第3章 控制系统时域分析

3.1 引 言

系统的时域分析指对控制系统的稳定性、暂态性能以及稳态性能分析。稳定性是控制系统工作的前提，不稳定的系统没有任何工程价值。对于不同的系统，例如线性的、非线性的、定常的、时变的系统，稳定性的定义也不同，本章仅讨论线性定常单输入单输出系统的稳定性。从控制系统分析和设计的角度来说有绝对稳定性和相对稳定性，绝对稳定指系统是否稳定，一旦系统是稳定的，则人们更关心其稳定的程度，这就是相对稳定性，相对稳定性一般用稳定裕度衡量。当系统受外加作用时引起的输出随时间的变化规律，称其为系统的时域响应，分为暂态响应和稳态响应。暂态响应是指系统输出量中当时间趋于无穷时趋于零的那部分时间响应，工程上一般定义暂态响应为从初始状态到达某一规定值(例如偏离终值的误差值在终值的5%或2%以内)并且以后不再超过此值的这一部分时间响应过程，它反映控制系统的快速性和阻尼程度，由于系统物体的惯性都是无法避免的，因此人们常常可以观察到暂态现象。而稳态响应则是整个响应在暂态响应消失后余下的那部分响应，主要指系统输出量的最终位置，它反映控制系统的准确性或控制精度，控制系统是用稳态误差和误差系数的计算来表示控制精度的。

本章主要分析一阶和二阶线性定常系统在典型输入信号激励下的时域响应以及对应的时域性能指标，详细介绍单输入单输出线性定常系统稳定性判断的劳斯—赫尔维茨判据，也对稳定的控制系统的稳态误差以及误差系数的分析计算进行详细的叙述，并介绍提高控制系统精度的一般工程方法。对高阶线性系统的分析在一定条件下可以用主导极点的模型降阶方法来近似。本章还介绍如何利用MATLAB工具分析线性系统的性能。

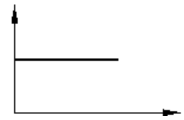
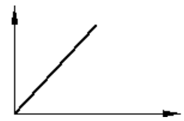
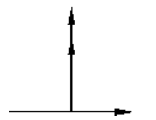
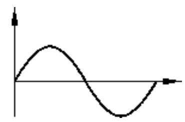
3.1.1 典型输入信号

控制系统性能评价分为暂态性能指标和稳态性能指标两大类。对于同一系统，在不同的输入信号作用下会产生不同的输出响应，因此为了求解系统的时间响应，必须了解输入信号的解析表达式。然而，在一般情况下，控制系统的外加输入信号具有随机性而无法预先确定。因此，在分析和设计控制系统时，需要有一个对控制系统的性能进行比较的基准，这个基准就是系统对预先规定的具有典型意义的实验信号激励下的响应。为了评价控制系统的性能，需要选择若干个典型输入信号；另外，一个复杂的信号通常可看作是几个简单典型信号的合成。

所谓典型输入信号，是指控制系统分析与设计中常常遇到的一些输入信号，也是在数学

描述上加以理想化的一些基本输入函数。选取典型信号应满足如下条件：首先，输入信号的形式应反映系统响应的实际输入；其次，输入信号在形式上应尽可能的简单，应当是实验室或仿真可以获得以便于对系统响应进行分析的信号；另外，应选取能使系统工作在最不利情况下的激励信号作为输入信号。控制系统中常用的典型输入信号有：单位阶跃函数、单位斜坡（速度）函数、单位抛物线（加速度）函数、单位脉冲（冲激）函数和正弦函数等，如表 3.1所示。

表 3.1　常用典型输入函数

名　　称	时　　域	复　　域	信　号　图
单位阶跃（unit step）	$1(t),\quad t\geqslant 0$	$\frac{1}{s}$	
单位斜坡（ramp）	$t,\quad t\geqslant 0$	$\frac{1}{s^2}$	
单位抛物线（parabolic）	$\frac{1}{2}t^2,\quad t\geqslant 0$	$\frac{1}{s^3}$	
单位脉冲（pulse）	$\delta(t),\quad t=0$	1	
正弦（sinusoidal）	$A\sin\omega t$	$\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$	

