第3章

CHAPTER

电路基本定理

本章的基本任务是学习线性电路的几个定理，以便从不同角度掌握线性电路的固有性质，为深入理解电路的一般规律和简化电路的分析计算提供理论依据。

3.1 基本要求

1. 掌握替代定理、特勒根定理和互易定理。
2. 掌握和熟练应用叠加定理、戴维南定理、诺顿定理和最大功率传输定理。

3.2 理论提要

电路基本定理描述了线性电路的基本性质，是分析线性电路的重要方法。它们既可以从网络方程法得到论证，又有助于对网络分析的一般方法加深理解，并简化其分析计算。其中，叠加定理揭示了线性电路的最基本的性质——叠加性，它的重要性，不仅在于提供了电路分析中用的叠加法，尤其在于它为其他网络定理的证明和分析法提供了理论依据。由它引出的齐性原理，也为电路分析提供了方便。而戴维南定理和诺顿定理，把任一线性含源二端网络等效化简为一含源支路；对于含受控源、耦合电感等复杂的稳态和动态电路，均可很方便地找到其等效电路，建立分析求解电路的方程；它们也为最大功率传输定理奠定了基础。戴维南定理是应用较多的定理，是本章的重点。当然，其他定理也有各自的作用，不能忽视。下面对各定理及其应用分别进行归纳。

1. 叠加定理和替代定理

（1）叠加定理

叠加定理可以表述为：线性电阻电路中，任一电压或电流都是电路中各个独立电源单独作用时，在该处产生的电压或电流的代数和。当电路中存在受控源时，叠加定理仍然适用。使用叠加定理时应注意以下几点：

① 叠加定理只适用于线性电路，不适用于非线性电路。

② 在各电源单独作用时，不作用的电压源置零，原电压源处用短路代替；不作用的电流源置零，原电流源处用开路代替。电路中所有电阻都不予变动，受控源仍保留在各分电路中。

③ 计算各独立源单独作用时,电路中的电流、电压参考方向如与原电路中的参考方向相同,叠加时取正,否则取负。

④ 功率不能用叠加定理计算,必须用叠加后的电压、电流计算功率。

(2) 齐性原理(齐次定理)

齐性原理可以表述为:在线性电路中,当所有激励同时增大 k 倍(缩小为原来的 $1/k$)时,响应也相应增大 k 倍(缩小为原来的 $1/k$)。

应用齐性原理要注意:

① 激励是指独立电源;

② 当电路中只有一个激励时,响应与激励成正比。

(3) 替代定理

替代定理可以表述为:在给定的任意一个线性或非线性的电路中,若第 k 条支路的电压 u_k 和电流 i_k 为已知,那么该支路可以用一个电压等于 u_k 的电压源,或一个电流等于 i_k 的电流源,或一个电阻值等于 u_k/i_k 的电阻替代,替代后电路中各支路电压和电流均保持原值。

替代时要注意:不能形成电压源回路,也不能形成电流源割集。

2. 戴维南定理和诺顿定理

(1) 戴维南定理

戴维南定理可以表述为:一个含独立电源、线性电阻和受控源的一端口网络,对外电路来说,可以用一个电压源和电阻的串联组合等效替代,此电压源的电压等于一端口网络的开路电压,电阻等于一端口网络中全部独立电源置零的输入电阻。

(2) 诺顿定理

诺顿定理可以表述为:一个含独立电源、线性电阻和受控源的一端口网络,对外电路来说,可以用一个电流源和电导的并联组合等效替代,电流源的电流等于该一端口网络的短路电流,电导等于一端口网络中全部独立源置零后的输入电导。

戴维南定理和诺顿定理又称为等效电源定理。它们只适用于线性电路,不适用于非线性电路。但外电路(待研究支路)可以是线性或非线性、有源或无源的均可。在使用中还应注意,含源一端口网络与待研究支路之间无任何耦合或受控关系。

应用这两条定理的一般步骤为

① 断开待研究支路或将待研究支路短路,分别求得开路电压 u_{oc} 或短路电流 i_{sc};

