

第 1 章 牛顿力学的方程列解

本章简要介绍了牛顿力学中数学建模的几种具体情况,以牛顿运动定律为基础讨论质点动力学问题,建立其运动方程并简单求解,从而得出解决问题的一般性方法和结论。并简要介绍了几种易解方程的形式。

人们对机械运动的理论探讨,首先是从对质点运动的研究开始。

1.1 矢量力学的理论基础

每一门学科都有自己的理论和实验基础,从而使之得以形成和发展。而每个人都有的诸多亲身实践经验组成了矢量力学的实验基础,矢量力学的理论体系是在伽利略-牛顿时代形成的。

1687 年牛顿(I. Newton, 1643—1727)发表的《原理》为矢量力学奠定了坚实的理论基础。牛顿在综合了伽利略等前人工作的基础上,在《原理》中首次对什么是物质、什么是时间、什么是运动做了明确规定,使得物质、时空、运动从一般哲学概念发展为可用数学作定量表述的定义、定律、定理,并迅速地得到了公众的确认,从而奠定了矢量力学的理论基础。

牛顿彻底摒弃了亚里士多德的物质观,复活和发展了原子论的思想。在原子论的基础上,牛顿建立了物质在力学理论中的质点模型,进而又建立了质点系、刚体、流体等力学模型,结合他对质量、动量和力等概念的定义,在这样的物质观的基础上建立起了矢量力学。

牛顿还在其《原理》中对时间、空间的概念作了阐述,构成了矢量力学的时空观。牛顿的时间可表述为:时间是一维的、均匀的、无限的,与空间和物质都没有关系,即**绝对时间**;牛顿的空间可表述为:空间是绝对的,任意一个质点都可以用三个坐标值表示出来,而这个坐标系的原点是静止在绝对空间里的,坐标轴的方向一经选定就不再改变,这样的坐标系就可以代表**绝对空间**,而在这种空间里的物质运动就是**绝对运动**了。牛顿还定义了**惯性参考系**:一切相对于绝对空间作匀速直线运动的参考系就是惯性参考系。

关于运动,著名的牛顿三定律和力学相对性原理构成了力学的最高原理。随着万有引力定律的问世,将天体运动和地面运动统一为服从相同运动规律的物质运动,彻底推翻了亚里士多德的天地有别的神话。在这一发展过程中,牛顿总结了伽利略、胡克等人的成果,将许多互不相关的力学现象归纳为一个统一的理论框架,将力学原理与数学结合起来,使力学成为可以做严格逻辑运算的科学理论。

在矢量力学的描述里,因为质量与时空及其运动无关,牛顿第二定律的数学表达式可表示为

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (1.1)$$

其中**瞬时加速度**定义为

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \quad (1.2)$$

显然,在狭义相对论中上式不再成立,而应以 $\boldsymbol{F} = \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}$ 代替,具体的将在第 9 章中表述。

牛顿三定律是在牛顿的绝对时空观中成立的,而根据伽利略的**力学相对性原理**:在一个系统内部的任何力学试验,都不能决定这一系统是静止还是在作匀速直线运动。这样,牛顿三定律就对所有的惯性参考系成立。但是,牛顿的绝对时空是没有的,而严格的惯性参考系也是不存在的,所以,在实践中总是选择适当的物体作为参考系取代惯性系,常常会选择在充分大的尺寸下平均处于静止的天体为惯性系,而在地球上的实验者眼中,地球足够大且相对静止,所以地球可看成很好的惯性系。

综上所述,牛顿的《原理》中将其物质观、时空观、运动观作了充分的阐述,同时,在《原理》里,牛顿还总结了他多年的科学经验,对自然科学的认识论、方法论作了精辟的论述,提出了四条关于哲学的推理规则,由于语言翻译问题,原文在此不作描述,但是可以将它们理解为:**简单性原理、因果性原理、统一性原理和真理性原理**四条。

所谓简单性原理是说科学上凡是正确的东西都是最简单的;因果性原理就是决定论,直到 20 世纪初量子力学建立之前,因果律都是物理学最牢固的信条之一;统一性原理是指《原理》中所述的物质、时空和运动观对整个自然界都是普遍适应的,这是自然哲学的根本所在,否则就不成其为“哲学”了;而真理性原理是说承认客观真理存在的同时又指出以后可能会出现新的现象使结论更准确,即要有相对的态度看问题。这是牛顿本人在科学研究中总结的认识论和方法论,实际上,正是《原理》中阐述的牛顿思想指引着矢量力学的理论得以发展和完善。

1.2 运动微分方程的建立

牛顿定律的核心是牛顿第二定律,式(1.1)为其数学表达形式。在利用它解决实际问题时,它必须以标量形式出现,特别是将以运动微分形式的方程出现,这就需要借助于选择合适的坐标系。

采用何种坐标系取决于帮助问题得以解决或者更加易于解决,而采用的坐标系不同,会导致数学表达式的形式不同,即方程的形式不同,继而带来解方程的方法不同。所以,牛顿力学中历来以理论容易理解,但方程难解著名,主要源于方程形式的不唯一。已有多组正交坐标系,如直角坐标系、平面极坐标系、柱坐标系、球坐标系和自然坐标系。在这些不同的坐标系中列解式(1.1)的标量表达式,就将求解力学问题变成求解运动微分方程的问题,换句话说,解决物理问题最后就转化成求解数学方程问题。

一般地,力 $\boldsymbol{F}$ 是物体的位置 $\boldsymbol{r}$ 、速度 $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ 和时间 t 的函数 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t)$,所以牛顿第二定律的矢量表示为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) \quad (1.3)$$

这是矢量的二阶微分方程。下面就给出式(1.3)在不同坐标系中的具体表示。

1.2.1 直角坐标系

在直角坐标系中,空间任意点 P 的位置可用 x, y, z 三个参数来表示,用 i, j, k 分别表示沿 x 轴、 y 轴和 z 轴的单位矢量,它们的大小和方向都不随时间而改变,质点的位置和速度可以分别表示为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \quad \text{和} \quad \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}$$

注:也可以用 $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ 分别表示沿 x 轴、 y 轴和 z 轴的单位矢量。

方程(1.3)可以表示为标量形式

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) \\ m\ddot{y} = F_y(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) \\ m\ddot{z} = F_z(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) \end{cases} \quad (1.4)$$

例 1.1 半径为 R 的车轮沿直线作纯滚动,设车轮保持在同一竖直平面内运动,且轮心的速度大小为 u ,加速度大小为 a 。试分析车轮边缘点 M 的运动,并据此建立其运动微分方程。

