第3章　线性规划及求解方法与分析

本章要点

- 线性规划数学模型的一般形式和标准形式；
- 线性规划数学模型的3个基本要素；
- 线性规划的基本概念，包括可行域、可行解、最优解、最优值等；
- 线性规划解多种可能的解；
- 线性规划解的灵敏度分析，包括松弛量和剩余量、对偶价格、相差值等；
- 线性规划的白箱求解方法——图解法；
- Excel求解运筹学模型的基础；
- Excel“规划求解”模块的加载；
- Excel线性规划求解模板的制作及应用；
- Excel线性规划求解程序模块的应用。

3.1 引　　言

上一章讲了决策分析三种类型中的两种。从本章开始，重点关注确定型决策问题。确定型决策的研究方法用的主要是线性规划方法。

线性规划是运筹学中研究较早、理论和算法都比较成熟的一个重要分支和主要构成部分(绝大多数运筹学分支的处理方法都是由线性规划演变而来的)。它主要研究在线性等式(或不等式)的限制条件下，使某一线性目标值取最大值(或最小值)的问题。

所谓线性规划问题，是指所有资源限制条件式和目标式都是自变量的一次方关系(处理起来最简单)。

自1947年丹齐格(G. B. Dantzig)提出求解线性规划的单纯形法(用手工方式专门求解线性规划问题的方法)后，线性规划的理论体系和计算方法日趋完善。随着计算机应用的发展，用计算机求解线性规划问题的方法也逐步普及，已经广泛应用于商业、工业和军事等方面，例如合理下料问题、配料问题、投资问题、产品生产计划问题、人力资源管理问题、选址问题、运输问题等。

运筹学中的线性规划问题，描述的都是在一定资源限制(自然状态)下，给出了很多个可以选择的不同方案(运行方案)，从这些方案中找到一个最好的方案来执行。这完全符合决策分析的基本要求，所以线性规划问题解决的仍然是决策分析问题。

在线性规划模型的求解方法方面，本章主要介绍图解法、用Excel求解模板和Excel-VBA求解程序模块两种方法。介绍图解法主要用于解释线性规划及应用方面的基本概念；Excel求解模板和求解程序主要用于实际决策的计算工具。

3.2 线性规划问题的提出

1. 线性规划数学模型

例 3-1 生产安排问题。某工厂在计划期内要安排Ⅰ、Ⅱ两种产品的生产。生产单位产品所需的设备台时数和 A、B 两种原材料的消耗量以及资源的限制条件如表 3-1 所示。

表 3-1 两种产品生产的资源配置表

	产品Ⅰ	产品Ⅱ	资源限制
设备(台时)	1	1	300
原料 A(kg)	2	1	400
原料 B(kg)	0	1	250

工厂每生产一个单位的产品Ⅰ可获利 50 元,每生产一个单位的产品Ⅱ可获利 100 元,问应生产多少单位产品Ⅰ和产品Ⅱ才能使总的获利最多?

解 工厂目前要决策的问题是生产多少单位产品Ⅰ和产品Ⅱ。现在分别用变量 x_1、x_2 来表示生产产品Ⅰ和产品Ⅱ的数量,并且用 x_1 和 x_2 的线性函数形式来表示工厂所要求的最大利润目标

$$\max z = 50x_1 + 100x_2$$

这里的 50 和 100 分别为单位产品Ⅰ和单位产品Ⅱ的利润。

同样也可以用 x_1 和 x_2 的线性不等式来表示问题中相应资源的约束关系。如台时数方面的限制可以表示为

$$x_1 + x_2 \leqslant 300$$

同样,原材料的限制可以表示为

$$2x_1 + x_2 \leqslant 400$$
$$x_2 \leqslant 250$$

除了上述约束外,显然还应该有 $x_1 \geqslant 0$ 和 $x_2 \geqslant 0$,因为产品Ⅰ和产品Ⅱ的产量是不能取负值的。综上所述,就得到了完全符合例 3-1 要求的一组数据关系式为

$$\max z = 50x_1 + 100x_2$$

$$\text{满足条件:}\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 300 \\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 400 \\ x_2 &\leqslant 250 \end{aligned}$$