② 让一端口网络中全部独立源置零,求输入电阻 R_i 或输入电导 G_i,求法有以下几种:

a. 对于不含受控源的一端口网络,在独立源全部置零后采用串、并联或Y形与△形等效变换求得等效电阻(或等效电导)。

b. 对于含有受控源的一端口网络,在独立源全部置零后采用在端口外加电源法,找出端口电压 u 与端口电流 i 的关系 $R_i=\dfrac{u}{i}$,$G_i=\dfrac{i}{u}$,这种方法称为输入法。

c. 求出含源一端口网络的开路电压 u_{oc} 和短路电流 i_{sc},其等效电阻为开路电压和短

路电流的比值，即 $R_{\mathrm{i}}=\dfrac{u_{\mathrm{oc}}}{i_{\mathrm{sc}}}$，$G_{\mathrm{i}}=\dfrac{i_{\mathrm{sc}}}{u_{\mathrm{oc}}}$，这种方法称为开路短路法。注意，当 $u_{\mathrm{oc}}=0$（或 $i_{\mathrm{sc}}=0$）时，此法不适用。

除了用上面方法分别求出 u_{oc} 和 R_{i} 外，还可以用一步法同时求出开路电压 u_{oc} 和输入电阻 R_{i}。具体过程见后例 3-4。

③ 画出戴维南或诺顿等效电路，接上待研究支路，求解待求量。

3. 最大功率传输定理

当含源一端口网络用开路电压 u_{oc} 和输入电阻 R_{i} 串联组合替代后，在端口接上可调负载电阻 R_{L}，当 $R_{\mathrm{L}}=R_{\mathrm{i}}$ 时，负载电阻 R_{L} 可以从一端口网络获得最大功率，该最大功率 $P_{\max}=\dfrac{u_{\mathrm{oc}}^2}{4R_{\mathrm{L}}}$。这是最大功率传输定理在电阻电路中的表述。

如含源一端口网络用诺顿电路替代，则 $P_{\max}=\dfrac{1}{4}i_{\mathrm{sc}}^2R_{\mathrm{L}}$。

4. 特勒根定理和互易定理

（1）特勒根定理

特勒根定理可以表述为：两个具有相同拓扑结构的电路 N 和 $\hat{\mathrm{N}}$，若按同样的顺序指定它们的支路电流和支路电压，并有相同的关联参考方向，如分别设为

$$\mathrm{N}:\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_k & \cdots \\ u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_k & \cdots \end{pmatrix} \qquad \hat{\mathrm{N}}:\begin{pmatrix} \hat{i}_1 & \hat{i}_2 & \hat{i}_3 & \cdots & \hat{i}_k & \cdots \\ \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 & \cdots & \hat{u}_k & \cdots \end{pmatrix}$$

则任一时刻，有

$$\sum u_k i_k = 0 \tag{3-1}$$

$$\sum u_k \hat{i}_k = 0 \tag{3-2}$$

$$\sum \hat{u}_k i_k = 0 \tag{3-3}$$

式(3-1)是特勒根定理的第一种形式，它表明任何一个电路的全部支路吸收的功率之代数和等于零，是功率守恒原理的体现。

式(3-2)和式(3-3)是特勒根定理的第二种形式，它表明在两个具有相同拓扑结构的电路中，一个电路的支路电压和另一个电路的支路电流，或者是同一电路在不同时刻的相应支路电压和支路电流所必须遵循的数学关系。由于它们仍具有功率之和的形式，有时又称为“拟功率定理”。

特勒根定理对任何具有线性、非线性、时不变、时变元件的集总电路都适用。

（2）互易定理

互易定理可以表述为：对一个仅含线性电阻的电路，在单一激励下产生响应，当激励和响应互换位置时，响应与激励的比值保持不变。

激励和响应可能是电压或电流，所以互易定理有三种不同形式。需要指出，互易定理

只适用于线性电路,不适用于非线性电路,且在激励与响应互换位置时,电路其余结构不能发生变化。在含受控源网络中,由于互易时网络结构要变化,故一般不满足互易定理。

本章重点难点

以上各定理都是线性电路的重要定理,其中较常用的是叠加定理,用得最多的是戴维南定理。对于仅由独立源组成的网络,根据两个定理进行分析并不困难。但当网络含有受控源,运用叠加定理时,不同独立源单独作用或分组作用都会带来控制量的变化;而求戴维南输入电阻时,要计及受控源的影响,必须采用输入法或开路短路法。这些往往会使初学者顾此失彼,难以掌握,是本章的难点。需要综合应用各定理时,难度往往更大。