3.1.2 时域性能指标

稳定是系统工作的前提，只有系统是稳定的，分析系统的暂态性能和稳态性能以及性能指标才有意义。控制系统时域性能指标（time response specifications）分为暂态性能指标与稳态性能指标。

1. 暂态性能指标

一般认为阶跃输入对系统来说是最严峻的工作状态，如果系统在阶跃函数作用下的暂态性能满足要求，那么系统在其他形式函数作用下其暂态性能也是令人满意的。为此，通常在阶跃函数作用下，测定或计算系统的暂态性能。

描述稳定的系统在阶跃函数作用下暂态过程随时间 t 变化状况的指标，称为暂态性能指标。如图 3.1 所示为某一控制系统的阶跃响应，其暂态性能指标定义如下：

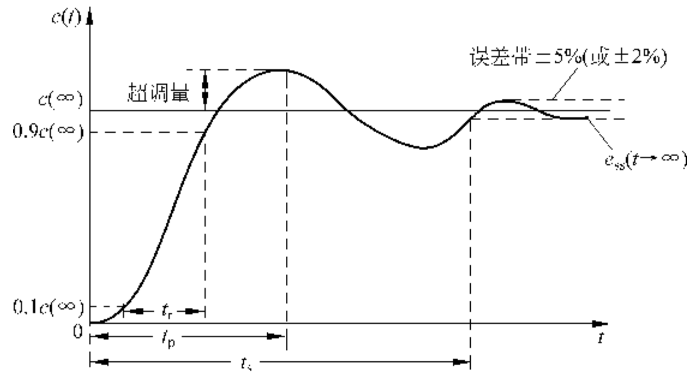


图 3.1 时域性能指标

(1) 调节时间(settling time)t_s:指阶跃响应到达并保持在终值的±5%(或±2%)的误差带内所需的时间。

(2) 峰值时间(peak time)t_p:响应超过其终值到达第一个峰值所需的时间。

(3) 上升时间(rise time)t_r:响应从终值的10%上升到终值的90%所需的时间。对具有振荡响应的系统,工程上上升时间 t_r 定义为输出从零到第一次上升至终值所需的时间。

(4) 超调量(peak overshoot)$\sigma\%$:响应的最大峰值与终值的差与终值比的百分数,即

$$\sigma\% = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% \tag{3.1}$$

超调量常常用来衡量控制系统的相对稳定性或阻尼程度,一般不希望控制系统有很大的超调。

在实际应用中,以上四个指标可以用来衡量控制系统的暂态特征,一般通过测量系统的阶跃响应,很容易得到这些指标。通常,用 t_p 或 t_r 评价响应速度;用 $\sigma\%$评价系统的相对稳定程度或阻尼程度;用 t_s 同时反映响应速度和阻尼程度的综合性指标。除简单的一、二阶系统外,要精确确定这些暂态性能指标的解析表达式是很困难的。

2. 稳态性能指标

稳态误差 e_{ss}是衡量系统控制精度或抗扰动能力的一种度量。工程上指控制系统进入稳态后($t\to\infty$)期望的输出与实际输出的差值,e_{ss}越小,控制精度越高。

3.2 控制系统时域分析

3.2.1 一阶系统的时域分析

可以用一阶微分方程描述的系统,称为一阶系统。一阶系统在控制工程实践中十分常见,有些高阶系统的特性,常可用一阶系统的特性近似表征。

考察如图 3.2 所示的 RC 电路，$c(t)$是电容器 C 两端的电压。该电路系统的数学模型为一阶常微分方程

$$T\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}+c(t)=r(t)$$

其中，$T=RC$ 为时间常数，控制系统方框图如图 3.3 所示。其传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+Ts} \tag{3.2}$$

