

第 3 章

恒定磁场

上一章讨论了在恒定电流条件下分布不变的电荷所产生的恒定电场的性质。实验表明,恒定电流会产生恒定磁场,或者称为静态磁场。静态电场与静态磁场又统称为静态电磁场(静态场)。本章将从基本实验定律出发,描述恒定磁场的基本场矢量和基本场方程,讨论恒定磁场的性质,确立恒定磁场的边界条件,分析磁偶极子、矢量磁位、电感、磁场能量和磁场力等基本问题。

3.1 恒定磁场的基本定律

3.1.1 安培力定律

实验表明,两个恒定电流回路之间存在着相互作用力。1820 年,法国物理学家安培通过实验总结出这个相互作用力所遵循的规律,即安培力定律。

如图 3-1 所示,根据安培力定律,在真空中有分别载有恒定电流 I 、 I_1 (线电流)的两个回路 C_0 和 C_1 ,则 C_0 对 C_1 的作用力为

$$\mathbf{F}_{10} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_0} \oint_{l_1} \frac{I_1 d\mathbf{l} \times (I d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R)}{R^2} \quad (3-1)$$

其中, l' 、 l 分别为对两个回路 C_0 和 C_1 的积分路径, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ (亨/米)为真空中的磁导率; $\mathbf{r}'$ 和 $\mathbf{r}$ 分别为电流元 $I d\mathbf{l}'$ 与 $I_1 d\mathbf{l}$ 的位置矢量, R 为两个电流元之间的距离。 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = R\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_R = \mathbf{R}/R$ 。

同样,回路 C_1 对 C_0 的作用力为 $\mathbf{F}_{01} = -\mathbf{F}_{10}$,即两个回路之间的相互作用力满足牛顿第三定律。

由式(3-1)可以得到两个电流元 $I d\mathbf{l}'$ 与 $I_1 d\mathbf{l}$ 之间的相互作用力为

$$d\mathbf{F}_{10} = -d\mathbf{F}_{01} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\mathbf{l} \times (I d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R)}{R^2} \quad (3-2)$$

注意,实际上孤立的电流元并不存在,在此主要用于电流闭合回路安培力的计算。

3.1.2 毕奥-萨伐尔定律

实验表明,电流元在磁场中会受到力的作用,该力的大小与磁场、电流的大小及磁场与电流方向夹角的正弦成正比,其方向与电流方向和磁场方向均垂直。由此得到该力与电流元 $I d\mathbf{l}$ 、磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的关系如下

$$d\mathbf{f} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (3-3)$$

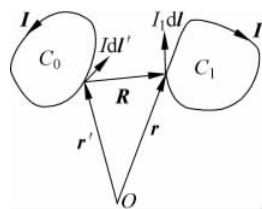


图 3-1 电流回路之间的相互作用力

对于闭合回路,其在磁场中受到的力为

$$\mathbf{f} = \oint_l I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (3-4)$$

类似于静电场中电场强度的定义,恒定电流回路在某点产生的磁感应强度可定义为单位电流元在该点所受到的最大磁场力。由此比较式(3-3)与式(3-2),此时式(3-3)中的 $I d\mathbf{l}$ 相当于式(3-2)中的 $I_l d\mathbf{l}$,可以得到电流元 $I d\mathbf{l}'$ 在距离其 $\mathbf{R}$ 的场点处产生的磁场为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3} \quad (3-5-1)$$

其中,磁感应强度 $\mathbf{B}$ 为一个矢量函数,其单位为特斯拉(T),或者韦伯/米²(Wb/m²)。在工程上还用较小的单位高斯(Gs),其中,1T=10⁴ Gs。

对于面电流分布,由于 $I d\mathbf{l}' = \mathbf{J}_s dy' d\mathbf{l}' = \mathbf{J}_s dS'$,其中 $\mathbf{J}_s$ 为面电流密度, dy' 为垂直于电流方向的横向长度。因此,面电流元产生的磁感应强度为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}_s \times \mathbf{R}}{R^3} dS' \quad (3-5-2)$$