3.3 典型题解析

例 3-1 电路如图 3-1(a)所示,用叠加定理求电压 U_{ab}。

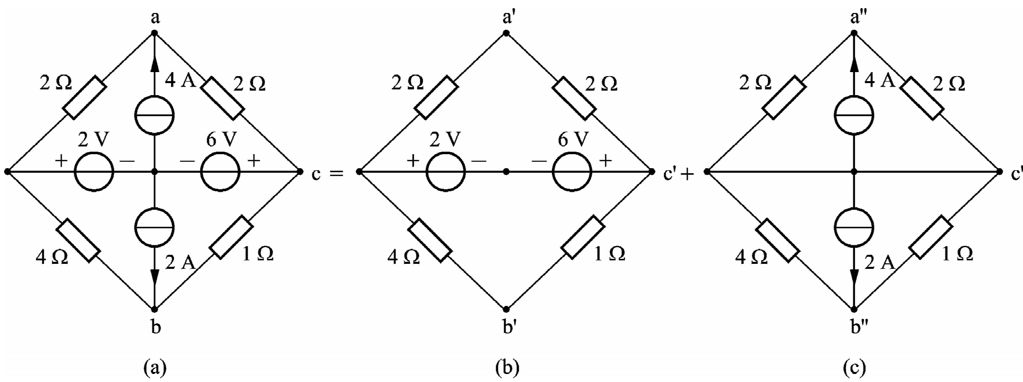

图 3-1

解 应用叠加定理时,电源分别单独作用,也可分组作用。本题将电压源和电流源分两组作用,如图 3-1(b)、(c)所示。

由图 3-1(b)有

$$U_{a'b'}=U_{a'c'}+U_{c'b'}=\frac{2-6}{2+2}\times 2+\frac{6-2}{1+4}\times 1=-1.2\ \text{V}$$

由图 3-1(c)有

$$U_{a''b''}=U_{a''c''}+U_{c''b''}=\frac{1}{2}\times 4\times 2-\frac{2}{4+1}\times 4\times 1=2.4\ \text{V}$$

根据叠加定理,得

$$U_{ab}=U_{a'b'}+U_{a''b''}=-1.2+2.4=1.2\ \text{V}$$

例 3-2 用叠加定理求图 3-2(a)所示电路中的 i_x 和 u_x。

解 用叠加定理求解,电压源和电流源分别作用,受控源保留,如图 3-2(b)、(c)所示。控制量分别为 i_{x1},i_{x2},受控量相应为 $2i_{x1}$ 和 $2i_{x2}$。