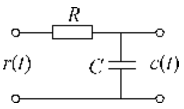


图 3.2　RC 电路

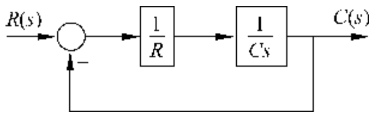


图 3.3　RC 电路方框图

1. 一阶系统的单位阶跃响应

当输入信号为单位阶跃信号即 $r(t)=1(t)$，$t\geqslant 0$ 时，系统的响应 $c(t)$ 称为单位阶跃响应。将单位阶跃输入的象函数 $R(s)=1/s$ 代入式(3.2)，并对输出取拉普拉斯反变换得到该一阶系统的单位阶跃响应

$$c(t)=1-\mathrm{e}^{-t/T},\quad t\geqslant 0 \tag{3.3}$$

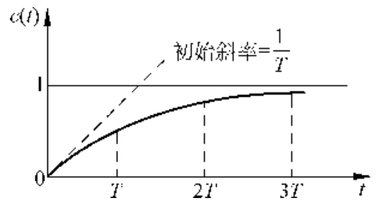


图 3.4　一阶系统单位阶跃响应

由式(3.3)绘出的系统单位阶跃响应为以指数规律上升到终值 1 的曲线，如图 3.4 所示。其中，$c(T)=0.632$；$c(2T)=0.865$；$c(3T)=0.950$；$c(4T)=0.982$。显然按照 5%或 2%的误差带准则有调节时间 $t_s=(3\sim4)T$(5%～2%误差带)，而 t_p、$\sigma\%$不存在。

综上所述，时间常数 T 反映系统响应过程的快慢，T 越小，系统响应越快；反之，系统响应越慢。

2. 一阶系统的单位脉冲响应

当输入信号为单位脉冲或单位冲激信号即 $r(t)=\delta(t)$时，系统的响应称为单位脉冲或单位冲激响应。因为理想单位脉冲函数的拉普拉斯变换为 1，所以单位脉冲响应的拉普拉斯变换与系统的闭环传递函数相同，即

$$C(s)=\Phi(s)R(s)\big|_{r(t)=\delta(t)}=\frac{1}{1+Ts}$$

两边进行拉普拉斯反变换，得

$$c(t)=\frac{1}{T}\mathrm{e}^{-t/T} \tag{3.4}$$

由式(3.4)可知，一阶系统的单位脉冲响应是非周期的单调递减函数，当 $t=0$ 时，响应取最大值 $1/T$；当 $t\to\infty$时，响应的幅值衰减为零。根据给出的误差带宽度可以求出调节时间 t_s，通常取 $t_s=(3\sim4)T$。

一阶系统的单位脉冲响应如图 3.5 所示。

3. 一阶系统的单位斜坡响应

当输入信号为单位斜坡或速度信号即 $r(t)=t, t\geqslant 0$ 时，系统的响应称作单位斜坡响应。因为单位斜坡输入的拉普拉斯变换为 $R(s)=1/s^2$，所以由拉普拉斯反变换得到该一阶系统的单位斜坡时域响应表达式为

$$c(t) = (t - T) + T\mathrm{e}^{-t/T} \tag{3.5}$$

式(3.5)表明，一阶系统的单位斜坡响应可分为暂态分量和稳态分量两个部分，其中 $T\mathrm{e}^{-t/T}$ 为暂态分量，随时间的增加而逐渐衰减为零；$t-T$ 为稳态分量。一阶系统的单位斜坡响应如图 3.6 所示。

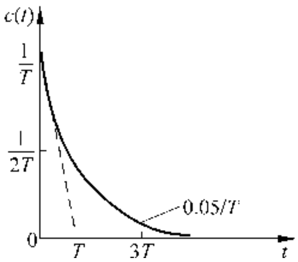


图 3.5　一阶系统单位脉冲响应

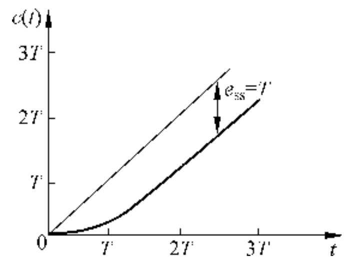


图 3.6　一阶系统单位斜坡响应

一阶系统单位斜坡响应的稳态误差 $e_{\mathrm{ss}}=\lim\limits_{t\to\infty}(r(t)-c(t))=T$，$T$ 越小跟踪准确度越高。