解 取车轮所在平面为 Oxy 平面,直线轨道为 x 轴。设 M 点为车轮边缘上的任意一点,在初始时刻 M 点与坐标原点 O 重合。又设任意时刻车轮边缘与地面接触点为 C ,则当车轮转过一个角度 θ 后,轮心 A 的坐标为

$$x_0 = \overline{OC} = R\theta, \quad y_0 = \overline{AC} = R$$

轮心的运动轨迹是直线。因此轮心的速度和加速度方向都沿着 x 轴,分别表示为

$$\boldsymbol{v}_0 = u\boldsymbol{i} = \dot{x}_0\boldsymbol{i} = R\dot{\theta}\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{a}_0 = a\boldsymbol{i} = \ddot{x}_0\boldsymbol{i} = R\ddot{\theta}\boldsymbol{i}$$

由此可以求出

$$\dot{\theta} = \frac{u}{R} \quad \text{和} \quad \ddot{\theta} = \frac{a}{R}$$

M 点的坐标为

$$x = \overline{OC} - \overline{AM}\sin\theta = R(\theta - \sin\theta)$$

$$y = \overline{AC} - \overline{AM}\cos\theta = R(1 - \cos\theta)$$

这是旋轮线的参数方程,因此 M 点的轨迹是旋轮线。 M 点的矢径为

$$\boldsymbol{r}_M = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = R(\theta - \sin\theta)\boldsymbol{i} + R(1 - \cos\theta)\boldsymbol{j}$$

M 点的速度为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_M &= \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} = R\dot{\theta}(1 - \cos\theta)\boldsymbol{i} + R\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{j} \\ &= u(1 - \cos\theta)\boldsymbol{i} + u\sin\theta\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

由题意知,由于纯滚动,当 M 点与地面接触时, $\theta = 2k\pi$, M 点的速度为零;当 M 点位于轮子的最高点时, $\theta = (2k+1)\pi$, M 点的速度为 $2u$,方向与轮心速度方向一致。

M 点的加速度为

$$\boldsymbol{a}_M = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} = R[\ddot{\theta}(1 - \cos\theta) + \dot{\theta}^2\sin\theta]\boldsymbol{i} + R(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\boldsymbol{j}$$

$$= \left[a(1 - \cos\theta) + \frac{u^2}{R} \sin\theta \right] \mathbf{i} + \left(a \sin\theta + \frac{u^2}{R} \cos\theta \right) \mathbf{j}$$

运动微分方程为

$$\begin{cases} F_x = m \left[a(1 - \cos\theta) + \frac{u^2}{R} \sin\theta \right] \\ F_y = m \left(a \sin\theta + \frac{u^2}{R} \cos\theta \right) \end{cases}$$

讨论

(1) 当 M 点与地面接触时, $\theta = 2k\pi$, M 点的加速度不为零, 其大小为 $\frac{u^2}{R}$, 方向竖直向上, 指向轮心;

(2) 当 M 点位于轮子的最高点时, $\theta = (2k+1)\pi$, M 点的加速度大小也为 $\frac{u^2}{R}$, 方向竖直向下, 指向轮心。

1.2.2 平面极坐标系

在平面极坐标系中, 空间任意点 P 的位置可用 r, θ 来表示, 用 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ 分别表示矢径 $\mathbf{r}$ 增加方向和极角 θ 增加方向的单位矢量。它们都将随时间而改变, 如图 1.1 所示。

质点的位置和速度可以分别表示为

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r \quad \text{和} \quad \mathbf{v} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_r)$$

方程(1.3)可以表示为

$$\begin{cases} ma_r = F_r(r, \theta; \dot{r}, \dot{\theta}; t) \\ ma_\theta = F_\theta(r, \theta; \dot{r}, \dot{\theta}; t) \end{cases} \quad (1.5)$$

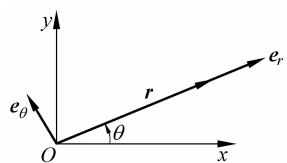


图 1.1

其中 a_r, a_θ 的具体表示可推导如下。

方法一 由图 1.1 可以看出

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \mathbf{i} \cos\theta + \mathbf{j} \sin\theta \\ \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{i} \sin\theta + \mathbf{j} \cos\theta \end{cases}$$

将上式对时间求导数, 可以得到平面极坐标单位矢量的时间变化率表达式

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_r = \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta = \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r \end{cases} \quad (1.6)$$

这样质点的速度和加速度可分别表示为

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_r) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta$$

这样就将速度和加速度都分别分成了沿 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ 方向的两个分量, 分别称作径向和横向部分, 所以牛顿第二定律可表示为

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r(r, \theta; \dot{r}, \dot{\theta}; t) \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta(r, \theta; \dot{r}, \dot{\theta}; t) \end{cases} \quad (1.7)$$

其中 F_r, F_θ 分别表示力 $\mathbf{F}$ 在 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ 方向上的投影。

此类方程经常用于解决有心力场问题,例如对行星运动轨道的研究,将在第2章中用到该方程。

其实式(1.6)的推导并不唯一,除了上述利用与直角坐标关系解析得到外,还可以通过以下两种方式得到,下面简单推导。

方法二 利用图示法推导。如图1.2所示,显见

$$|\Delta \mathbf{e}_r| = \Delta\theta |\mathbf{e}_r| = \Delta\theta$$

当 $\Delta t \rightarrow 0, \Delta\theta \rightarrow 0$, 此时 $\Delta \mathbf{e}_r \perp \mathbf{e}_r$, 且 $\Delta \mathbf{e}_r$ 沿 $\mathbf{e}_\theta$ 方向, 大小等于 $\Delta\theta$, 即

$$\Delta \mathbf{e}_r = \Delta\theta \mathbf{e}_\theta$$

上式左右两边同时取极限

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{e}_r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta \mathbf{e}_\theta}{\Delta t}$$

即

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$$

同理可求出

$$\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r$$

方法三 利用线速度和角速度的关系式 $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, 其中 $\boldsymbol{\omega}$ 代表物体转动的角速度。根据速度的定义改写上式, 得到

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

其中 $\mathbf{r}$ 是位置矢量, 当然包括单位矢量。自然地得到下列的关系式

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_r = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_r \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_\theta \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{e}_\omega$, $\mathbf{e}_\omega$ 方向垂直于 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ 所在平面, 指向读者。上式表示, 基本矢量对时间的微商等于该矢量转动的角速度矢量与自身的叉积。这是一个十分有用的普遍结论。

这样

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta} \mathbf{e}_\omega \times \mathbf{e}_r \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta = \dot{\theta} \mathbf{e}_\omega \times \mathbf{e}_\theta \end{cases}$$

根据图1.1读者不难算出接下来的结果 $\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r \end{cases}$ 。

1.2.3 柱坐标系

如图1.3所示, 柱坐标可以看成是由平面极坐标 ρ, φ 和直角坐标 z 组合而成的, 用 $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{k}$ 分别表示三个坐标的单位矢量, 其中前两个随时间变化, $\mathbf{k}$ 不随时间变化。显见, 柱坐