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$$

这组数据关系式就是例 3-1 的数学模型。由于上述数学模型中的函数为变量的线性函数,约束关系也为变量的线性等式或不等式,因此该模型称之为线性规划数学模型。如果函数是变量的非线性函数,或约束条件中含有变量的非线性等式或不等式,这样的数学模型称为非线性规划模型。

2. 线性规划模型的三个基本要素

例 3-1 所建立的线性规划数学模型中每一个式子都用到了变量 x_1、x_2，称这些用来描述可控因素的变量为决策变量(或约束变量)；模型中还有一个特殊的式子：$\max z=50x_1+100x_2$，这个式子是用来计算和实现问题的目标的，是一个极值公式，称其为目标函数；模型中还有一组(一般都是多个)“满足条件”(简写为 s. t.)的式子，这些式子一般都是问题的资源限制，因此称其为约束条件，并称这种资源限制的约束条件为外在约束，还有如变量的非负、整数等约束为简单约束。这三个方面的概念就是构成线性规划的三个基本要素。

(1) 决策变量(约束变量)：用符号来表示可控制的因素；

(2) 目标函数：$\max z$ 或 $\min f$，表示问题要实现的目标；

(3) 约束条件：s. t. (subject to)满足于(一个等式或不等式组)。

例 3-2 营养配餐问题。假定一个成年人每天需要从食物中获得 3000kJ 热量、55g 蛋白质和 800mg 钙。如果市场上只有 4 种食品可供选择，它们每千克所含的热量、营养成分和市场价格如表 3-2 所示。如何选购才能在满足营养的前提下使购买食品的费用最小?

表 3-2 各种食物的营养成分表

序号	食品名称	热量(kJ/kg)	蛋白质(g/kg)	钙(mg/kg)	价格(元/kg)
1	鸡肉	1000	50	400	14
2	鸡蛋	800	60	200	6
3	大米	900	20	300	3
4	白菜	200	10	500	2
每天需要量		≥3000	≥55	≥800	

解 解决每一个线性规划问题都必须先确定线性规划数学模型的 3 个要素。

(1) 确定决策变量。

设 x_1 为鸡肉每天的购入量；

设 x_2 为鸡蛋每天的购入量；

设 x_3 为大米每天的购入量；

设 x_4 为白菜每天的购入量。

(2) 确定目标函数。

本问题的目标是购买食品的费用为最小，而总费用的构成为

$$14x_1+6x_2+3x_3+2x_4$$

所以目标函数为

$$\min f=14x_1+6x_2+3x_3+2x_4$$

(3) 确定约束条件。

本问题的资源有食品的热量、蛋白质和钙的含量构成和对总含量的最低要求，根据题目给的营养成分表可以确定约束条件为

$$1000x_1+800x_2+900x_3+200x_4 \geqslant 3000 \quad \text{热量约束}$$

$$50x_1+60x_2+20x_3+10x_4 \geqslant 55 \quad \text{蛋白质约束}$$

$$400x_1+200x_2+300x_3+500x_4 \geqslant 800 \quad \text{钙约束}$$

$$x_1,x_2,x_3,x_4 \geqslant 0 \quad \text{各食品的食用量不能为负}$$

这样,配餐问题的线性规划模型为

$$\begin{aligned}
\min f &= 14x_1+6x_2+3x_3+2x_4 \\
\text{s.t.}\ & 1000x_1+800x_2+900x_3+200x_4 \geqslant 3000 \\
& 50x_1+60x_2+20x_3+10x_4 \geqslant 55 \\
& 400x_1+200x_2+300x_3+500x_4 \geqslant 800 \\
& x_1,x_2,x_3,x_4 \geqslant 0
\end{aligned}$$

从以上两例中可以看出一般线性规划问题的建模过程如下。

(1) 理解要解决的问题,明确在什么条件下,要追求什么目标。

(2) 定义决策变量。每一个问题都用一组决策变量($x_1,x_2,\cdots,x_n$)表示某一方案,当这组决策变量取具体值时就代表一个具体方案。一般这些变量的取值是非负的。