同理,对于体电流分布, $I d\mathbf{l}' = \mathbf{J}(r') dS' d\mathbf{l}' = \mathbf{J}(r') dV'$, $\mathbf{J}(r')$ 为体电流密度, dS' 为垂直于电流方向的横截面,体电流元产生的磁感应强度为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}(r') \times \mathbf{R}}{R^3} dV' \quad (3-5-3)$$

对式(3-5)各式积分可以得到线电流分布、面电流分布和体电流分布时电流回路产生的磁场分别为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3} \quad (3-6-1)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S'} \frac{\mathbf{J}_s \times \mathbf{R}}{R^3} dS' \quad (3-6-2)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{J}(r') \times \mathbf{R}}{R^3} dV' \quad (3-6-3)$$

其中, S' 为面电流分布区域, V' 为体电流分布区域。

以上各式称为毕奥-萨伐尔定律,几乎与安培力定律同时,于1820年由法国物理学家毕奥、萨伐尔根据闭合电流回路的实验结果,并通过理论分析总结出来。

由于 $I d\mathbf{l} = \frac{dq}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \mathbf{v} dq$,因此磁场对电流的作用可认为是对运动电荷的作用。将此表达式代入式(3-3)可得

$$d\mathbf{f} = dq \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3-7)$$

对上式两边积分可得

$$\mathbf{f} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3-8)$$

上式为运动速度为 $\mathbf{v}$ 的电荷 q 在磁场 $\mathbf{B}$ 中受到的洛伦兹力的表达式。

电荷 q 被放置到电场 $\mathbf{E}$ 中受到的电场作用力为 $q\mathbf{E}$ 。结合式(3-8)可知,运动速度为 $\mathbf{v}$ 的电荷 q 在电场 $\mathbf{E}$ 和磁场 $\mathbf{B}$ 中受到的作用力为

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

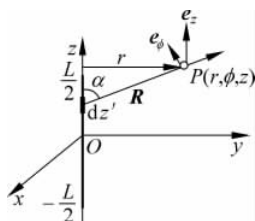


图 3-2 长直载流导线

例题 3-1 直流电流 I 通过长为 L 的直导线。求空间任一点处的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 。

解 如图 3-2 所示,取圆柱坐标系,设带电线段沿 z 轴排列。取电流元为 $Idz'e_z$,源点和场点分别为 $(0,0,z')$ 、 $P(r,\phi,z)$ 。应用毕奥-萨伐尔定律,得到 $Idz'e_z$ 在场点的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idz'e_z \times \mathbf{e}_R}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin\alpha dz'}{R^2} \mathbf{e}_\phi$$

由图 3-2 可知, $R = [r^2 + (z - z')^2]^{1/2}$, $\sin\alpha = \frac{r}{[r^2 + (z - z')^2]^{1/2}}$ 。所以,长直载流导线在观察点产生的磁场为(注:利用积分递推公式)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I \mathbf{e}_\phi}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{rdz'}{[r^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 I \mathbf{e}_\phi}{4\pi r} \left\{ \frac{z + L/2}{[r^2 + (z + L/2)^2]^{1/2}} - \frac{z - L/2}{[r^2 + (z - L/2)^2]^{1/2}} \right\}$$

当长直载流导线区域无穷长时

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I \mathbf{e}_\phi}{2\pi r}$$

例题 3-2 计算半径为 a 、电流为 I 的电流圆环在轴线上的磁感应强度。

解 如图 3-3 所示,取圆柱坐标系,场点和源点坐标分别为 $(0,0,z)$ 、 $(a,\phi',0)$ 。电流元 $Idl' = Iad\phi'e_\phi$,应用毕奥-萨伐尔定律,考虑到 Idl' 与其对称位置 $(a,-\phi',0)$ 处电流元 Idl'' 产生的 $\mathbf{B}$ 矢量在 xOy 平面的分量抵消,只剩下 $\mathbf{e}_z$ 方向的分量,因此

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl' \times \mathbf{e}_R}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cos\alpha dz'}{R^2} \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin\theta dz'}{R^2} \mathbf{e}_z$$