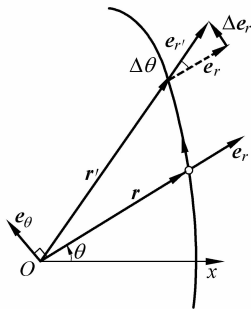


图 1.2

标单位矢量的时间变化率为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_\rho \\ \dot{\mathbf{k}} = \mathbf{0} \end{cases}$$

则质点的位置和速度可以分别表示为

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{k} \quad \text{和} \quad \mathbf{v} = \frac{d}{dt}(\rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{k}) = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{z} \mathbf{k}$$

式(1.3)可以表示为

$$\begin{cases} m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) = F_\rho(\rho, \varphi, z; \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}; t) \\ m(\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}) = F_\varphi(\rho, \varphi, z; \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}; t) \\ m\ddot{z} = F_z(\rho, \varphi, z; \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}; t) \end{cases} \quad (1.8)$$

此类方程经常用于解决电子在电磁场中的螺旋线运动等三维运动问题。

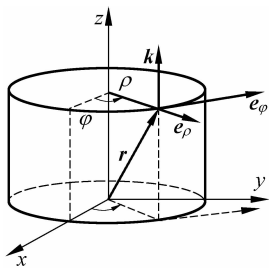


图 1.3

1.2.4 球坐标系

在球坐标系中,空间任意点 P 的位置可用 r, θ, φ 三个参数来表示,用 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ 分别表示 r, θ, φ 三个参数增加方向的单位矢量。它们都随时间而改变,如图 1.4 所示,可以看到各单位矢量与直角坐标间的关系

$$\mathbf{e}_r = i \sin \theta \cos \varphi + j \sin \theta \sin \varphi + k \cos \theta$$

$$\mathbf{e}_\theta = i \cos \theta \cos \varphi + j \cos \theta \sin \varphi - k \sin \theta$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = -i \sin \theta + j \cos \theta$$

注 (1) 还可以采用将 $\mathbf{e}_r$ 旋转 90° 的方法获得 $\mathbf{e}_\theta$, 即在 φ

不变的情况下,将 $\theta \rightarrow \theta + \frac{\pi}{2}$, 则新的 $\mathbf{e}_r$ 方向即为 $\mathbf{e}_\theta$ 的方向:

$$\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_r /_{\theta \rightarrow \theta + \frac{\pi}{2}}, \text{结果一致。}$$

(2) 保持 $\theta = 90^\circ$, 将 $\mathbf{e}_r$ 转过 90° 时即为原来的 $\mathbf{e}_\varphi$, 即 $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_r /_{\theta=90^\circ; \varphi \rightarrow \varphi + \frac{\pi}{2}}$ 。

这样可以轻易计算出球坐标系下单位矢量的时间变化率:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{e}_\varphi \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\sin \theta \dot{\varphi} \mathbf{e}_r - \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{e}_\theta \end{cases} \quad (1.9)$$

毫无疑问,类似地也可以利用线速度和角速度的关系式通过矢量的叉积得到相同的结论,读者感兴趣的话,可以尝试一下。不过读者在推导过程中要注意的是,此时的角速度将会是两个转动提供的合角速度,即 $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}}$, 当然方向是矢量合成方向。

球坐标系下质点的位置和速度可以分别表示为

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r \quad \text{和} \quad \mathbf{v} = \frac{d}{dt}(r \mathbf{e}_r) = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi$$

此时方程(1.3)可以改写为

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) = F_r(r, \theta, \varphi; \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}; t) \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta) = F_\theta(r, \theta, \varphi; \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}; t) \\ m(r\ddot{\varphi} \sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos\theta) = F_\varphi(r, \theta, \varphi; \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}; t) \end{cases} \quad (1.10)$$

1.2.5 自然坐标系

在前面的几种坐标系中,直角坐标系的单位矢量与运动完全无关,而平面极坐标、柱坐标系和球坐标系的单位矢量与质点运动的位置有关,即随时间变化。下面要讨论的坐标系,其单位矢量是由质点速度的方向决定的,称为**自然坐标系**,而相应的牛顿第二定律的数学表达式称为**内禀方程**。

若质点轨道为平面曲线,可以用 $\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n$ 表示轨道**切线**和**法线**方向的单位矢量,如图 1.5 所示,其中 $\mathbf{e}_n$ 指向曲线的凹侧为正方向,则质点的速度和加速度可以表示为

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_t$$

和

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{e}_t) = \dot{v}\mathbf{e}_t + v\dot{\mathbf{e}}_t$$

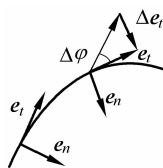


图 1.5

显见 $\Delta t \rightarrow 0, \Delta \mathbf{e}_t \approx \mathbf{e}_n \Delta \varphi$, 即

$$d\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_n d\varphi$$

所以

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \mathbf{e}_n \frac{d\varphi}{dt} = \mathbf{e}_n \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt}$$

利用速率和曲率半径的定义知

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{和} \quad \rho = \frac{ds}{d\varphi}$$

则

$$\dot{\mathbf{e}}_t = \frac{v}{\rho} \mathbf{e}_n \quad (1.11)$$

所以

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n$$

这样就将质点的加速度分解成了沿切向和法向的两部分,其中法向加速度的方向是变化的曲率中心,则牛顿第二定律变为

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = F_t \\ m \frac{v^2}{\rho} = F_n \end{cases} \quad (1.12)$$

若质点轨道为空间曲线,将利用 $\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n$ 定义其第三个单位矢量 $\mathbf{e}_b$,称为**副法向**

$$\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n$$

在此方向上加速度的分量恒为零,所以加速度公式仍然可用平面曲线的加速度公式表示

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n$$

则牛顿第二定律变为

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = F_t \\ m \frac{v^2}{\rho} = F_n \\ 0 = F_b \end{cases} \quad (1.13)$$

式(1.12)和式(1.13)就是质点运动的**内禀方程**,此类方程经常应用于沿已知轨道运动的质点和介质阻力不能忽略时的运动。根据流体力学的理论,介质阻力恒与运动方向相反,所以阻力只是出现在内禀方程的第一个方程中,这样问题处理起来就变得简单。

另外,式(1.12)和式(1.13)中的力的形式与前面四种坐标系中的表示形式不同,它不再写成自变量函数的形式。因为内禀方程通常用来解决有约束的问题,所以这里的力通常具有约束力性质。

1.3 运动微分方程较易求解的几种类型

理论力学的主要任务就是分析具体问题后,建立并求解运动微分方程组,得到所求。质点的运动微分方程给出了质点的运动与它所受力之间的关系。如果质点所受的力已知,则质点的运动情况就转化成求解二阶微分方程的问题,每个二阶方程的解将包含两个积分常数。前面讲过,作用在质点上的力一般都是位置、速度和时间的函数,这种微分方程组的求解可能十分困难,但在某些具体问题中,力常常只是其中某一个变量的函数,例如只是时间的函数 $\mathbf{F}=\mathbf{F}(t)$; 亦或是位置的函数 $\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 或 $\mathbf{F}=\mathbf{F}(x)$; 或者是速度的函数 $\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{v})$, 这样问题会变简单。下面列出较易求解的几种类型并分述之。