(3) 用决策变量的线性函数形式写出所要追求的目标,即目标函数。按问题的不同,要求目标函数实现最大化或最小化。

(4) 用一组决策变量的等式或不等式来表示在解决问题过程中所必须遵循的约束条件(决策分析中的自然状态)。

3. 线性规划数学模型的一般形式

根据上面两个例子,可以将线性规划模型归纳为如下形式

$$\begin{aligned}
\max\ (\min) z &= c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \\
\text{s.t.}\ & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \leqslant (=,\geqslant) b_1 \\
& a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \leqslant (=,\geqslant) b_2 \\
& \qquad \vdots \\
& a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \leqslant (=,\geqslant) b_m \\
& x_1,x_2,\cdots,x_n \geqslant 0
\end{aligned}$$

其中:c_j 为目标函数的变量系数,也称为价值系数;a_{ij} 为约束条件的变量系数,也称为资源配置系数;b_i 为常数项,也称为资源限制量。

有了线性规划问题的数学模型,就可以对具体的问题进行求解,求解方法有以下几种。

(1) 二维线性规划问题的图解法;

(2) 高维线性规划问题的单纯形法手工求解;

(3) 计算机软件求解。

3.3 图 解 法

对于只包含两个决策变量的线性规划问题,可以用图解法来求解。图解法简单直观,有助于了解线性规划问题求解的基本原理。在以 x_1,x_2 为坐标轴的直角坐标系里,图上任意一点的坐标都代表了决策变量 x_1,x_2 的一组值,也就代表了一个具体的决策方案。

1. 最大化问题的图解法

下面就通过例 3-1 介绍图解法的解题过程。

例 3-1 的每个约束条件都代表一个半平面，如约束条件 $x_1+x_2\leqslant 300$ 代表以直线 $x_1+x_2=300$ 为边界的左下方的半平面，即这个半平面上的任一点都满足约束条件 $x_1+x_2\leqslant 300$，而其余的点都不满足这个约束条件。同时满足约束条件 $x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$，$x_1+x_2\leqslant 300$，$2x_1+x_2\leqslant 400$，$x_2\leqslant 250$ 的点，必然落在这 5 个半平面的公共部分（包括五条边界线），这 5 个半平面及其公共部分如图 3-1 所示。

公共部分的每一点（包括边界线上的点）都是 x_1，x_2 的一个具体组合，也就是这个线性规划的一个解，即一个可选行动方案，称这个解为线性规划模型的可行解，而此公共部分是这个线性规划问题的可行解的集合。这个区域是一个五边形，有 5 个顶点。分别用 O、A、B、C、D 来标明这 5 个顶点，则区域 $OABCD$ 就是本问题的可行域，如图 3-2 所示。

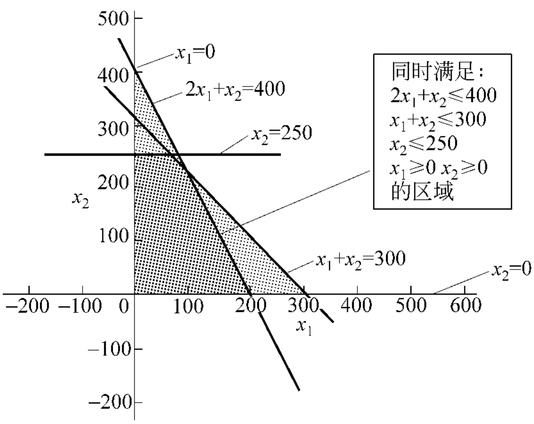

图 3-1　满足约束条件的公共部分

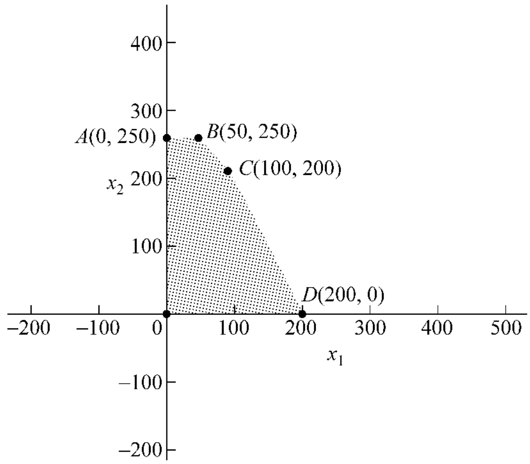

图 3-2　线性规划问题的可行域

由于问题不同，可行域的几何形状可以千变万化，但可以证明可行域的几何结构都是凸集。所谓凸集，就是所求集合中任何两点的连线都落在这个集合中。例如，平面上的矩形与圆、空间中的平行六面体与椭球体以及例 3-1 中的公共部分的一个五边形等，都是凸集。