由图 3-2(b)有 $$i_{x1}=\frac{10-2i_{x1}}{2+1}$$

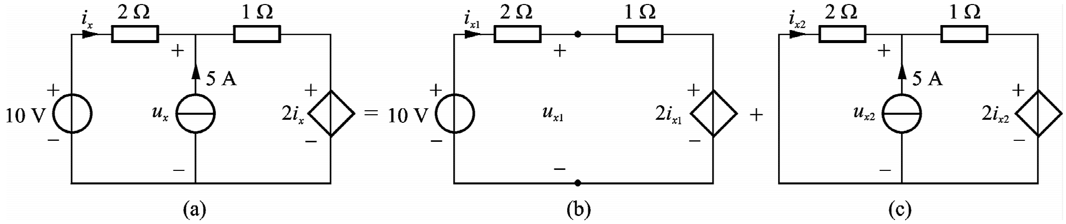

图 3-2

可解得 $i_{x1}=2\ \text{A} \qquad u_{x1}=10-2i_{x1}=6\ \text{V}$

由图3-2(c),根据KVL有

$$2i_{x2}+(i_{x2}+5)\times 1+2i_{x2}=0 \quad \text{(也可用 KCL 求)}$$

可解得 $i_{x2}=-1\ \text{A} \qquad u_{x2}=-2i_{x2}=2\ \text{V}$

根据叠加定理有

$$i_x=i_{x1}+i_{x2}=2-1=1\ \text{A}$$

$$u_x=u_{x1}+u_{x2}=6+2=8\ \text{V}$$

例 3-3 图3-3(a)所示是由线性电阻组成的无限伸展的网络,其中每个电阻均为 R,求节点ab间的等效电阻。

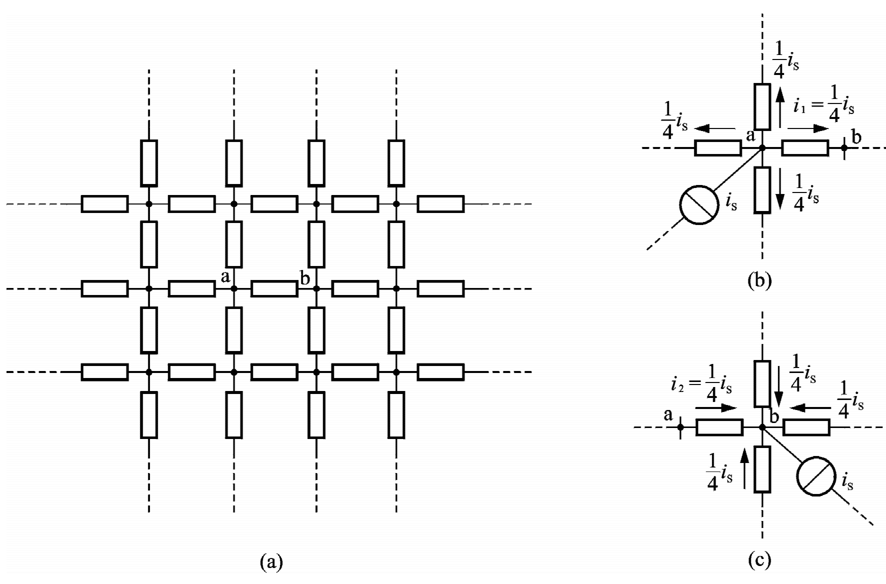

图 3-3

解 将无限伸展网络看作是以a,b为端子的一端口网络。若在a,b端加一电流源 i_S,并计算出a,b端的电压 u_{ab},则根据定义,等效电阻

$$R_{ab}=\frac{u_{ab}}{i_S}$$

在a,b端加了电流源 i_S 后,还无法求出 u_{ab}。如将电流源分解为两个(参见电流源转

移原理),其中一个电流 i_S 流入节点 a,而在无限远处收集电流,如图 3-3(b)所示;另一电流源 i_S 由节点 b 流出,流向无限远处,如图 3-3(c)所示。

由图 3-3(b)可见,由于网络结构对称(因网络无限伸展),所以流经与节点 a 相连的 4 个电阻中电流相等,方向如图 3-3(b)所示,可得流过 a,b 间的电流 $i_1=\frac{1}{4}i_S$;同理,由图 3-3(c)可得流经 a,b 间的电流 $i_2=\frac{1}{4}i_S$。根据叠加定理,流经 a,b 的总电流