1.3.1 形如 $\mathbf{F}=\mathbf{F}(t)$ 的情形

例如自由电子在沿 x 轴的振荡电场中的运动。设电子速度远小于光速,沿 x 轴的电场强度为 $E_x=E_0\cos(\omega t+\theta)$, 所以电子所受的力为

$$F = -eE_x = -eE_0\cos(\omega t + \theta)$$

其中 $-e$ 是电子所带的电荷, E_0 是电场强度的最大值, ω 为角频率, θ 为初相, 它们都是常数。根据牛顿第二定律, 电子运动的微分方程为

$$m \ddot{x} = -eE_0\cos(\omega t + \theta) \quad (1.14)$$

将式(1.14)乘以 dt 并一次积分, 得

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{eE_0}{m\omega} \sin(\omega t + \theta) + C_1$$

再次积分, 得

$$x = C_1 t + \frac{eE_0}{m\omega^2} \cos(\omega t + \theta) + C_2$$

将初始条件 $t=0, v=v_0, x=x_0$ 代入上两式, 求出 C_1 和 C_2 得

$$\begin{cases} v = v_0 + \frac{eE_0}{m\omega} \sin\theta - \frac{eE_0}{m\omega} \sin(\omega t + \theta) \\ x = x_0 - \frac{eE_0}{m\omega^2} \cos\theta + \left(v_0 + \frac{eE_0}{m\omega} \sin\theta \right) t + \frac{eE_0}{m\omega^2} \cos(\omega t + \theta) \end{cases} \quad (1.15)$$

当无线电波在含有高密度自由电子的电离层中传播时,就类似于上面所讨论的情况。

1.3.2 形如 $F=F(x)$ 的情形

此类方程除了常规的二次积分外,一般采用 $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$ 的方式求解。

$$m \frac{dv}{dt} = F_x = F(x)$$

即

$$mv dv = F(x) dx$$

积分得到

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{x_0}^x F(x) dx$$

即求出

$$v = v(x)$$

再将 v 换成 $\frac{dx}{dt}$, 可继续求得 $x=x(t)$ 。

例如三维谐振动这类问题可以用原子在晶体点阵中的运动作为代表,简单情况下,力只是坐标 x, y, z 的函数,且互相分立,所以牛顿第二定律的方程可写为

$$\begin{cases} m \ddot{x} = F_x = -k_x x \\ m \ddot{y} = F_y = -k_y y \\ m \ddot{z} = F_z = -k_z z \end{cases} \quad (1.16)$$

式中 m 是原子的质量, k_x, k_y, k_z 为劲度系数。

由式(1.16)中的第一式改写可得

$$\ddot{x} = -\frac{k_x}{m}x = -\omega_x^2 x, \quad \omega_x \text{ 为角频率}$$

即

$$\ddot{x} + \omega_x^2 x = 0$$

为常系数线性二阶齐次方程,其通解可记为

$$x = A_x \sin(\omega_x t + C_2) = A_x \cos(\omega_x t + \theta_x)$$

式中, A 和 θ 都是积分常数,可由初始条件决定。同理,对于另外两个方程,以同样的方法可得到解答

$$\begin{cases} x = A_x \cos(\omega_x t + \theta_x), & \omega_x^2 = \frac{k_x}{m} \\ y = A_y \cos(\omega_y t + \theta_y), & \omega_y^2 = \frac{k_y}{m} \\ z = A_z \cos(\omega_z t + \theta_z), & \omega_z^2 = \frac{k_z}{m} \end{cases} \quad (1.17)$$

式中 A_x, A_y, A_z 代表振动的振幅,即三个方向位移的最大值,而 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ 则为初相。若为一维问题,那就是通常的线性谐振子的简谐振动。

1.3.3 形如 $F = F(v)$ 的情形

可由下列几条途径求解此类运动微分方程:

- (1) 由 $m \frac{dv}{dt} = F(v)$, 理论上经 $\int_{v_0}^v \frac{m dv'}{F(v')} = t - t_0$ 可以解出 $v = v(t)$; 再利用 $v = \frac{dx}{dt}$, 经 $x = x_0 + \int_0^t v(t') dt'$ 解得 $x = x(t)$ 。
- (2) 将 $\frac{dv}{dt}$ 换成 $\frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$ 后, 由 $mv \frac{dv}{dx} = F(v)$, 经 $x = x_0 + \int_{v_0}^v \frac{mv'}{F(v')} dv'$ 解得 $x = x(v)$; 再将 v 换成 $\frac{dx}{dt}$ 可继续求得 $x = x(t)$ 。

在具有阻力的介质中运动的抛物体运动(斜抛或竖直上抛)常常采用此方法。

抛物体通常是在空气中运动的, 在运动中总要受到空气阻力的作用。在实际问题中, 常常要研究子弹或炮弹在离开枪管或炮管后的运动问题, 子弹或炮弹在离开枪管或炮管后, 都是以一定的初速度在空气阻力和重力作用下作抛体运动。由于空气阻力非常复杂, 所以研究抛体运动问题是专门的学科, 而在此只是对这类问题的大概情况做简单介绍。

一般的抛体运动是一个平面运动, 而空气阻力总是沿着轨道切线, 并与运动速度方向相反, 空气阻力只是速度的函数 $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{v})$, 所以解决此类问题一般用内禀方程较为方便。

如果速度较小, 则可近似地认为阻力只与速度 v 的量值成正比, 即

$$\mathbf{R} = -b\mathbf{v}$$

若抛射体作斜抛运动, 设在 xy 平面内运动, 重力在 y 方向上, 则其运动微分方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -b\dot{x} \\ m\ddot{y} = -b\dot{y} - mg \end{cases} \quad (1.18)$$

若抛射体作上抛运动, 则其运动微分方程为

$$m\ddot{y} = -b\dot{y} - mg$$

例 1.2 求解质量为 m 的物体以初速度 v_0 竖直上抛, 落回原处时的速度和经过的时间。

解 取地面为参考系, x 轴竖直向上, 抛出点为坐标原点。只要质点向上运动和向下运动时受的力有同样的表达式, 就可以用统一的运动微分方程来处理整个运动过程, 不必对向上、向下运动分列, 更不必取不同的坐标。

为让以后的式子简单些, 把阻力写成 $-mk\dot{x}$ ($k > 0$), 向上和向下运动均能适用, 故整个运动过程的运动微分方程为

$$m\ddot{x} = -mk\dot{x} - mg$$

方法一 采用上述第一条途径, 运动微分方程写成

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -kv - g \\ \frac{dv}{-(kv + g)} &= dt \end{aligned}$$