目标函数 $z=50x_1+100x_2$，当 z 取某一数值时，也可以用直线在图上表示。z 取不同的值就可以得到不同的直线，但不管 z 怎样取值，所得直线的斜率是不变的，故对应于不同 z 值所得的直线都是互相平行的。由于对于 z 的某一取值所得的直线上的每一点都具有相同的目标函数值，故称它为"等值线"，如图 3-3 所示，当 z 的取值由 0 逐渐增大时，直线 $z=50x_1+100x_2$ 沿其法线方向向右上方移动，同时由于要满足全部约束条件，因此决策变量一定要处在其公共部分。

当直线 $z=50x_1+100x_2$ 移动到 B 点时，z 值在可行域的边界上实现了最大化。这样就得到了例 3-1 的最优解为 B 点，B 点的坐标为(50,250)，因此最佳决策为 $x_1=50$，$x_2=250$，此时 $z=27500$。这说明该厂的最优生产计划方案是生产产品 Ⅰ 50 单位，生产产品 Ⅱ 250 单位，可得最大利润 27500 元。

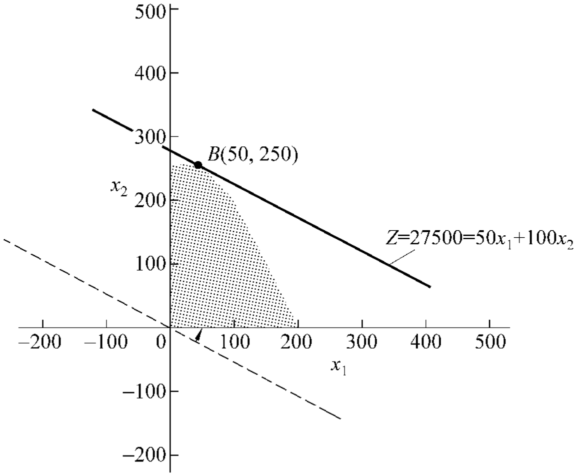

图 3-3　线性规划问题的最优目标函数值

2. 线性规划问题的解

图 3-3 中所求得 B 点坐标(50,250)就是例 3-1 的最优解(最优可选方案)。最优目标函数值(27500)就是本问题的最优值。这个解的结果及求解过程,结合这个二维的坐标图,可以看到线性规划问题的求解会有以下 4 种情况。

(1) 在线性规划问题解的集合中,若约束条件能构成一个封闭(或有限)的可行域,则可行域中的任意点都是问题的一个可行解,这些可行解中必有最优解;若最优解是可行域中的一个点,则称这个解是线性规划的唯一最优解(或唯一解)。唯一最优解必落在可行域的顶点上,因此称可行域的所有顶点为基本可行解。对于求最大目标的线性规划问题,通常取 z 值最小的基本可行解为初始基本可行解,再依次迭代至最优解。求最小目标的情况,可选可行域中任意目标函数值较大的点为初始基本可行解,再依次迭代至最优解。

(2) 若最优目标函数与可行域不是相交于一个顶点,而是可行域的某一条边,则最优解就不是可行域中的一个点(此时的可行域中至少有两个顶点是最优解),而是一条边上的所有点,所以是无穷多点,些时线性规划问题就有无穷多解(或最优解不唯一)。

(3) 对于目标为求最大值的线性规划问题,如果约束条件不能构成封闭(或有限)区域的可行域,如沿目标函数值增大的方向无限扩散而没有边界,这时的可行域是无界的,线性规划问题就有无界解。

(4) 如果约束条件虽然构成了封闭(或有限)区域,但构成的是两个及两个以上的互不相连的区域,那么这些区域中的点都不能同时满足约束要求,因此都不是可行域,也就是使线性规划问题没有可行域,此时就没有可行解(或无解)。