由于 $R = (z^2 + a^2)^{1/2}$, $\sin\theta = \frac{a}{[z^2 + a^2]^{1/2}}$,对上式积分得

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{e}_z}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I \sin\theta a d\phi'}{R^2} = \frac{\mu_0 I \mathbf{e}_z}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 d\phi'}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z$$

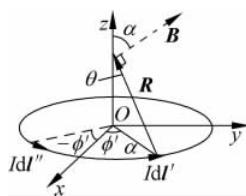


图 3-3 电流圆环

3.2 真空中的恒定磁场方程

与静电场类似,恒定磁场的性质也由其散度和旋度决定,本节基于恒定磁场方程讨论真空中磁场的基本性质。

3.2.1 恒定磁场的散度及磁通连续性原理

将矢量恒等式 $\nabla \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\frac{1}{R^3}$ 代入式(3-6-3)得

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{R} dV'$$

再利用矢量恒等式 $\nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} \right) = \frac{1}{R} \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') + \nabla \frac{1}{R} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')$,考虑到 $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ 仅为源点坐标 $\mathbf{r}'$ 的函数,并且 $\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$,代入上式,并整理得

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\nabla \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} \right) dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dV' \quad (3-9)$$

利用矢量恒等式 $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0$, 显然上式的散度为零, 即

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3-10)$$

上式表明, 恒定磁场的散度处处为零, 磁场为无散场, 也即无通量源的矢量场。

磁感应强度 $\mathbf{B}$ 可以用磁感线形象地描述, 其通量称为磁通量, 单位为韦伯(Wb), 因此 $\mathbf{B}$ 又称为磁通量密度。

对于任意一闭合曲面 S 包围的体积 V , 应用散度定理可得

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \oiint_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$$

应用式(3-10), 上式为

$$\oiint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \quad (3-11)$$

式(3-11)称为磁通连续性原理(方程), 式(3-10)是其微分形式。由于上式积分是对任意闭合曲面进行的, 因此表明自然界中没有独立的磁荷存在, 磁感线是封闭的, 也没有磁流源。式(3-11)也表示磁通量守恒, 因为它表明通过任一闭合曲面的净磁通量为零。

3.2.2 恒定磁场的旋度及安培环路定理

对式(3-9)两边取旋度, 利用恒等式 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$, 并考虑到 $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ 仅为源点坐标 $\mathbf{r}'$ 的函数, 得

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\nabla \times \nabla \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} \right) dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int_{V'} \nabla \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \nabla^2 \frac{1}{R} dV' \quad (3-12)$$

对于式(3-12)右边第一项的积分函数, 利用矢量微分关系, 并考虑到 $\nabla \cdot \mathbf{J}' = 0$, 有

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} = \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') = \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{R} = -\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{R}$$

再利用恒等式 $\nabla \cdot (g\mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \nabla g + g \nabla \cdot \mathbf{F}$, 并且考虑到恒定电场的电流连续性方程式(2-63-1), 即 $\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$, 上式为

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} = -\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{R} = \frac{1}{R} \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') - \nabla' \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} = -\nabla' \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R}$$

将上式代入式(3-12)右边第一项, 并应用散度定理得

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int_{V'} \nabla \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dV' &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int_{V'} \nabla' \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \oiint_{S'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} d\mathbf{S}' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \oiint_{S'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{e}_n}{R} dS' \end{aligned}$$

其中 S' 为包围电流区域 V' 的闭合曲面。根据恒定电流密度的边界条件式(2-70), 电流密度的法向分量连续, 而 $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ 仅限于在 S' 包围的区域 V' 分布, 因此 $\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{e}_n = 0$, 否则区域 V' 以外存在电流分布。故上式为零, 即式(3-12)右边第一项为零。

对于式(3-12)的第二项, 其中 $\nabla^2 \frac{1}{R} = \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, 因此

$$-\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \nabla^2 \frac{1}{R} dV' = \mu_0 \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