4. 一阶系统的单位抛物线响应

当输入信号为单位抛物线或单位加速度信号即 $r(t)=t^2/2, t\geqslant 0$ 时，因为单位抛物线输入信号的拉普拉斯变换为 $R(s)=1/s^3$，所以由拉普拉斯反变换求得一阶系统的单位抛物线的时域响应表达式为

$$c(t) = \frac{1}{2}t^2 - Tt + T^2(1 - \mathrm{e}^{-t/T}) \tag{3.6}$$

系统跟踪误差为

$$e(t) = r(t) - c(t) = Tt - T^2(1 - \mathrm{e}^{-t/T})$$

因此 $\lim\limits_{t\to\infty} e(t)=\infty$，即跟踪误差随时间增大而增大直至无穷大，故一阶系统不能实现对加速度输入函数的跟踪。

3.2.2 典型二阶系统的时域分析

如果动态系统的数学模型为二阶微分方程，统称为二阶系统。在控制工程中，二阶系统应用广泛，而且许多高阶系统在一定条件下，可以近似用二阶系统的特性来表征。因此，二阶系统的性能分析，在自动控制理论中有着重要的地位。

第 2 章分析的位置随动系统，其简化的数学模型为

$$T_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}^2\theta_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} + K\theta_{\mathrm{c}} = K\theta_{\mathrm{r}}$$

闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{\theta_c(s)}{\theta_r(s)}=\frac{K}{T_m s^2+s+K}$$

将上式化为标准的典型二阶系统形式

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{3.7}$$

其相应的方框图如图 3.7 所示，其中，无阻尼振荡频率（undamping natural frequency）$\omega_n=\sqrt{\frac{K}{T_m}}$，阻尼比（damping factor）$\zeta=\frac{1}{2\sqrt{T_m K}}$。

典型二阶系统特征方程为

$$s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0 \tag{3.8}$$

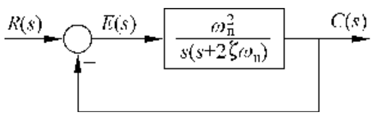


图 3.7　典型二阶系统

如果阻尼比 $\zeta<1$，于是特征根可写为

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_d=-\sigma\pm j\omega_d \tag{3.9}$$

其中，特征根的实部为 $\sigma=\zeta\omega_n$，阻尼振荡频率（damped natural frequency）

$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\qquad(\zeta<1)$$

1. 典型二阶系统的单位阶跃响应

典型二阶系统特征根的性质主要取决于 ζ 值的大小，ζ 值的大小决定了系统的阻尼程度。ζ 在不同范围取值时，二阶系统的特征根在 s 平面上的位置不同，典型二阶系统的时间响应对应着不同的运动规律。

（1）欠阻尼（$0<\zeta<1$）

此时典型二阶系统在左半 s 平面有一对共轭复根，如图 3.8(a)所示。

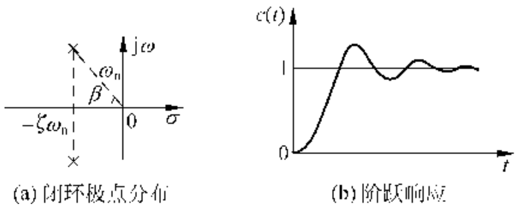


图 3.8　欠阻尼系统

当输入为单位阶跃信号，$R(s)=1/s$ 时，由式(3.7)得到

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}-\frac{\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}$$

两边分别取拉普拉斯反变换得

$$\begin{aligned}c(t)&=1-e^{-\zeta\omega_n t}\left[\cos\omega_d t+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right]\\&=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\beta),t>0\end{aligned} \tag{3.10}$$