3. 剩余资源的松弛量

在线性规划数学模型中,约束条件的左端是资源利用的实际值,在具体求得的结果中,实际值与不等式右端的常数项(资源限制量)不一定相等。如例 3-1 中把 $x_1=50$,$x_2=250$ 代入约束条件得资源利用实际值。

设备：$1\times50+1\times250=300$(台时)　　等于限制量；

原料 A：$2\times50+1\times250=350$(kg)　　小于限制量；

原料 B：$0\times50+1\times250=250$(kg)　　等于限制量。

这表明，生产 50 单位产品Ⅰ和 250 单位产品Ⅱ将消耗完所有可使用的设备台时数和原料 B，但对原料 A 来说只消耗了 350kg，还有$(400-350)=50$(kg)没有使用。在线性规划中，一个"$\leqslant$"约束条件中没有使用的资源量或能力的值被称为松弛量。例如，生产 50 单位产品Ⅰ和 250 单位产品Ⅱ的最优方案中，对设备台时资源来说其松弛量为 0，对原料 B 来说其松弛量也为 0，而对原料 A 来说其松弛量为 50kg。

这里再引入一个代表松弛量的变量 s_i(称之为松弛变量)，可以将线性规划一般形式中的约束条件实际值加上松弛变量的值，使原来的不等号化为等号。

如本例有 3 个资源约束，可以引入 3 个松弛变量 s_1、s_2、s_3，这样，就可将线性规划数学模型描述为

$$
\begin{aligned}
\max z &= 50x_1+100x_2+0\,s_1+0\,s_2+0\,s_3\\
\text{s.t.}\quad x_1+x_2+s_1 &= 300\\
2x_1+x_2+s_2 &= 400\\
x_2+s_3 &= 250\\
x_1,x_2,s_1,s_2,s_3 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

对例 3-1 的最优解 $x_1=50$，$x_2=250$ 来说，松弛变量的值如表 3-3 所示。

表 3-3　松弛变量的值

约束条件	松弛变量的值
设备台时数	$s_1=0$
原料 A	$s_2=50$
原料 B	$s_3=0$

4. 最小化问题的图解法

例 3-3　一个求目标函数最小化的线性规划问题。

$$
\begin{aligned}
\min f &= 11x_1+8x_2\\
\text{s.t.}\quad 10x_1+2x_2 &\geqslant 20\\
3x_1+3x_2 &\geqslant 18\\
4x_1+9x_2 &\geqslant 36\\
x_1,x_2 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

用图解法进行求解。

解　根据三个约束条件，可画出如图 3-4 所示的可行域。

用图解法来解决此问题，首先得到此线性规划问题的可行域为图 3-4 中箭头所指方向(以 $x_1=0$、AB、BC、CD 和 $x_2=0$ 形成的半发散区域)，基本可行解为 A、B、C、D 点。在这 4 个基本可行解中，可以选目标函数较大的基本可行解对应的 D 点作为初始基本可行解。

再来看目标函数 $f=11x_1+8x_2$，它在坐标平面上可表示为以 f 为参数，以 $-\dfrac{11}{8}$ 为斜率的一簇平行线，如图 3-5 所示。这簇平行线随着 f 值的减小向左下方平移。当移动到 B 点 (1,5) 时，目标函数在可行域内取最小值 $11\times1+8\times5=51$，即得到例 3-3 的最优解 $x_1=1$，$x_2=5$，最优值：$f=11x_1+8x_2=51$。