由于式(3-12)右边第一项为零,故将上式代入式(3-12)得

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (3-13)$$

式(3-13)表明,磁场为有旋场,它的旋度源为电流密度矢量,即恒定电流是产生恒定磁场的旋涡源。与自由空间中静电场的散度公式(2-7)相比较,因为 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$,因此电荷密度 ρ 没有磁相似性。

对式(3-13)等号两边同时进行面积分,可以得到磁场旋度方程的积分形式

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

再应用斯托克斯定理,得

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (3-14)$$

其中,闭合积分路径 l 是非闭合曲面 S 的边界, I 是通过曲面 S 的总电流。 l 的积分路径和电流方向满足右手定则,磁场和电流的方向服从安培定则。式(3-14)称为真空中安培环路定理的积分形式,表明自由空间中磁通量密度沿任一闭合路径的环量等于该环路围成曲面电流总量的 μ_0 倍。而式(3-13)称为真空中安培环路定理的微分形式。

3.2.3 恒定磁场的位函数及其方程

恒定磁场也可以用位函数来描述。下面在恒定磁场中引入磁场的矢量位函数,即矢量磁位 $\mathbf{A}$ 。在式(3-10)中,令

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3-15)$$

其中 $\mathbf{A}$ 为磁场中的矢量磁位。显然,根据矢量恒等式 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$,由矢量磁位得到的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 满足式(3-10)表述的恒定磁场的散度处处为零的条件。对比式(3-9)可得

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dV' \quad (3-16)$$

与上式对应,电流元产生的矢量磁位为

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dV' \quad (3-17)$$

可见对矢量磁位 $\mathbf{A}$ 的计算比直接计算磁感应强度 $\mathbf{B}$ 要简便。 $\mathbf{A}$ 的引入方便了对某些问题的分析。

将式(3-15)代入式(3-13),并利用矢量恒等式 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ 得

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

再利用静态场中的库仑规范(见附录B) $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$,上式为

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (3-18)$$

可见,矢量磁位 $\mathbf{A}$ 满足矢量形式的泊松方程。由式(3-13)知, $\mathbf{A}$ 之解的形式如同静电场的泊松方程。在面电流分布和线电流分布的情况下,矢量磁位 $\mathbf{A}$ 解的形式如下(其对应电流元产生的矢量磁位具有类似式(3-17)的形式)

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S'} \frac{\mathbf{J}_s}{R} dS'$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l'} \frac{\mathbf{I}}{R} dl'$$

由式(3-18)可知,对于无源区域($J=0$), $\mathbf{A}$ 满足矢量形式的拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad (3-19)$$

在无源区域,由式(3-13)得 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$,即此时磁通量密度 $\mathbf{B}$ 是无旋的。根据自由空间中磁场变量的关系式 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ (见3.3节),其中 $\mathbf{H}$ 为磁场强度,类似于静电场中的电位函数,引入标量磁位 φ_m ,即

$$\mathbf{H} = -\nabla \varphi_m \quad (3-20)$$

显然对于上式有: $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{H} = 0$ 。

标量磁位 φ_m 满足的位函数方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H} = -\mu_0 \nabla \cdot \nabla \varphi = -\mu_0 \nabla^2 \varphi_m = 0$$

因此, φ_m 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi_m = 0 \quad (3-21)$$

虽然在无源区域标量磁位和标量电位均满足拉普拉斯方程,但是标量电位和标量磁位 φ_m 的性质却不相同。由于在实际问题中并不存在磁荷, φ_m 必须通过给定的电流分布得到。而 $\mathbf{B}$ 的无旋性仅在没有电流的点存在, φ_m 又是通过 $\mathbf{H}$ 来定义的,因此,当区域中存在电流时,磁场是非保守场,标量磁位不是一个单值函数,故式(3-20)中的 φ_m 是由积分路径决定的。由于这些原因,在研究磁介质的磁场时,要用矢量法代替对标量的计算。