利用初始条件 $t = t_0$ 时, $v = v_0$, 积分可得

$$v = \left(v_0 + \frac{g}{k} \right) e^{-kt} - \frac{g}{k}$$

即

$$dx = \left[\left(v_0 + \frac{g}{k} \right) e^{-kt} - \frac{g}{k} \right] dt$$

继续利用初始条件 $t=t_0$ 时, $x=0$, 积分可得

$$x = \frac{1}{k} \left(v_0 + \frac{g}{k} \right) (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t$$

代入 k, v_0, g 的具体数值后, 就可以得到题目要求的重新回到 $x=0$ 时的 t, v 值。

可以验证, $k \rightarrow 0$ 时有

$$v = v_0 - gt, \quad x = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$

的确是无阻尼时的上抛运动应有的结果。

方法二 采用上述第二条途径, 运动微分方程可写成

$$v \frac{dv}{dx} = -(kv + g)$$

$$\frac{v dv}{(kv + g)} = -dx - \left[\frac{1}{k} \frac{kv + g}{(kv + g)} - \frac{1}{k} \frac{g}{(kv + g)} \right] dx$$

利用初始条件 $x=0$ 时, $v=v_0$, 积分可得

$$x = -\frac{1}{k} (v - v_0) - \frac{g}{k^2} \ln \frac{kv + g}{kv_0 + g}$$

可解出 $x=x(v)$ 。

注: 当抛射体的速度接近炮弹速度时, 可以认为阻力与速度的平方成正比; 但是当炮弹速度接近声速时, 阻力与速度的关系就不是简单的函数关系, 所以确定轨道也就非常困难, 只能用图解法或近似解法。

1.3.4 形如 $F = F(r)e_r$ 的情形

在这种力的作用下, 不论质点的初始条件是怎样的, 根据牛顿第二定律可知, 质点的运动一定位于初速度和位矢所张的平面内。由于力是矢径的函数, 所以采用极坐标, 根据公式(1.7)得到

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r) \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

考虑函数 $r^2 \dot{\theta}$, 将其对时间 t 求导数

$$\frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = r(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

显见上式等于零, 所以函数 $r^2 \dot{\theta}$ 是与时间无关的常量, 即

$$r^2 \dot{\theta} = r_0^2 \dot{\theta}_0 = h \quad (1.20)$$

其中 $r_0, \dot{\theta}_0$ 为初始条件, h 为常量, 代入式(1.19)的第一式中, 可得

$$\ddot{r} = \frac{F(r)}{m} + \frac{(r_0^2 \dot{\theta}_0)^2}{r^3}$$

或者

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = \frac{F(r)}{m} \quad (1.21)$$

变成 1.3.2 节中所述的可解类型 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x)$ 方程, 这类问题将在今后的有心力场中详细叙述。

1.3.5 一维运动的常数系数线性齐次方程

以上几种情况比较简单和常见, 还有一般的情况, 例如, 考虑质点受介质阻尼的受迫振动, 力就是三个变量(坐标、速度和时间)的函数 $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$, 这类问题的求解是相当困难的。而对于其中的一维问题 $\mathbf{F}(x, \dot{x}, t)$, 其运动微分方程常具有如下形式

$$m \ddot{x} = -b \dot{x} - kx + F(t) \quad (1.22)$$

式中, m 是质点质量, $-b \dot{x}$ 为介质阻力, $-kx$ 为弹性力, 而 $F(t)$ 为驱动力。当 $F(t)$ 等于零时, 方程(1.22)称为二阶常系数线性齐次方程。而若 $F(t)$ 不等于零, 则方程(1.22)称为二阶常系数线性非齐次方程。

下面以方程 $A \ddot{x} + B \dot{x} + Cx = F(t)$ 为例说明此类方程的解法, 式中 A, B, C 均为常量。先解二阶常系数线性齐次方程 $A \ddot{x} + B \dot{x} + Cx = 0$, 若 $B^2 - 4AC \geq 0$, 其通解有两种情况:

(1) $x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$, r_1, r_2 是特征方程 $Ar^2 + Br + C = 0$ 的两个不同根

$$r_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

(2) $x = c_1 e^{r t} + c_2 t e^{r t}$, r 是上述特征方程的重根

$$r = \frac{-B}{2A}$$

而若 $B^2 - 4AC < 0$, 此时, 其特征方程的两个根是一对共轭复数, 方程的通解可写成

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_d t + \alpha) \quad (1.23)$$

式中两个待定常数 A_0, α 都由初始条件决定。而式中 β, ω_d 分别为

$$\beta = \frac{B}{2A}, \quad \omega_d = \frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2A}$$

阻尼振动问题中常常利用这种方程。

对于二阶常系数线性非齐次方程 $A \ddot{x} + B \dot{x} + Cx = F(t)$ 的解, 是在相应的齐次方程的通解上再加一个特解。

例 1.3 下面用解常系数线性齐次微分方程的特殊解法再解质量为 m 的物体以初速度 v_0 竖直上抛的问题, 求质点落回原处时的速度和经过的时间。

解 运动方程依旧为

$$m \ddot{x} + mk \dot{x} = -mg$$

作变量代换, 变成标准的齐次方程形式。令 $y = \dot{x} + \frac{g}{k}$, 方程变为

$$\dot{y} + ky = 0$$

特征方程为

$$r + k = 0$$

所以

$$y = c_1 e^{-kt}$$

即

$$\dot{x} + \frac{g}{k} = c_1 e^{-kt}$$

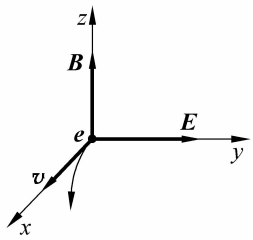
分离变量后积分可得

$$x = -\frac{c_1}{k} e^{-kt} - \frac{g}{k} t + c_2$$

用初始条件 $t=0$ 时, $x=0$, $\dot{x}=\mathbf{v}_0$ 可以确定两个常数 c_1, c_2 , 从而可以得到相同的结论。

例 1.4 向相互垂直的匀强电磁场 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ 中发射一电子, 并设电子的初始速度 $\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{E}$ 及 $\mathbf{B}$ 垂直。试求电子的运动规律。

分析 因为电磁场 $\mathbf{E}$ 及 $\mathbf{B}$ 互相垂直, 所以建立图示直角坐标系, 并令初速度 $\mathbf{v}$ 沿 x 轴正向。电场可以使得电子速度大小改变, 而磁场不改变电子速度大小, 却可以改变电子的运动方向, 所以一旦电子沿 x 正向进入此电磁场, 必将在 xy 平面内运动, 即电子的速度将会有 x 和 y 分量。



例 1.4 图

解 电子受电磁场力合力为 $\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= eE\mathbf{j} + e \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = eE\mathbf{j} + e \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} \\ &= eBv_y\mathbf{i} + e(E - Bv_x)\mathbf{j} \end{aligned}$$