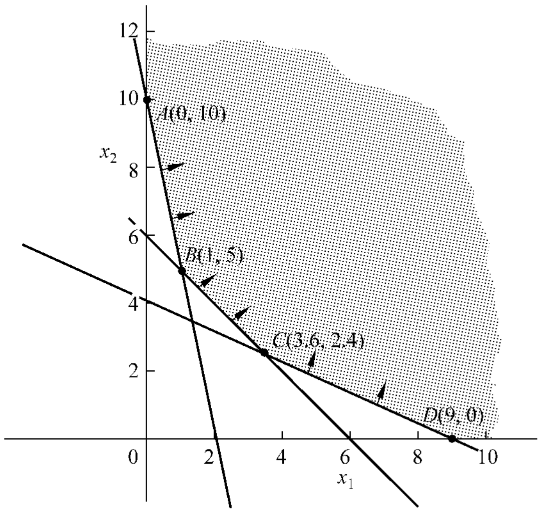

图 3-4　例 3-3 的可行域

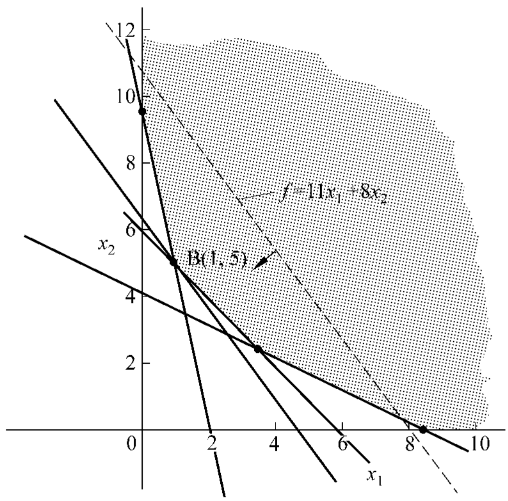

图 3-5　例 3-3 最优解

5. 多于资源低限的剩余量

与例 3-1 一样，无论目标是求最大还是求最小，对于约束条件是"≥"的情况，约束条件式左端的实际值与右端的常数项(资源限制量)不一定相等。如例 3-3 中把 $x_1=1$，$x_2=5$ 代入约束条件得资源利用实际值，有

$$10\times1+2\times5=20\quad\text{等于最低限量 20}$$
$$3\times1+3\times5=18\quad\text{等于最低限量 18}$$
$$4\times1+9\times5=49\quad\text{大于最低限量 36}$$

在线性规划中，一个"≥"约束条件中超过资源或能力最低限的部分被称为剩余量。

本例中，第一个约束条件的剩余量为 0；第二个约束条件的剩余量也为 0；第三个约束条件的剩余量为 13。

这里再引入代表剩余量的变量 s_i(称之为剩余变量)，可以将线性规划一般形式中的约束条件实际值减去剩余变量的值，使原来的不等号化为等号。

此时例 3-3 的数学模型为

$$\min f=11x_1+8x_2+0s_1+0s_2+0s_3$$
$$\text{s.t.}\quad 10x_1+2x_2-s_1=20$$
$$3x_1+3x_2-s_2=18$$
$$4x_1+9x_2-s_3=36$$
$$x_1,x_2,s_1,s_2,s_3\geqslant0$$

对例 3-3 的最优解 $x_1=1, x_2=5$ 来说，剩余变量的值如表 3-4 所示。

表 3-4　剩余变量的值

约 束 条 件	剩余变量的值
第一约束条件	$s_1=0$
第二约束条件	$s_2=0$
第三约束条件	$s_3=13$

6. 线性规划数学模型的标准形式

在上述两例中分别引入了松弛变量和剩余变量后，就可以将模型中所有用“$\leqslant$”，“$\geqslant$”和“=”建立的一般形式化为统一用“=”表示的标准形式，有

$$\begin{aligned}
&\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n \\
&(\text{或} \min f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\ c_nx_n) \\
&\text{s. t.}\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&\qquad\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad\quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
&\qquad\quad x_1, x_2, x_n \geqslant 0
\end{aligned}$$