其中，$\beta=\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ 或 $\beta=\arccos\zeta$。

式(3.10)表明,欠阻尼典型二阶系统的单位阶跃响应由两部分组成：稳态响应分量为1,表明典型二阶系统在单位阶跃函数作用下不存在稳态误差；暂态分量为阻尼正弦振荡项,其振荡频率为 ω_d；暂态分量衰减的快慢程度取决于包络线 $1\pm\dfrac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ 的收敛速度。式(3.10)所对应的典型二阶系统欠阻尼情况下的单位阶跃响应如图 3.8(b)所示。

(2) 无阻尼($\zeta=0$)

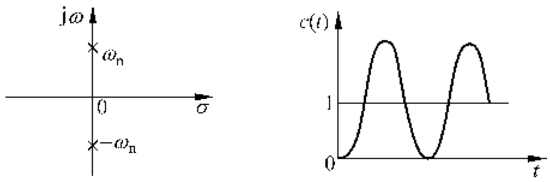
此时典型二阶系统在 s 平面上有一对纯虚根

$$s_{1,2}=\pm j\omega_n$$

由式(3.7)并对输出取拉普拉斯反变换,得到其单位阶跃响应为

$$c(t)=1-\cos\omega_n t,\quad t\geqslant 0 \tag{3.11}$$

无阻尼系统的闭环极点分布和单位阶跃响应如图 3.9 所示,其单位阶跃响应表现为等幅振荡。典型二阶系统的无阻尼响应不存在暂态过程,在阶跃函数作用下,系统立刻进入稳态的等幅振荡过程,振荡频率为系统的自然振荡频率 ω_n。



(a) 闭环极点分布　(b) 阶跃响应

图 3.9　无阻尼系统

(3) 临界阻尼($\zeta=1$)

此时典型二阶系统在左半 s 平面上有一对相等的负实根：$s_{1,2}=-\omega_n$

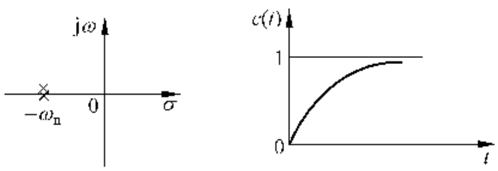
于是,用同样的计算方法得

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2}=\frac{1}{s}-\frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}-\frac{1}{s+\omega_n}$$

两边取拉普拉斯反变换得

$$c(t)=1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t),\quad t\geqslant 0 \tag{3.12}$$

临界阻尼典型二阶系统闭环极点分布和阶跃响应如图 3.10 所示。



(a) 闭环极点分布　(b) 阶跃响应

图 3.10　临界阻尼系统

典型二阶系统的临界阻尼响应是按指数规律单调增加的,没有超调量。经过调节时间 t_s 的调节,系统进入稳态,其稳态分量等于系统的输入量,稳态误差为零。

(4) 过阻尼($\zeta>1$)

此时典型二阶系统在左半 s 平面上有两个不等的负实根

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}=-\frac{\zeta}{T}\pm\frac{1}{T}\sqrt{\zeta^2-1}\stackrel{\text{def}}{=\!=}-\frac{1}{T_1},-\frac{1}{T_2}$$

此时,系统单位阶跃响应的象函数为

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+1/T_1)(s+1/T_2)}$$

其中,$T=\dfrac{1}{\omega_n}$,$T_1=\dfrac{T}{\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}}$,$T_2=\dfrac{T}{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}$,$T_1>T_2$。

对应的时域响应为

$$c(t)=1+\frac{e^{-t/T_1}}{T_2/T_1-1}+\frac{e^{-t/T_2}}{T_1/T_2-1},\quad t\geqslant 0 \tag{3.13}$$