例题 3-3 求例题 3-1 真空中长为 L ,电流为 I 的载流直导线产生的矢量磁位 $\mathbf{A}$ 。

解 仍取圆柱坐标系,选取源点和场点如图 3-2 所示。

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dz'}{[r^2 + (z - z')^2]^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \ln \left\{ \frac{[r^2 + (L/2 - z)^2]^{1/2} + (L/2 - z)}{[r^2 + (L/2 + z)^2]^{1/2} - (z + L/2)} \right\}$$

在 $L \gg z, L \gg r$ 时

$$A_z \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left(\frac{L}{r} \right)^2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{L}{r} \right) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{r_0}{r} \right)$$

其中 r_0 为矢量磁位 $\mathbf{A}$ 的零点参考距离。可以进一步根据矢量磁位 $\mathbf{A}$ 计算磁感应强度 $\mathbf{B}$,结果与例题 3-1 一致。

例题 3-4 求真空中,电流为 I ,传输方向相反的无限长平行双线产生的矢量磁位 $\mathbf{A}$,如图 3-4 所示。

解 真空中任一点 P 的矢量磁位 $\mathbf{A}$ 是由两个载流直导线分别产生的矢量磁位叠加而成。设电流正方向沿 z 方向,根据例题 3-3 给出的单个无限长载流直导线产生的矢量磁位,可得

$$A_z = A_+ + A_- = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{r_-}{r_+} \right)$$

其中 r_+ 、 r_- 为点 P 分别到两条直导线的垂直距离。

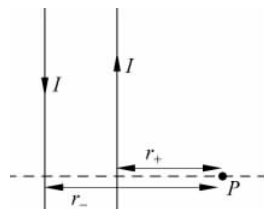


图 3-4 平行双线

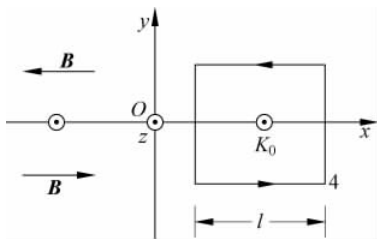


图 3-5 无限大载流导电平面

例题 3-5 在空气中,有载有恒定电流密度为 $\mathbf{K}_0$ 的无限大平面,求其产生的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 。如果无限大平面的厚度为 d ,电流密度为 $\mathbf{J}_0$,求空间磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的分布。

解 如图 3-5 所示,设无限大载流平面位于 xOz 平面,电流方向沿 z 轴, $\mathbf{K} = K_0 \mathbf{e}_z$ 。根据电流方向 and 对称性可知,在 $y > 0$ 区域, $\mathbf{B}$ 沿 $-\mathbf{e}_x$ 方向, $y < 0$ 区域, $\mathbf{B}$ 沿

e_x 方向, $\mathbf{B}$ 的大小与 x, z 无关, 且在到平面距离相同处 $\mathbf{B}$ 的大小相等。取长度为 l 的矩形闭合回路, 根据安培环路定理得

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 K_0 \cdot l$$

其中, C 为积分环路。由于在 y 方向上 $\mathbf{B}$ 的积分为零, 所以

$$2Bl = \mu_0 K_0 l, \quad B = \frac{\mu_0 K_0}{2}$$

即

$$\mathbf{B} = \begin{cases} -\mathbf{e}_x \frac{\mu_0 K_0}{2}, & y > 0 \\ \mathbf{e}_x \frac{\mu_0 K_0}{2}, & y < 0 \end{cases}$$

如果无限大平面的厚度为 d , 则导体板的两平面分别位于 $y=d/2$ 及 $y=-d/2$ 处, 此时体电流密度为 $\mathbf{J} = J_0 \mathbf{e}_z$ 。同样取长度为 l 的矩形闭合回路, 根据安培环路定理得:

(1) 在导体板外部

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_S J_0 \mathbf{e}_z \cdot d\mathbf{S} = \int_{-d/2}^{d/2} \mu_0 J_0 l dy$$

两边积分得

$$2Bl = \mu_0 J_0 dl, \quad B = \frac{\mu_0 J_0 d}{2}$$

即

$$\mathbf{B} = \begin{cases} -\mathbf{e}_x \frac{\mu_0 J_0 d}{2}, & y > d/2 \\ \mathbf{e}_x \frac{\mu_0 J_0 d}{2}, & y < -d/2 \end{cases}$$