这里的决策变量 x_i 已包括松弛变量和剩余变量。

线性规划标准形式的特征如下。

(1) 所有约束条件都是“=”关系，若不是“=”关系，可以添加松弛变量或剩余变量，将不等式化为等式。

(2) 决策变量的取值区间为 $0\leqslant x_i\leqslant\infty$，若变量不在此区间，需要进行数学代换，将其调整到这个区间。

(3) 常数项 b_j 都为大于或等于 0 的数，若是小于 0 的数时，可将该等号两端同乘以 -1。

(4) 目标函数值可以是求最大，也可以是求最小，并且最大和最小可以转换，转换的规则是

$$\max z = \min(-z)$$

3.4　线性规划问题的灵敏度分析

所谓灵敏度分析就是在建立数学模型并求得最优解之后，研究线性规划的一些系数 c_j，a_{ij} 和 b_i 的变化(微小变化，或所起到的微分效果)对最优解所产生的影响。灵敏度分析是非常重要的，首先是因为 c_j，a_{ij}，b_i 这些系数都是估计值和预测值，不一定非常精确；再则即使这些系数值在某一时刻是精确值，它们也会随着自然条件的变化而变化，不会一成不变。例如，原材料的价格、商品的售价、加工能力、劳动力的价格等的变化都会影响这些系数，有了灵敏度分析就不必为了应付这些变化而不停地建立新的模型和求新的最优解，也不会由

于系数估计和预测的精确性而对所求得的最优解存有不必要的怀疑。下面用图解法的灵敏度分析对目标函数中的系数 c_j 以及约束条件中的常数项 b_i 进行灵敏度分析。

3.4.1 目标函数中变量系数 c_j 的取值范围分析

c_j 即目标函数的变量系数，它代表广义的产品价值（价值或价格表示的是经营的环境），所以也称为价值系数。c_j 的灵敏度分析是研究经营环境的变化对最优解的影响。

在线性规划数学模型中，c_j 的改变只是改变目标函数直线的斜率，不改变可行域的形状。

下面以例 3-1 为例来看一下 c_j 的变化是如何影响其最优解的。从例 3-1 中可以知道生产一个单位的产品Ⅰ可以获利 50 元（$c_1=50$），生产一个单位的产品Ⅱ可以获利 100 元（$c_2=100$）。在目前的生产条件下求得生产产品Ⅰ50 单位、生产产品Ⅱ250 单位就可以获得最大利润。当产品Ⅰ、Ⅱ中的某一产品的单位利润增加或减少时，生产者往往都能意识到为了获取最大利润就应该增加或减少这一产品的产量，也就是改变最优解，但是往往不能精确地定出这一产品利润变化的上限与下限，使得利润在这个范围内变化时其最优解不变，即仍然生产 50 单位的产品Ⅰ和 250 单位的产品Ⅱ而使获利最大。下面就用图解法定出其上限与下限。

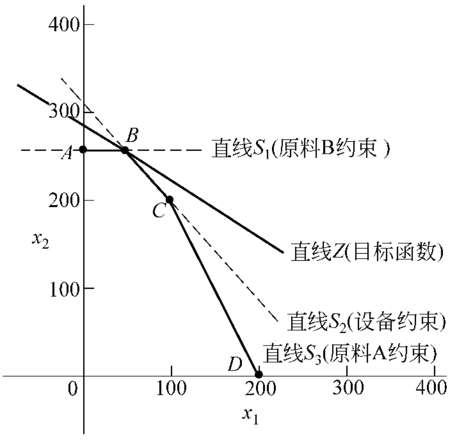

图 3-6　目标函数直线斜率变化的分析图

从图 3-6 中可以看出，只要目标函数的斜率在直线 S_2（设备约束）的斜率与直线 S_1（原料 B 约束）的斜率之间变化时，坐标为 $x_1=50$，$x_2=250$ 的顶点 B 就仍然是最优解，如果目标函数的直线沿逆时针旋转，当目标函数的斜率等于直线 S_1 的斜率时，则直线 AB 上的任一点都是其最优解，如果继续逆时针旋转，A 点便为其最优解。如果目标函数直线沿顺时针方向旋转，当目标函数的斜率等于直线 S_2 的斜率时，则直线 BC 上的任一点都是其最优解。如果继续沿顺时针方向旋转，当目标函数的斜率在直线 S_2 的斜率与直线 S_3 的斜率之间时，顶点 C 为其最优解。

直线 S_2 的方程为

$$x_1 + x_2 = 300$$

用斜截式可以表示为

$$x_2 = -x_1 + 300$$

可知直线 S_2 的斜率为-1，同样直线 S_1，S_3 也可以用斜截式分别表示为

$$x_2 = 0 \cdot x_1 + 250$$

$$x_2 = -2x_1 + 400$$

可见直线 S_1 的斜率为 0，直线 S_3 的斜率为-2。

目标函数

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$