根据公式(1.4)列出运动微分方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x} = eB\dot{y} & (1) \\ m\ddot{y} = eE - eB\dot{x} & (2) \\ m\ddot{z} = 0 & (3) \end{cases}$$

由式(2)知

$$d\dot{y} = \frac{eE}{m}dt - \frac{eB}{m}dx$$

两边积分

$$\int_0^{\dot{y}} d\dot{y} = \int_0^t \frac{eE}{m}dt - \int_0^x \frac{eB}{m}dx$$

即

$$\dot{y} = \frac{eE}{m}t - \frac{eB}{m}x = v_y$$

代回式(1)中得到

$$\ddot{x} + \frac{e^2 B^2}{m^2}x = \frac{e^2 BE}{m^2}t$$

这是二阶常系数线性的非齐次方程, 令 $\omega^2 = \frac{e^2 B^2}{m^2}$, 则其通解为

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{E}{B}t$$

当 $t=0$ 时 $\begin{cases} x=0 \\ \dot{x}=v \end{cases}$, 代入上式即得到 $\begin{cases} 0=c_1+0+0 \\ v=0+c_2\omega+E/B \end{cases}$, 可定出常数 c_1 和 c_2 , 求得

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{\omega} \left(v - \frac{E}{B} \right) = \frac{m}{eB} \left(v - \frac{E}{B} \right)$$

最后得到

$$x = \frac{m}{eB} \left(v - \frac{E}{B} \right) \sin \frac{eB}{m} t + \frac{E}{B} t \quad (4)$$

将式(4)代入式(2)中可以求出 y ,

$$y = \frac{m}{eB} \left(v - \frac{E}{B} \right) \cos \frac{eB}{m} t + \frac{mE}{eB^2} - \frac{mv}{eB} \quad (5)$$

这就是入射电子的运动方程。当然也可以先由方程(1)求出 $\dot{x}$ 代入方程(2)中求 y , 然后再代回(1)中求 x , 结果一致, 具体推导过程供读者做练习。

1.4 其他数学方法介绍

除了上述几种解方程的简单方法外, 理论力学中还有很多运用数学工具处理复杂问题的方法, 我们只简单列举几种数学方法, 不做详述。

- (1) 常数变易法;
- (2) 引入积分因子变成恰当积分法;
- (3) 参数表示法;
- (4) 拉普拉斯变换法;
- (5) 傅里叶级数解法;
- (6) 微扰法。

1.5 有约束存在时的运动

1.5.1 约束及其分类

如果质点受到某种约束, 例如被限制在某曲线或曲面上运动, 不能脱离该线或该面而作任意的运动并占据空间任意的位置, 则叫**非自由质点**。此时, 该线或该面叫**约束**, 而该线或该面的方程叫**约束方程**。

若讨论非自由质点情况, 由于约束的存在, 需将约束去掉, 一般地是去掉约束而代之以**约束反作用力**, 从而将问题转化成对自由质点的作用问题。约束反作用力一般都是未知的, 与普通的力不同, 它不完全决定于约束本身, 并不能引起质点的任何运动, 所以又常被称为**约束力**或**被动力**。而不是约束力的那些力称为**主动力**, 主动力是已知的普通力。

这样可以将质量系统受力情况分成主动力和约束力(被动力)两大类, 分别以 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{R}$ 代表, 此时公式(1.3)可以表示为

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) + \mathbf{R} \quad (1.24)$$

其中 $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ 称为**主动力**, $\mathbf{R}$ 称为**约束力**。

一般地, 约束反力都作用在接触点上, 无摩擦时在法向上, 有摩擦时, 与法向有一定角度的偏移。

约束是使质点的坐标、速度、加速度、坐标对时间更高级的导数受到限制的作用, 其数学

表达式又称为**约束方程**,表示为

$$f(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = 0 \quad (1.25)$$

或

$$f(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = 0 \quad (1.26)$$

前者称为**含时约束**或**不稳定约束**,后者称为**不含时约束**或**稳定约束**。

如果约束只对质点的坐标有所限制,即 $f(\mathbf{r}, t) = 0$ 或 $f(\mathbf{r}) = 0$,称为**几何约束**或**空间约束**,否则称为**微分约束**或**运动约束**。

例如,质点只能在某个固定的曲面上运动,该曲面的方程为 $f(x, y, z) = 0$,即任何时刻质点的坐标 (x, y, z) 必须满足此方程;如果质点只能在某个运动的或变形的曲面上运动,即在变化的曲面上运动,则 t 时刻质点的坐标 (x, y, z) 必须满足该时刻的曲面方程 $f(x, y, z, t) = 0$ 。

又比如质点只能在一个曲面的一方运动,则质点所受的约束方程为

$$f(x, y, z) \geq 0 \quad (1.27)$$

或者

$$f(x, y, z) \leq 0 \quad (1.28)$$

例如质点可在固定的球面上或者球面外运动,其坐标就必须满足方程(1.27);而如果质点通过一个不可伸长的绳子拴于固定点或者质点只能在一个容器内部运动,其坐标就受到方程(1.28)的限制。质点的坐标还可能受到下列约束之一:

$$f(x, y, z, t) \geq 0 \quad (1.29)$$

或者

$$f(x, y, z, t) \leq 0 \quad (1.30)$$

上面的式(1.25)~式(1.30)都是约束方程。约束方程式表示为等式的约束称为**双面约束**或**不可解(脱)约束**,表示为不等式的约束称为**单面约束**或**可解(脱)约束**。处理可解(脱)约束可以分段作为不可解(脱)约束和无约束处理,即当质点位于曲面上时有不可解约束,脱离曲面后就将无约束。

只对坐标有所限制的不可解约束,称为**完整约束**,其他称为**非完整约束**或**不完整约束**。非完整约束有两种情况,一种是约束方程中含有坐标对时间的导数的约束,另一种是约束方程是不等式的约束。如果说完整约束只对系统的坐标有所限制,对系统的速度没有任何限制,这种说法不全面,因为,如果将完整约束的约束方程对 t 求导,就得到形似非完整约束的约束方程,可见完整约束并非对系统的速度没有限制,而是这种限制已经包含在系统坐标的限制当中了。

反之,含有坐标对时间导数的约束方程,若不能通过积分变成不含坐标对时间导数的约束方程的才是非完整约束,否则还是完整约束。对于只受完整约束的系统,称为**完整系统**。非完整系统的理论还不成熟和完善,现只讨论完整约束下的系统运动情况。

问题 1 纯滚动条件是完整约束吗?

问题 2 完整约束对系统的速度有限制吗?

