定义证明。若两个序列长度不等，取长度最大者，将短的序列通过补零加长，注意此时 DFT 与未补零的 DFT 不相等。

2. 圆周移位

(1) 圆周移位定义

一个有限长序列 $x(n)$的圆周移位是指用它的长度 N 为周期，将其延拓成周期序列 $\tilde{x}(n)$，将周期序列 $\tilde{x}(n)$移位，然后取主值区间($n=0\sim N-1$)上的序列值。即一个有限长序列 $x(n)$的圆周移位定义为

$$y(n)=x((n+m))_N\cdot R_N(n)\tag{3-27}$$

一个有限长序列 $x(n)$的圆周移位序列 $y(n)$仍然是一个长度为 N 的有限长序列，圆周移位的过程可用图 3-6 来描述。

从图 3-6(c)可以看出，由于是周期序列的移位，当只观察 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 这一主值区间时，某一采样从该区间的一端移出时，与其相同值的采样又从该区间的另一端循环移进。因而，可以想象 $x(n)$是排列在一个 N 等分的圆周上，序列 $x(n)$的圆周移位，就相当于 $x(n)$在此圆周上旋转，如图 3-6(e)、(f)、(g)所示，因而称为圆周移位。若将 $x(n)$向左圆周移位时，此圆是顺时针旋转；将 $x(n)$向右圆周移位时，此圆是逆时针旋转。此外，如果围绕圆周观察几圈，那么看到的就是周期序列 $\tilde{x}(n)$。

(2) 时域圆周移位定理

有限长序列圆周移位后的 DFT 为

$$Y(k)=\mathrm{DFT}[x((n+m))_N R_N(n)]=W_N^{-mk}X(k)\tag{3-28}$$

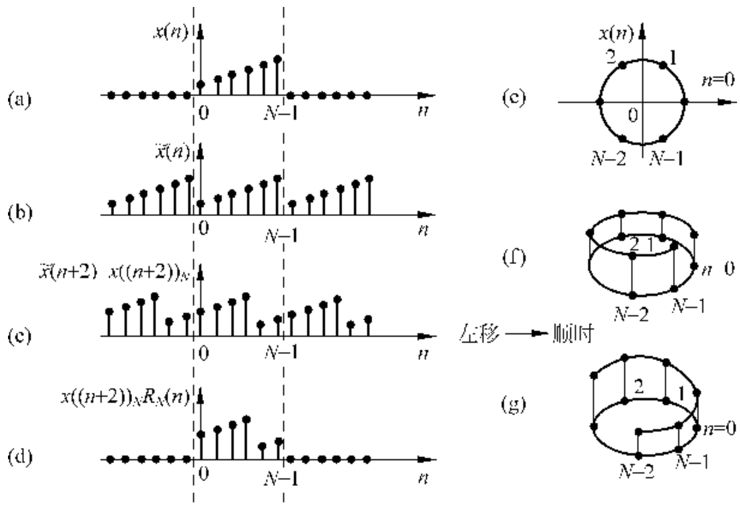

图 3-6　圆周移位过程示意图($N=6$)

证明：利用周期序列的移位特性

$$\mathrm{DFS}[x((n+m))_N] = \mathrm{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk}\tilde{X}(k)$$

序列取主值区间，变换也取主值区间，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{DFT}[x((n+m))_N R_N(n)] &= \mathrm{DFT}[\tilde{x}(n+m)R_N(n)] \\ &= W_N^{-mk}\tilde{X}(k)R_N(k) = W_N^{-mk}X(k)\end{aligned}$$

这表明，有限长序列的圆周移位，在离散频域中只引入一个和频率成正比的线性相移 W_N^{-mk}，对频谱的幅度是没有影响的。

(3) 频域圆周移位定理

对于频域有限长序列 $X(k)$，也可看成是分布在一个 N 等分的圆周上，所以对于 $X(k)$ 的圆周移位，利用频域与时域的对偶关系，可以证明以下性质：

若 $Y(k)=X((k+l))_N \cdot R_N(k)$，则

$$\mathrm{IDFT}[X((k+l))_N R_N(k)] = W_N^{nl}x(n) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nl}x(n) \tag{3-29}$$

3. 圆周卷积

设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是长度为 N 的有限长序列($0 \leqslant n \leqslant N-1$)，且有 $\mathrm{DFT}[x_1(n)] = X_1(k)$，$\mathrm{DFT}[x_2(n)] = X_2(k)$。

若 $Y(k)=X_1(k)X_2(k)$，则

$$y(n) = \mathrm{IDFT}[Y(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((n-m))_N R_N(n) \tag{3-30}$$

或

$$y(n) = \mathrm{IDFT}[Y(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} x_2(m)x_1((n-m))_N R_N(n)$$

上式所表示的运算称为圆周卷积(也叫循环卷积)，通常简记为 $y(n)=x_1(n) \circledast x_2(n)$。

卷积过程可以用图 3-7 来表示。圆周卷积过程中，求和变量为 m，而 n 为参变量。先将 $x_2(m)$ 周期化，形成 $x_2((m))_N$，再反转形成 $x_2((-m))_N$，取主值序列则得到