$$i_{ab}=i_1+i_2=\frac{1}{2}i_S$$

故得 a,b 间的电压

$$u_{ab}=\frac{1}{2}Ri_S$$

可得 a,b 间的等效电阻

$$R_{ab}=\frac{u_{ab}}{i_S}=\frac{\frac{1}{2}Ri_S}{i_S}=\frac{1}{2}R$$

例 3-4　求图 3-4(a)所示电路 a,b 端的戴维南等效电路。

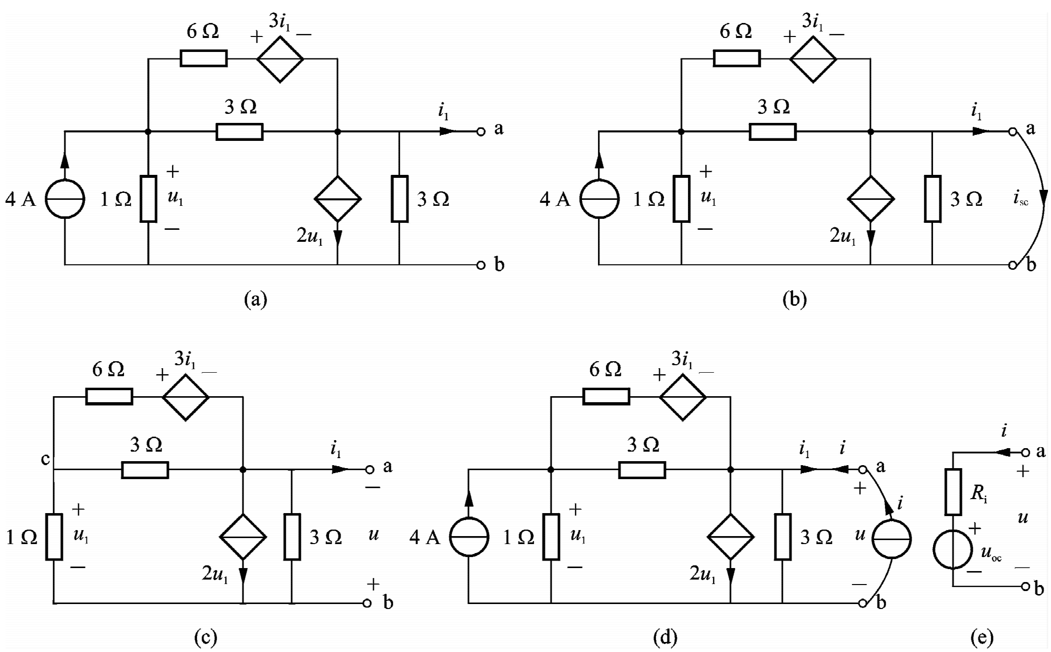

图　3-4

解　先求开路电压 $u_{oc}=u_{ab}$,因 a,b 端开路,$i_1=0$,所以受控电压源 $3i_1=0$。用节点法,选 b 为参考点,则

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)u_1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)u_a=4$$

$$-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)u_1+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)u_a=-2u_1$$

化简得
$$1.5u_1-0.5u_a=4$$
$$1.5u_1+\frac{5}{6}u_a=0$$

可解得
$$u_a=-3\ \text{V}$$

所以
$$u_{oc}=-3\ \text{V}$$

再求输入电阻 R_i，分别用几种方法求。

（1）开路短路法。将 a，b 端短接，设电流为 i_{sc}，如图 3-4(b)所示，由图 3-4(b)可见 $i_1=i_{sc}$。对节点 a

$$\frac{u_1-3i_{sc}}{6}+\frac{u_1}{3}=2u_1+i_{sc}$$

对节点 b 有
$$\frac{u_1}{1}+2u_1+i_{sc}=4$$

化简得
$$u_1+i_{sc}=0$$
$$3u_1+i_{sc}=4$$

可解得
$$i_{sc}=-2\ \text{A}$$

所以
$$R_i=\frac{u_{oc}}{i_{sc}}=\frac{-3}{-2}=1.5\ \Omega$$

（2）输入法。独立源置零，电流源开路，在端口加电压 u，如图 3-4(c)所示。对节点 b 有

$$i_1=\frac{u}{3}-2u_1-\frac{u_1}{1}=\frac{u}{3}-3u_1 \tag{1}$$

对节点 c 有

$$\frac{u_1}{1}+\frac{u_1+u}{3}+\frac{u_1+u-3i_1}{6}=0 \tag{2}$$

由式(2)有
$$u_1=\frac{i_1-u}{3}$$

代入式(1)得

$$i_1=\frac{u}{3}-3\,\frac{i_1-u}{3}=\frac{u}{3}-i_1+u$$

$$2i_1=\frac{4}{3}u$$

所以
$$R_i=\frac{u}{i_1}=\frac{2\times 3}{4}=1.5\ \Omega$$

注意　如果 a 端为电压 u 的“+”极，则 $R_i=\dfrac{u}{-i_1}$。

（3）一步法。原电路不变，在端口加电流源 i（也可加电压源 u），端口电压为 u，如图 3-4(d)所示。写出端口的电压电流表达式，可同时求得开路电压 u_{oc} 和输入电阻 R_i，其原理由图 3-4(e)可知，端口电压电流表达式为

$$u=u_{oc}+R_i i$$

由表达式可见，等式右边的常数项为开路电压，电流 i 前面的系数为 R_i。对图 3-4(d)，选

b 点为参考点,列节点电压方程为

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)u_1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)u=4+\frac{3i_1}{6}$$

$$-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)u_1+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)u=i-\frac{3i_1}{6}-2u_1$$