上面两个问题的回答都是肯定的!纯滚动的条件写成 $\dot{x} = R\dot{\theta}$,显然上式在数学上是可完全积分的,通过积分可转化为 $x = R\theta$,即为完整约束方程,因此可完全积分的微分约束方程与完整约束方程实质上是等价的。

1.5.2 约束力

约束物给予质点的作用力称为**约束反作用力**,简称为**约束反力**或**约束力**。约束力一般都是未知的,与普通的力不同,它不完全决定于约束本身,并不能引起质点的任何运动,所以又常被称为**被动力**。

不是约束力的那些力称为**主动力**,主动力是已知它与质点的位置、速度、时间的函数关系的力,但是在解运动微分方程之前不能知道它对质点的坐标、速度等有什么影响。

两种力的不同可以大致分为下面三方面加以区分:

第一,主动力一般是已知的,即遵从的定律是已知的。例如万有引力遵从万有引力定律,弹性力遵从胡克定律,带电粒子间的作用力遵从库仑定律,而在流体中运动的质点受到的阻力与质点的速度的关系也是已知的,所以它们都具有 $\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t)$ 的形式,且函数关系是已知的,这类力对质点运动的影响必须通过解运动微分方程才能知道,而且与初始条件有关。

约束力 $\mathbf{R}$ 遵从什么定律不一定清楚,而且至多只是知道约束力的方向,有时还只是知道其作用点,大小未知,因此增加了新的作用量。

第二,主动力与 $(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t)$ 的函数关系不受另一个主动力、约束力的影响。在某时刻,如果知道质点处于某种运动状态 $(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$,这个主动力对质点的作用力的大小和方向就是确定的。

约束力对质点的作用,其大小和方向并不是由质点的运动状态 $(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$ 和时间 t 所能决定的,而与其他力的作用情况有关,还与质点在此刻的加速度有关。

第三,约束力对质点运动的限制由约束方程给出,就其对质点运动的限制而言是不需解运动微分方程就知道的,而且与初始条件、受主动力的情况无关。

若想知道主动力对质点运动的影响,则需解运动微分方程,而且与其他力(包括主动力和约束力)、初始条件都有关。

1.5.3 滑动摩擦力是否为约束力?

质点与约束物之间有相对运动时的滑动摩擦力既具有约束力的某些特征,又具有主动力的某些特征,将它看作具有某些约束力特征的主动力更好些。

说它是主动力,它不能表示成 $\mathbf{F}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t)$ 的形式,所以不能根据某时刻质点的运动状态 $(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$ 来确定这个力,这是它呈现约束力的一面,但是它又没有具体的约束方程。

说它是约束力,它还受其他力如正压力的影响,具有一个摩擦定律,有一个 $\mathbf{F}=\mu\mathbf{N}$ 的函数关系,虽然含有一个未知量 $\mathbf{N}$,但它没有增加新的变量, $\mathbf{N}$ 是与另一个约束有关的未知变量。有相对运动的滑动摩擦力的指向在列运动微分方程时必须给定,有时难以判断,可假定一个指向,解出方程后如出现不合理结果,说明原假定的指向不正确,再改成另一个指向重新解方程,这些都是主动力的特征。

所以,将滑动摩擦力归为主动力更合适一些,即为具有某些约束力特征的主动力。在分析力学中,将把有相对运动时的滑动摩擦力当主动力处理。

1.5.4 系统的自由度

描述一个系统的位置的独立坐标数,称为系统的**自由度数**(**自由度**)。不受约束的质点

有三个自由度,需要三个相互独立的坐标表示它的位置。如受到一个完整约束方程的限制,则三个坐标中只有两个独立的坐标,自由度即为两个。有几个独立的完整约束,自由度数就减少几个。

非完整约束方程不能通过积分变成仅是坐标和时间的约束方程,不能减少描述系统位置的独立坐标数,即不减少自由度数。这也正是只处理完整系统问题的原因。

约束(k)越多,自由度(s)越少,但是加上约束方程,需要求解的牛顿方程数反而更多。若系统由 n 个质点组成,则有

$$s = 3n - k \quad (1.31)$$

分析力学将引入独立的广义坐标(s 个)来建立拉格朗日方程。这样拉格朗日微分方程形式不但唯一,而且其方程数量由自由度数确定,大大减少了需要求解的方程数量,而且拉格朗日方程虽然来源于力学,却不只适于力学领域,它适应于整个物理学。另外,还有许多优点将在后续的分析力学中逐一介绍。

例 1.5 在以下约束方程中,属于完整约束的有((1)(3)(4));属于非完整约束的有((2)(5));属于稳定约束的有((1)(2)(3)(5));属于非稳定约束的有((4))。

- (1) $x^2 + y^2 = 4$; (2) $x^2 + y^2 < 4$; (3) $\dot{x} - r\dot{\theta} = 0$; (4) $x^2 + y^2 = 10t^2$;
(5) $(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(y_1 + y_2) = (\dot{y}_1 + \dot{y}_2)(x_1 - x_2)$ 。

1.5.5 有约束存在时运动方程的建立

有约束存在时运动方程可由牛顿第二定律表示为

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) + \mathbf{R} \quad (1.32)$$

其中 $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ 称为主动力, $\mathbf{R}$ 称为约束力。

这样物理问题就转化为数学问题,具体地说转化为解数学方程问题,即变为常系数二阶微分方程的积分问题。其中每个二阶方程的通解都将包含两个积分常数。

通常将积分问题称为动力学的正问题,而求导问题称为动力学的逆问题。

例 1.6 小环质量为 m ,套在一条光滑的钢索上,钢索的方程式为 $x^2 = 4ay$ 。试求小环自 $x=2a$ 处自由滑至抛物线顶点时的速度及小环在此时受到的约束反作用力。

解 小环受垂直向下的重力 mg 和约束力 $\mathbf{R}$ 作用, $\mathbf{R}$ 的方向应沿着抛物线的法向,如图所示。

由式(1.12),可写出小环在任意位置 P 处的运动微分方程

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin\theta \quad (1)$$

$$m \frac{v^2}{r} = R - mg \cos\theta \quad (2)$$

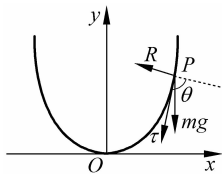
因为

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}$$

而

$$\sin\theta = -\frac{dy}{ds}$$

故式(1)变为



例 1.6 图

$$mv \frac{dv}{ds} = -mg \frac{dy}{ds}$$

即

$$v dv = -g dy \quad (3)$$

因为 $x=2a, y=a$, 上式两边定积分后得到

$$v = \sqrt{2ag} \quad (4)$$

这就是小环自 $x=2a$ 处自由滑至抛物线顶点时的速度。

由 $x^2=4ay$ 知道

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2a}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2a}$$

在抛物线顶点处

$$x=0, \quad y=0, \quad y'=0, \quad y''=\frac{1}{2a}$$

而

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

得此处的曲率半径

$$\rho = 2a$$

代入式(2)中得到

$$R = m \frac{v^2}{\rho} + mg \cos\theta = m \frac{2ag}{2a} + mg = 2mg \quad (5)$$