过阻尼典型二阶系统的闭环极点分布和阶跃响应如图 3.11 所示。

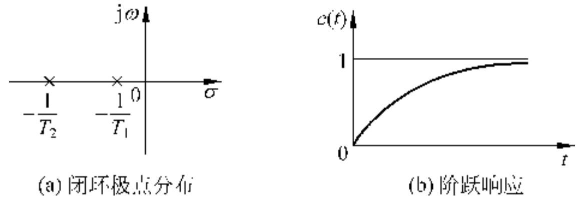


图 3.11 过阻尼系统

由式(3.13)可知,过阻尼情况下,二阶系统可等效为两个惯性环节的串联,时间响应的暂态分量为两个衰减的指数项,响应的稳态分量为 1。响应曲线与临界阻尼一样,也是按指数规律单调增加的,但调节速度更慢。如果两个特征根的绝对值相差很大(3 倍以上),可以将过阻尼二阶系统简化为一阶系统近似分析。

下面以 $\zeta=0,0.3,1,1.5$ 为例,用 MATLAB 解得典型二阶系统单位阶跃响应,程序为

```
clear
Wn = 1; yy = []; t = 0:0.01:12; zet = [0,0.3,1,1.5];
for   z = zet
      if  z == 0,y = 1 - cos(Wn * t);
      elseif  (z>0&z<1);
           Wd = Wn * sqrt(1 - z ^2); th = atan(sqrt(1 - z ^2)/z)
           y = 1 - exp( - z * Wn * t). * sin(Wd * t + th)/sqrt(1 - z ^2);
      elseif  z == 1,y = 1 - (1 + Wn * t). * exp( - Wn * t);
      elseif  z>1,
               dd = sqrt(z ^2 - 1); lam1 = - z - dd; lam2 = - z + dd;
               y = 1 - 0.5 * Wn * (exp(lam1 * t)/lam1 - exp(lam2 * t)/lam2)/dd;
      end
      yy = [yy; y];
end
plot(t,yy),grid
```

对应的单位阶跃响应曲线如图 3.12 所示。

2. 欠阻尼典型二阶系统的时域性能指标

根据系统时域性能指标的定义和典型二阶系统欠阻尼单位阶跃响应的表达式,可以导

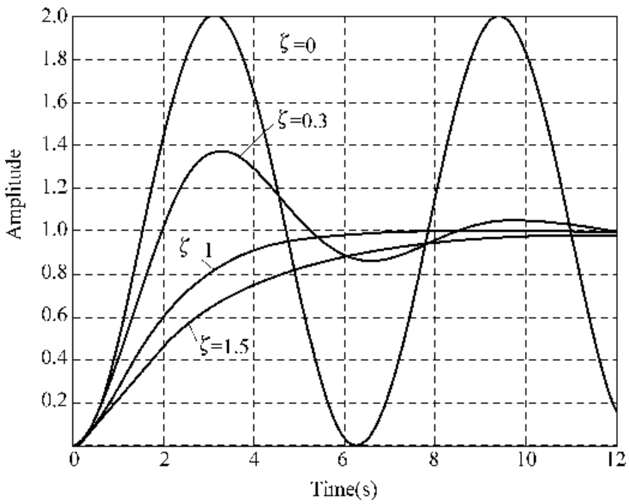


图 3.12 典型二阶系统单位阶跃响应

出典型二阶线性定常系统性能指标的计算式，此计算式是通过其特征参数 ζ 和 ω_n 表达的，但要注意的是对高阶系统很难得出精确解析的性能指标计算公式，工程上一般可采用计算机仿真技术获得。

（1）上升时间 t_r

在欠阻尼典型二阶系统的单位阶跃响应式(3.10)中，令 $c(t_r)=1$，解得上升时间为

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \tag{3.14}$$

其中，$\beta=\arccos\zeta$，$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$。

由式(3.14)可见，当阻尼比 ζ 一定时，阻尼角 β 不变，上升时间 t_r 与自然振荡频率 ω_n 成反比；当自然振荡频率 ω_n 一定时，随着阻尼比 ζ 的减小，上升时间 t_r 减小。