$$i_1=-i$$

化简可得

$$1.5u_1-0.5u=4-\frac{i}{2} \tag{3}$$

$$1.5u_1+\frac{5}{6}u=1.5i \tag{4}$$

式(4)－式(3)得

$$\frac{8}{6}u=-4+2i$$

即

$$u=-3+1.5i$$

所以可得

$$u_{oc}=-3\ \text{V}$$

$$R_i=1.5\ \Omega$$

另外,也可对电路中受控电压源和受控电流源支路先进行等效变换,然后再求 u_{oc} 和 R_i,这样会简单些。但要注意,控制量不能随便变掉。

例 3-5 试用戴维南定理求图 3-5(a)中的电压 U。

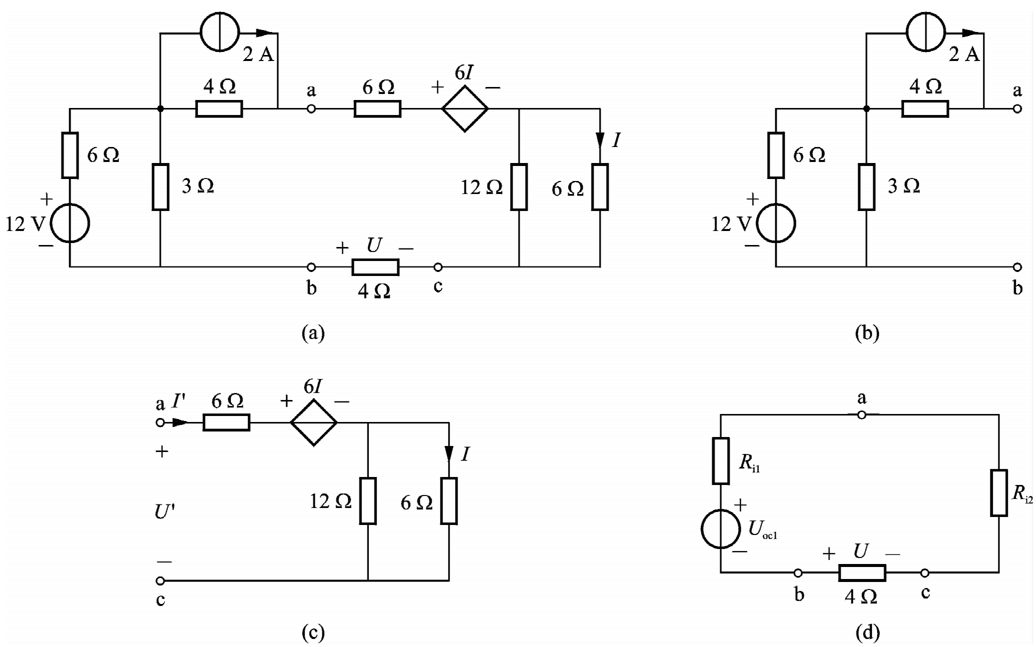

图 3-5

解 断开 b,c 间电阻,为方便起见,可分别求 a,b 端左边部分和 a,c 端右边部分的戴维南等效电路,分别如图 3-5(b)及图 3-5(c)所示。由图 3-5(b)有

$$U_{oc1}=U_{ab}=2\times 4+\frac{12}{6+3}\times 3=12\ \text{V}$$

$$R_{i1}=4+\frac{6\times 3}{6+3}=6\ \Omega$$

由于图 3-5(c)含受控源电路，无独立源，所以 $U_{oc2}=0$。用输入法求 R_{i2}，在 a，c 端加电压 U'，则有

$$U'=6I'+6I+6I=6I'+12\times\frac{I'}{12+6}\times 12=14I'$$

所以
$$R_{i2}=\frac{U'}{I'}=14\ \Omega$$

将左、右部分的戴维南等效电路和待求支路接好，如图 3-5(d)所示，则有

$$U=-\frac{U_{oc1}}{R_{i1}+R_{i2}+4}\times 4=\frac{-12}{6+14+4}\times 4=-2\ \text{V}$$