所以, 小环滑到抛物线的顶点时, 所受的约束反作用力为 $2mg$ 。

例 1.7 如图示, 位于竖直面内半径为 r 的光滑钢丝圆圈, 圆圈上套一重为 W 的小环。若钢丝圆圈以匀加速度 a 沿竖直方向运动, 求小环的相对速度 v 及圆圈对小环的反作用力 R 。

解 设钢丝圆圈以匀加速度 a 向上运动, 以钢丝圆圈为参考系, 在圆圈这个非惯性系中讨论问题, 则小环 ($m = \frac{W}{g}$) 将受到一个向下的大小为 ma 的惯性力作用, 小环的运动微分方程为

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = mg \sin\varphi + ma \sin\varphi \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} m \frac{v^2}{r} = R + mg \cos\varphi + ma \cos\varphi \end{cases} \quad (2)$$

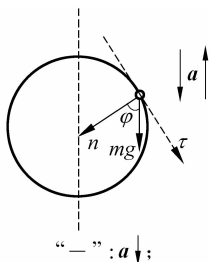
式(1)两边分别乘以 v 和 $r \frac{d\varphi}{dt}$, 得到

$$v \frac{dv}{dt} = (g \sin\varphi + a \sin\varphi) \cdot r \frac{d\varphi}{dt}$$

两边积分

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{\varphi_0}^{\varphi} (g \sin\varphi + a \sin\varphi) \cdot r d\varphi$$

得



例 1.7 图

$$v^2 = v_0^2 + 2(g+a)(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)r$$

代入式(2)中,得

$$\begin{aligned} R &= m \frac{v^2}{r} - m(g+a)\cos\varphi \\ &= m \frac{v_0^2}{r} + 2m(g+a)\cos\varphi_0 - 3m(g+a)\cos\varphi \\ &= \frac{W}{g} \left[\frac{v_0^2}{r} + g \left(1 + \frac{a}{g} \right) (2\cos\varphi_0 - 3\cos\varphi) \right] \end{aligned}$$

若钢丝圆圈以匀加速度 a 向下运动,则小环将受到一个向上的大小为 ma 的惯性力作用,小环的运动微分方程为

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = mg \sin\varphi - ma \sin\varphi & (3) \\ m \frac{v^2}{r} = R + mg \cos\varphi - ma \cos\varphi & (4) \end{cases}$$

同理得到

$$v^2 = v_0^2 + 2(g-a)(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)r$$

和

$$R = \frac{W}{g} \left[\frac{v_0^2}{r} + g \left(1 - \frac{a}{g} \right) (2\cos\varphi_0 - 3\cos\varphi) \right]$$

另外,若根据能量守恒

$$\frac{1}{2}mv^2 + m(g \pm a)r\cos\varphi = \frac{1}{2}mv_0^2 + m(g \pm a)r\cos\varphi_0$$

得到

$$v^2 = v_0^2 + 2(g \pm a)(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)r$$

再利用圆周运动

$$\frac{mv^2}{r} = R + m(g \pm a)\cos\varphi$$

得

$$\begin{aligned} R &= m \frac{v^2}{r} - m(g \pm a)\cos\varphi \\ &= \frac{W}{g} \left[\frac{v_0^2}{r} + g \left(1 \pm \frac{a}{g} \right) (2\cos\varphi_0 - 3\cos\varphi) \right] \end{aligned}$$

结果一样。

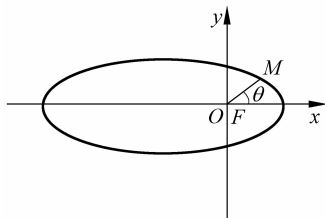
思考题

- 1.1 在极坐标系中, $v_r = \dot{r}$, $v_\theta = r\dot{\theta}$, 为什么 $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ 而非 $\ddot{r}$, $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ 而非 $r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}$?
- 1.2 在内禀方程中, a_n 是怎样产生的? 为什么在空间曲线中它总是沿着主法线的方向?
- 1.3 在怎样的运动中只有 a_t 而无 a_n ? 在怎样的运动中又只有 a_n 而无 a_t ? 在怎样的运动中既有 a_t 又有 a_n ?

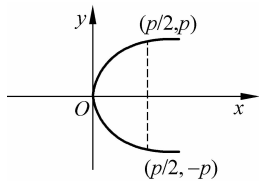
- 1.4 质点仅因重力作用而沿光滑静止曲线下滑,达到任意一点时的速度只与什么有关? 假如不是光滑的又将如何?
- 1.5 为什么质点被约束在一光滑静止的曲线上运动时,约束力不做功? 利用动能定理能否求出约束力? 如不能,应该怎样去求?
- 1.6 物体运动的速度是否总是和所受的外力方向一致? 为什么?
- 1.7 什么是完整约束? 非完整约束都有哪几种?
- 1.8 主动力与约束力各有什么特点?

习题

- 1.1 分别用直角坐标解析法、图示法和角速度与速度关系方法推导平面极坐标单位矢量的导数表达式 $\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r \end{cases}$ 。
- 1.2 试自 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 出发,计算 $\ddot{x}$ 和 $\ddot{y}$,并由此推出径向加速度 a_r 和横向加速度 a_θ 。
- 1.3 质点作平面运动,速率保持为常数。试证明其速度矢量 $\mathbf{v}$ 与加速度矢量 $\mathbf{a}$ 正交。
- 1.4 质量为 m 的质点,约束在半径为 R 的光滑半球形碗的内壁中运动,试应用牛顿第二定律用柱坐标写出质点的运动微分方程。
- 1.5 重为 W 的小球不受摩擦而沿半长轴为 a 、半短轴为 b 的椭圆弧滑下,此椭圆的短轴是竖直的。如小球自长轴的端点开始运动时,其初速为零,试求小球在到达椭圆的最低点时它对椭圆的压力。
- 1.6 质点沿着半径为 r 的圆周运动,其加速度矢量与速度矢量间的夹角 α 保持不变,求质点的速度随时间而变化的规律。已知初速度为 v_0 。
- 1.7 上题中,试证其速度可表示为 $v = v_0 e^{(\theta - \theta_0) \cot \alpha}$,式中 θ 为速度矢量与 x 轴之间的夹角,且当 $t = 0$ 时, $\theta = \theta_0$ 。
- 1.8 直线 FM 在给定的椭圆平面内以匀角速度 ω 绕其焦点 F 转动,求此直线与椭圆的交点 M 的速度。已知以焦点为坐标原点的椭圆的极坐标方程为 $r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$,式中 a 为椭圆的半长轴, e 为偏心率,都是常数。
- 1.9 一质点沿着抛物线 $y^2 = 2px$ 运动,其切线加速度的量值为法向加速度量值的 $-2k$ 倍。若此质点从正焦弦的一端 $(\frac{p}{2}, p)$ 以速度 u 出发,试求其达到正焦弦的另一端时的速率。



习题 1.8 图



习题 1.9 图