（2）峰值时间 t_p

在欠阻尼典型二阶系统的单位阶跃响应式(3.10)中，令导数 $\dot{c}(t)|_{t=t_p}=0$，即 $\sin(\omega_d t+\beta)\cos\beta-\cos(\omega_d t+\beta)\sin\beta=0$，整理得

$$\sin\omega_d t = 0$$

解得第一个峰值时间为

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \tag{3.15}$$

其中，$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$。

由峰值时间公式可见，当阻尼比 ζ 一定时，峰值时间 t_p 与自然振荡频率 ω_n 成反比，随着 ω_n 的增大，t_p 减小；当自然振荡频率 ω_n 一定时，随着阻尼比 ζ 的增大，t_p 增大。

（3）超调量 $\sigma\%$

在欠阻尼典型二阶系统的单位阶跃响应中将峰值时间 $t_p=\dfrac{\pi}{\omega_d}$ 代入式(3.10)中得输出量的最大值

$$c(t_p) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\pi + \beta)$$

又由于 $\sin(\pi+\beta)=-\sqrt{1-\zeta^2}$，代入上式得

$$c(t_p)=1+e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

故，由超调量定义公式得到欠阻尼典型二阶系统的超调量为

$$\sigma\%=\frac{c(t_p)-1}{1}\times 100\%=e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}\times 100\% \tag{3.16}$$

由式(3.16)可知，超调量 $\sigma\%$ 仅与阻尼比 ζ 有关，而与自然振荡频率 ω_n 无关。当 ζ 减小，则 $\sigma\%$ 增大，t_r、t_p 减小；特别地，当 $\zeta=0$ 时，$\sigma\%=100\%$，当 $\zeta=1$ 时，$\sigma\%=0$。工程上一般选取 $\zeta=0.4\sim0.8$，$\sigma\%$ 介于 25%～1.5%之间。当 $\zeta=0.707$ 时，$\sigma\%=4.3\%$，此时称为工程最佳。

(4) 调节时间 t_s

计算欠阻尼典型二阶系统的单位阶跃响应 $c(t)$ 达到误差为±0.05 或±0.02 时的时间，可用包络线来计算，如图 3.13 所示。

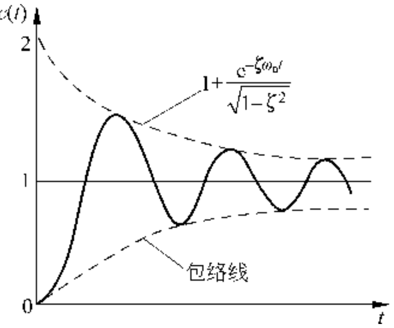


图 3.13 欠阻尼二阶系统的包络线

如果令 Δ 代表实际响应与稳态输出之间的误差，则有

$$\Delta=\left|\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\beta)\right|\leqslant\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

于是由包络线 $\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t_s}=0.05$(±0.05 误差)或 $\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t_s}=0.02$(±0.02 误差)，解得

$$\left.\begin{aligned}t_s&=-\frac{1}{\zeta\omega_n}\ln(0.05\sqrt{1-\zeta^2}),(5\%\text{ 误差})\\ t_s&=-\frac{1}{\zeta\omega_n}\ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2}),(2\%\text{ 误差})\end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

当 ζ 较小时，$\sqrt{1-\zeta^2}\approx1$，于是式(3.17)近似为

$$t_s\approx\frac{3}{\zeta\omega_n}(5\%\text{ 误差})\quad\text{或}\quad t_s\approx\frac{4}{\zeta\omega_n}(2\%\text{ 误差}) \tag{3.18}$$

由调节时间公式(3.18)看出，调节时间与闭环极点的实部 $\zeta\omega_n$ 数值成反比，意味着极点与虚轴之间的距离越远，系统的调节时间就越短，响应越快；或者说当 ω_n 一定时，随着阻尼比 ζ 增大，调节时间 t_s 减小，这与 t_r、t_p 随着 ζ 的增大而增大的情况刚好相反。