例 3-6　试求图 3-6(a)、(b)所示一端口网络的戴维南或诺顿等效电路。

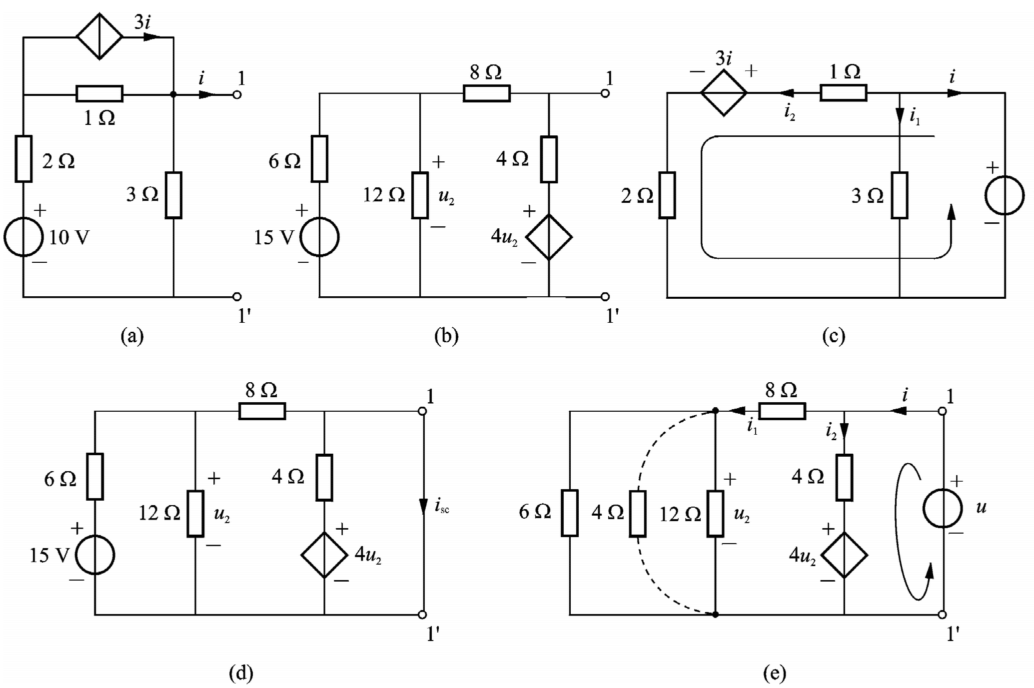

图　3-6

解　对于图 3-6(a)所示电路，开路时 $i=0$，所以受控电流源 $3i=0$，受控电流源所在处开路，可求得开路电压

$$u_{oc}=\frac{10}{2+1+3}\times 3=5\ \text{V}$$

求输入电阻时，独立源置零，有伴受控电流源等效变换为受控电压源，并设两支路的电流分别为 i_1，i_2，如图 3-6(c)所示，则有

$$i=-(i_1+i_2)=-\left(\frac{u}{3}+\frac{u-3i}{3}\right)=-\left(\frac{2}{3}u-i\right)$$

$$-\frac{2}{3}u=0i$$

所以
$$R_i=\frac{u}{-i}=0\ \Omega$$

图3-6(a)所示电路的戴维南等效电路是一个5 V理想电压源,无诺顿等效电路。

对图3-6(b)所示电路,求开路电压,选1′为参考点,则$u_{oc}=u_1$,节点电压方程为

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}\right)u_2-\frac{1}{8}u_{oc}=\frac{15}{6}$$

即
$$-\frac{1}{8}u_2+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)u_{oc}=\frac{4u_2}{4}$$

整理为
$$\frac{9}{24}u_2-\frac{1}{8}u_{oc}=\frac{15}{6} \tag{1}$$

$$-\frac{9}{8}u_2+\frac{3}{8}u_{oc}=0 \tag{2}$$

式(1)×(−3)得
$$-\frac{9}{8}u_2+\frac{3}{8}u_{oc}=-\frac{15}{2} \tag{3}$$

式(3)与式(2)矛盾,无法求得开路电压,到此并不能说此题无解。下面转而求1-1′端口的短路电流i_{sc},如图3-6(d)所示。选1′为参考点,由于短路,$u_1=0$,节点电压方程为

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}\right)u_2-\frac{1}{8}\times 0=\frac{15}{6}$$

解得
$$u_2=\frac{20}{3}\ \mathrm{V}$$

所以
$$i_{sc}=\frac{u_2}{8}+\frac{4u_2}{4}=\frac{1}{8}\times\frac{20}{3}+\frac{20}{3}=7.5\ \mathrm{A}$$

