第5章　图的基本概念

图论的内容十分丰富，应用相当广泛. 许多学科，诸如运筹学、信息论、控制论、网络理论、博弈论、化学、生物学、物理学、社会科学、语言学、计算机科学等，都以图作为工具来解决实际问题和理论问题. 随着计算机科学的发展，图论在以上各学科中的作用越来越大，同时图论本身也得到了充分的发展. 本书在第5、6、7章中介绍与计算机科学关系密切的图论内容.

5.1　无向图及有向图

在集合论中已给出了集合与卡氏积的概念，这里还需要给出多重集与无序积的概念. 集合中的元素不重复出现，当允许元素重复出现时称作**多重集**. 如，$\{a, a, b, c, c, c\}$与$\{a, b, c\}$作为集合是相同的，而作为多重集是不相同的.

设 A、B 为两集合，称

$$\{\{a,b\} \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

为 A 与 B 的**无序积**，记作 $A\&B$. 为方便起见，将无序对$\{a,b\}$记作(a,b). 无论 a、b 是否相同，显然有$(a,b)=(b,a)$. 例如，设 $A=\{a_1,a_2\}$，$B=\{b_1,b_2\}$，则

$$A\&B = \{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_1),(a_2,b_2)\},$$
$$A\&A = \{(a_1,a_1),(a_1,a_2),(a_2,a_2)\}.$$

定义 5.1　一个**无向图** G 是一个二元组$\langle V,E\rangle$，其中

(1) V 是一个非空的有穷集合，称为 G 的**顶点集**，V 中元素称为**顶点**或**结点**；

(2) E 是无序积 $V\&V$ 的一个多重子集，称为 G 的**边集**，E 中元素称为**无向边**或简称**边**.

图 G 的顶点集记作 $V(G)$，边集记作 $E(G)$. 在图的运算中，有时会产生顶点集为$\varnothing$的结果，因而规定顶点集为$\varnothing$的图为**空图**.

以上给出的是一个无向图的数学定义，还可以用图形表示无向图，这样更直观. 用小圆圈或实心点表示顶点，用连接两个顶点的线段表示边，其中顶点的位置、线段的曲直及是否相交都无关紧要. 例如，$G=\langle V, E\rangle$，$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$，$E=\{(v_1, v_2),(v_2, v_2),(v_2, v_3),(v_1, v_3),(v_1, v_3),(v_1, v_4)\}$，$G$ 的图形如图 5-1(a)所示.

定义 5.2　一个**有向图** D 是一个二元组$\langle V,E\rangle$，其中

(1) V 是一个非空的有穷集合，称为 D 的**顶点集**，V 中元素称为**顶点**或**结点**；

(2) E 是卡氏积 $V\times V$ 的多重子图，称为 D 的**边集**，其元素称为**有向边**，也简称**边**.

也用 $V(D)$、$E(D)$分别表示有向图 D 的顶点集和边集. 有向图 D 也可以用图形表示，与无向图不同的是，用带箭头的连线表示有向边. 例如，$D=\langle V,E\rangle$，其中 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$，$E=\{\langle v_1,v_1\rangle,\langle v_3,v_2\rangle,\langle v_3,v_2\rangle,\langle v_3,v_4\rangle,\langle v_2,v_4\rangle,\langle v_4,v_5\rangle,\langle v_5,v_4\rangle,\langle v_1,v_2\rangle\}$，$D$ 的

图形为图 5-1(b)所示．为方便起见，也可以给边起个名字．例如，在图 5-1(a)中，用 e_1 表示边(v_2,v_2)，e_2 表示边(v_1,v_2)等．在图 5-1(b)中，用 e_1 表示边$\langle v_1,v_1\rangle$，e_2 表示边$\langle v_1,v_2\rangle$等．