(2) 在导体板内部距离位于 xOz 平面为 y 处

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_S J_0 \mathbf{e}_z \cdot d\mathbf{S} = \int_{-y}^y \mu_0 J_0 l dy$$

两边积分得

$$2Bl = 2\mu_0 J_0 y l, \quad B = \mu_0 J_0 y$$

即

$$\mathbf{B} = \begin{cases} -\mathbf{e}_x \mu_0 J_0 y, & 0 < y < d/2 \\ \mathbf{e}_x \mu_0 J_0 y, & -d/2 < y < 0 \end{cases}$$

例题 3-6 真空中半径为 a 的无限长导体圆柱上沿轴方向电流密度为 J_0 , 求导体内外的磁场。

解 如图 3-6 所示, 取圆柱坐标系, 导体轴沿 z 轴, 根据对称性则磁场大小只与径向 ρ 有关, 且方向为 $\mathbf{e}_\phi$ 。取半径为 ρ 的积分回路, 根据安培环路定理得

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} B_\phi \rho d\phi = \mu_0 I$$

所以

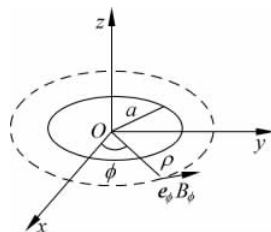


图 3-6 载流导体圆柱

$$B_{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

由于当 $\rho \geq a$ 时, $I = J_0 \pi a^2$; 当 $\rho < a$ 时, $I = J_0 \pi \rho^2$ 。因此有

$$B_{\phi} = \begin{cases} \frac{\mu_0 J_0 \rho}{2}, & \rho < a \\ \frac{\mu_0 J_0 a^2}{2\rho}, & \rho \geq a \end{cases}$$

3.3 磁偶极子与介质的磁化

3.3.1 磁偶极子及其矢量磁位

一个小载流圆环称为磁偶极子。设载流圆环的电流为 i , 面积为 ΔS , 则此磁偶极子的磁偶极矩(简称磁矩)为 $\mathbf{m} = i\Delta S$, 其中 $\mathbf{m}$ 和 ΔS 的方向与电流方向呈右手螺旋关系, 如图 3-7 所示。

类似于电偶极子会产生电位(标量位), 磁偶极子也会产生矢量磁位。下面计算如图 3-8 所示半径为 a , 电流为 I 的小电流环在远处($r \gg a$)产生的矢量磁场位 $\mathbf{A}$ 。

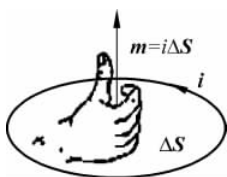


图 3-7 磁偶极子

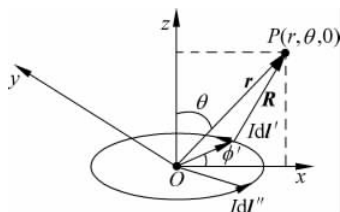


图 3-8 磁偶极子

如图 3-8 所示, 选用球坐标系, 使电流环在 xOy 平面, 且中心在坐标原点。由于电流环结构的对称性, 其在空间产生的矢量磁位 $\mathbf{A}$ 具有轴对称性, 即 $\mathbf{A}$ 与角度 ϕ 无关。不失一般性, 取观察点位于 $P(r, \theta, 0)$ 点, 电流元 Idl' 位于 $(a, \frac{\pi}{2}, \phi')$ 处。由上节可知, 线分布电流在观察点 P 产生的矢量磁位为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l'} \frac{I}{R} d\mathbf{l}'$$