综上所述，快速性与系统的阻尼程度之间的性能指标是有矛盾的，设计控制系统时应折中考虑。

(5) 振荡次数 N

定义振荡次数

$$N=\frac{t_s}{T_d} \tag{3.19}$$

其中，$T_d=\frac{2\pi}{\omega_d}=\frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ 为典型二阶系统的阻尼振荡周期时间，$t_s\approx\frac{3\sim4}{\zeta\omega_n}$，考虑到典型二阶系统的超调量可表示为 $\sigma\%=e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}100\%$，代入式(3.19)得到

$$N \approx -\frac{(3 \sim 4)/2}{\ln\sigma\%}$$

工程控制中如果调整控制系统振荡次数为 1.5～2 次，此时，认为控制系统有比较好的暂态性能和稳态性能。

工程过程中也常常设计控制系统的衰减比为 $n=\frac{B_1}{B_3}=4:1$，或衰减率为 $\eta=\frac{B_1-B_3}{B_1}=0.75$，如图 3.14 所示，此时，也认为控制系统有比较好的暂态性能和稳态性能。这一点在后续《过程控制》课程中会进一步学到。

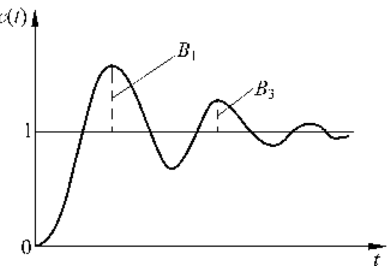


图 3.14 衰减比

3. 典型二阶系统的单位脉冲响应

1）单位脉冲响应

典型二阶系统在单位脉冲信号激励下的输出称为单位脉冲响应。

由于 $\delta(t)=\frac{\mathrm{d}1(t)}{\mathrm{d}t}$，$\mathcal{L}[\delta(t)]=1$，所以典型二阶系统单位脉冲响应的拉普拉斯变换与其传递函数相同，于是有

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[s\cdot G(s)\frac{1}{s}\right] = \frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3.20}$$

其中，$g(t)$为单位脉冲响应，$h(t)$为单位阶跃响应。式(3.20)说明线性定常系统的单位脉冲响应必为单位阶跃响应函数对时间的导数。于是得到以下几种情况下的单位脉冲响应：

(1) 当为欠阻尼($0\leqslant\zeta<1$)时典型二阶系统的单位脉冲响应为式(3.10)的导数，即

$$g(t) = \frac{\omega_\mathrm{n}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_\mathrm{n}t}\sin\omega_\mathrm{d}t \tag{3.21a}$$

其中，$\omega_\mathrm{d}=\omega_\mathrm{n}\sqrt{1-\zeta^2}$。

(2) 当为临界阻尼($\zeta=1$)时，典型二阶系统的单位脉冲响应为式(3.12)的导数，即

$$g(t) = \omega_\mathrm{n}^2 t\mathrm{e}^{-\omega_\mathrm{n}t} \tag{3.21b}$$

(3) 当为过阻尼($\zeta>1$)时，典型二阶系统的单位脉冲响应为式(3.13)的导数，即

$$g(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t/T_1}}{T_1-T_2}+\frac{\mathrm{e}^{-t/T_2}}{T_2-T_1} \tag{3.21c}$$

不同阻尼比情况的单位脉冲响应如图 3.15(a)所示。

2）性能指标

下面进一步讨论欠阻尼典型二阶系统($0<\zeta<1$)的性能指标：

在欠阻尼($0\leqslant\zeta<1$)典型二阶系统的单位脉冲响应公式(3.21a)中，令 $g(t)=0$，得 $\sin\omega_\mathrm{d}t=0$，此时对应的第一个过零点时刻为

$$t = \frac{\pi}{\omega_\mathrm{d}} = t_\mathrm{p} \tag{3.22}$$

即欠阻尼典型二阶系统的单位脉冲响应的第一个过零点时间即为欠阻尼典型二阶系统的单位阶跃响应的峰值时间 t_p。

欠阻尼典型二阶系统的单位脉冲响应的第一个波头面积为欠阻尼典型二阶系统单位阶