再求输入电阻(电导)。将独立源置零,6 Ω与12 Ω并联后为4 Ω,用虚线所接4 Ω表示,外加电压u,如图3-6(e)所示,则

$$i=i_1+i_2=\frac{u}{8+4}+\frac{u-4u_2}{4} \tag{4}$$

$$u_2=\frac{u}{8+4}\times 4$$

代入式(4)得

$$i=\frac{u}{12}+\frac{1}{4}u-\frac{u}{12}\times 4=0u$$

所以
$$R_i=\frac{u}{i}=\frac{1}{0}\to\infty$$

$$G_i=\frac{i}{u}=0$$

由此可得图3-6(b)所示电路的等效电路是一个7.5 A理想电流源,无戴维南等效电路。

注意 有时还会遇到含源一端口网络的等效电路为一纯电阻(电导)情况(即开路电压为零或短路电流为零)。此时要注意当开路电压为零时,不能用开路短路法求输入

电阻。

例 3-7　电路如图 3-7(a)所示，试求 $R=?$ 时可以获得最大功率，该最大功率值为多少？

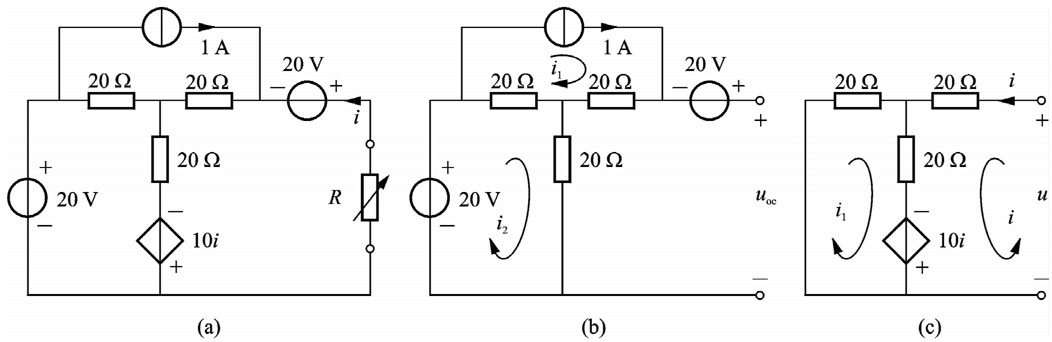

图　3-7

解　要求 $R=?$ 可以获得最大功率，实际即求移去 R 后的无源一端口网络的输入电阻 R_i，要求最大功率是多少，先求出开路电压即可。

先求开路电压。因开路 $i=0$，受控电压源等于零。用回路分析法，设回路电流如图 3-7(b)所示，回路方程为

$$i_1 = 1\ \text{A}$$

$$40i_2 - 20i_1 = 20$$

可得

$$i_2 = 1\ \text{A}$$

所以

$$u_{oc} = 20 + 20 \times i_1 + 20 \times i_2 = 60\ \text{V}$$

再求输入电阻。将独立源置零，外加电压 u，由图 3-7(c)列出网孔方程为

$$40i - 10i + 20i_1 = u$$

$$20i - 10i + 40i_1 = 0$$

整理得

$$30i + 20i_1 = u$$

$$10i + 40i_1 = 0$$

消去 i_1 得

$$50i = 2u$$

$$R_i = \frac{u}{i} = 25\ \Omega$$

所以，当 $R=R_i=25\ \Omega$ 时可获得最大功率，最大功率 P_{max} 为

$$P_{max} = \frac{u_{oc}^2}{4R_i} = \frac{60^2}{4 \times 25} = 36\ \text{W}$$

例 3-8　图 3-8(a)所示电路，U_S 为直流电压源。

(1) 欲使 $I_o=\frac{1}{10}I$，则 R_X 应取何值？

(2) 图 3-8(a)电路常称为桥式电路，欲使 $I_o=0$，则 R_1、R_2、R_3、R_4 应如何配置？

(1) **解法 1**　假设变量 I_1，各支路电流如图 3-8(b)所示，由 KVL 列出方程

$$R_2 I_1 + R_4(I_0 + I_1) - R_3(0.9I - I_1) - R_1(I - I_1) = 0$$