结合图 3-8 可知, 此时 $dl' = a d\phi'$, $\mathbf{R} = r\mathbf{e}_r - a\mathbf{e}_{\phi'}$, 其中 $\mathbf{e}_{\phi'}$ 为 xOy 平面的径向单位矢量; 根据矢量的叠加性, 电流元 Idl' 与其对称位置 $(a, \frac{\pi}{2}, -\phi')$ 处电流元 Idl'' 产生的矢量磁位 $\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{e}_x$ 方向的分量相互抵消, 只存在 $\mathbf{e}_y$ 方向的分量 $\mathbf{A}_y$, 在 $r-\theta$ 平面即 $\mathbf{A}_{\phi}$ 。因此

$$\mathbf{A}_{\phi} = \mathbf{e}_{\phi} \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I \cos \phi'}{R} dl' = \mathbf{e}_{\phi} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Ia \cos \phi'}{R} d\phi'$$

在直角坐标系下, 观察点 P 和电流元 Idl' 的坐标分别为 $(r \sin \theta, 0, r \cos \theta)$ 、 $(a \cos \phi', a \sin \phi', 0)$, 因此, $R = \sqrt{(r \sin \theta - a \cos \phi')^2 + (a \sin \phi')^2 + (r \cos \theta)^2}$, 进一步整理得

$$R = r \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 - \frac{2a}{r} \sin\theta \cos\phi' \right]^{1/2}$$

利用小变量近似 $(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \dots$, 并忽略高阶小项, 由上式得

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} \left[1 - \frac{2a}{r} \sin\theta \cos\phi' \right]^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left[1 + \frac{a}{r} \sin\theta \cos\phi' \right]$$

再将上式代入 $\mathbf{A}_\phi$ 的表达式, 即得

$$\mathbf{A}_\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{a}{r} \sin\theta \cos\phi' \right) \cos\phi' a d\phi' = \frac{\mu_0 I a^2 \sin\theta}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi' d\phi' = \frac{\mu_0 I a^2 \sin\theta}{4r^2}$$

利用磁偶极矩 $\mathbf{m} = I\pi a^2 \mathbf{e}_z$, 上式可以表示为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \mathbf{m} \times \mathbf{e}_r \quad (3-22)$$

根据前面 $\mathbf{A}_\phi$ 的表达式, 又 $A_r=0, A_\theta=0$, 故在球坐标系下磁感应强度 $\mathbf{B}$ 为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2 \sin\theta} \mathbf{e}_r & \frac{1}{r \sin\theta} \mathbf{e}_\theta & \frac{1}{r} \mathbf{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin\theta A_\phi \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (\mathbf{e}_r 2\cos\theta + \mathbf{e}_\theta \sin\theta) \quad (3-23)$$

显然, 上式与电偶极子的电场强度 $\mathbf{E}$ 的表达式(2-20)互为对偶关系。由式(3-22)还可得空间任意点磁偶极子的矢量磁位为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi R^2} \mathbf{m} \times \mathbf{e}_R = \frac{\mu_0}{4\pi R^3} \mathbf{m} \times \mathbf{R} \quad (3-24)$$

其中, $\mathbf{R}$ 为观察场点到磁偶极子中心的位移矢量。注意, 上述矢量磁位 $\mathbf{A}$ 和磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的表达式是在 $r \gg a$ 的条件下得到的。

3.3.2 介质的磁化

当研究物质的磁效应时, 物质被视为磁介质。根据物质的基本原子模型, 物质由原子或者分子构成, 而原子由一个带正电的原子核和大量绕其环绕的带负电的电子构成。环绕轨道旋转的电子产生环路分子电流和微观的磁偶极子。此外, 原子的电子和原子核以确定的磁偶极矩围绕各自的轴旋转。相对而言, 原子核的质量很大而角速度很小, 原子自旋产生的磁偶极矩通常可以被忽略, 电子自旋的磁偶极矩也可忽略。这样, 每个磁介质分子(或者原子)等效为一个分子电流环。当不存在外磁场时, 大多数材料分子磁矩的取向是杂乱无章的, 故导致合成磁矩(净磁矩)为零, 介质对外不显磁性。当存在外磁场时, 分子磁矩会沿外磁场方向重新取向, 合成磁矩不为零, 对外显示磁性, 即介质的磁化, 如图 3-9 所示。

介质磁化后将出现磁化电流(束缚电流), 并作为二次源产生附加磁场。如果附加磁场与外磁场方向相反, 使总磁场减弱, 则物质被称为抗磁质; 如果附加磁场与外磁场同向, 使总磁场增强, 则物质被称为顺磁质。而对于铁磁性物质, 能够产生显著的磁性, 有剩磁和磁滞现象, 存在磁畴。磁介质中的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 可以看作是真空中传导电流产生的磁感应强度 $\mathbf{B}_0$ 与磁化电流产生的磁感应强度 $\mathbf{B}'$ 的叠加, 即

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$$

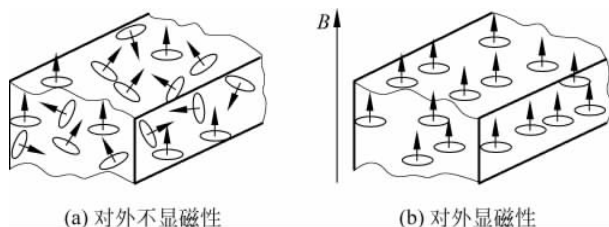


图 3-9 介质的磁化

为了描述介质的磁化效应对磁感应强度 $\mathbf{B}$ 产生的影响,下面引入磁化强度矢量 $\mathbf{P}_m$,即单位体积中的分子磁矩的矢量和。

$$\mathbf{P}_m = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^N \mathbf{m}_k}{\Delta V} \quad (3-25)$$

其中, $\mathbf{m}_k$ 为第 k 个分子的磁矩。 $\mathbf{P}_m$ 是一个宏观的矢量点函数,表示单位体积中磁矩的统计平均值,单位为安培/米(A/m)。如果磁介质中某区域内各点的磁化强度相同,则称为均匀磁化,否则称为非均匀磁化。

介质被磁化后,在其内部及表面会出现磁化电流分布,这种磁化电流是分子电流叠加的整体效应。在第2章,曾利用电偶极子产生的电位与电荷密度之间的联系分析并得出了电介质中极化电荷的分布密度,而本节将基于磁化强度的定义计算磁化电流密度(也可以利用磁偶极子产生的矢量磁位与电流分布之间的关系式分析),即如图3-10所示,计算穿过由周界曲线 C 包围的曲面 S 的磁化电流。可见,只有环绕 C 的分子电流(磁偶极子)对穿越 S 的磁化电流有贡献。如图3-10(a)所示,因为当分子环流在 C 以内,并不与 C 交链时,该电流会沿相反的方向两次穿过曲面 S 而使其作用抵消;当分子环流在 C 以外,不与 C 交链时,就不会穿越曲面 S ,对磁化电流也没有贡献。即,在 C 上取积分元 $d\mathbf{l}$,并以分子电流的环面积 ΔS 为底,以 $d\mathbf{l}$ 为斜高作一圆柱体,如图3-10(b)所示,则只有分子电流中心在圆柱体内的分子电流才能与 $d\mathbf{l}$ (或 C)交链,才会对圆柱体的磁化电流有贡献。

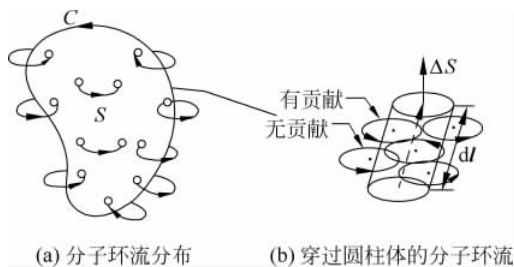


图 3-10 介质的磁化

设磁介质单位体积内的分子数为 N ,每个分子的磁矩为 $\mathbf{m} = i\Delta\mathbf{S}$,根据磁化强度的定义,则在图3-10(b)圆柱体内与 $d\mathbf{l}$ 交链的磁化电流为

$$dI_m = Ni \cdot \Delta\mathbf{S} \cdot d\mathbf{l} = N\mathbf{m} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{P}_m \cdot d\mathbf{l}$$

因此,穿越曲面 S 的磁化电流为