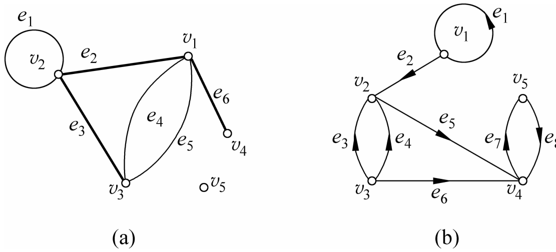

图 5-1

无向图和有向图通称为图，但有时也把无向图简称为图．常用 G 表示无向图，用 D 表示有向图．有时又用 G 泛指无向图或有向图．

有 n 个顶点的图(无向图或有向图)称为 **n 阶图**．没有一条边的图称为**零图**．一阶零图，即只有一个顶点、没有边的图，称为**平凡图**．

定义 5.3 在无向图 $G=\langle V,E\rangle$中，设 $e=(u,v)$是的一条边，则称 u、v 为 e 的**端点**，e 与 u(和 v)**关联**．无边关联的顶点称为**孤立点**．若一条边所关联的两个顶点重合，则称此边为**环**．若 $u\neq v$，则称 e 与 u(和 v)的**关联次数**为 1；若 $u=v$，称 e 与 u 的关联次数为 2；若 w 不是 e 的端点，则称 e 与 w 的关联次数为 0．

若存在一条边 e 以顶点 u、v 为端点，则称 u、v 是**相邻**的．若两条边 e、e'至少有一个公共端点，则称 e、e'是**相邻**的．

在图 5-1(a)中，$e_2=(v_1,v_2)$，v_1、v_2 为 e_2 的端点，e_2 与 v_1、v_2 的关联次数均为 1．v_5 是孤立点．e_1 是环，e_1 与 v_2 的关联次数为 2．v_1 与 v_2 是相邻的，而 v_2 与 v_4 不相邻．e_1 与 e_2 是相邻的，e_2 与 e_3 也是相邻的，而 e_1 与 e_4 不相邻．

定义 5.4 在有向图 $D=\langle V,E\rangle$中，设 $e=\langle u,v\rangle$是的一条有向边，则称 u 为 e 的**始点**，v 为 e 的**终点**，也称 u、v 为 e 的**端点**，e 与 u(和 v)**关联**．无边关联的顶点称为**孤立点**．若一条有向边的始点与终点重合，则称此边为**环**．

若存在一条边 e 以顶点 u 为始点、以 v 为终点，则称 u **邻接到** v．若边 e 的终点与边 e' 的始点重合，则称 e、e'是**相邻**的．

在图 5-1(b)中，边 $e_2=\langle v_1,v_2\rangle$，$v_1$ 是 e_2 的始点，v_2 是 e_2 的终点，v_1 邻接到 v_2．e_1 是环，无孤立点．边 e_1 与 e_2 是相邻的，e_2 与 e_5 也是相邻的，而 e_2 与 e_3 不是相邻的．

定义 5.5 在无向图中，顶点 v 作为边的端点的次数之和为 v 的**度数**，简称**度**，记作 $d(v)$．

在有向图中，称顶点 v 作为边的始点的次数之和为 v 的**出度**，记作 $d^+(v)$；称 v 作为边的终点的次数之和为 v 的**入度**，记作 $d^-(v)$；称 v 作为边的端点的次数之和为 v 的**度数**，简称**度**，记作 $d(v)$．显然，$d(v)=d^+(v)+d^-(v)$．

在图 5-1(a)中，$d(v_1)=4$，$d(v_2)=4$，$d(v_5)=0$．在图 5-1(b)中，$d^+(v_1)=2$，$d^-(v_1)=1$，$d(v_1)=3$，$d^+(v_2)=1$，$d^-(v_2)=3$，$d(v_2)=4$．注意，在图 5-1(a)中，v_2 作为环 e_1 的端点是 2 次．在图 5-1(b)中，v_1 作为环 e_1 的一次始点、一次终点和 2 次端点．

称度数为 1 的顶点为**悬挂顶点**，它所关联的边为**悬挂边**. 在图 5-1(a)中，v_4 为悬挂顶点，e_6 为悬挂边.

对于无向图 $G=\langle V,E\rangle$，记

$$\Delta(G)=\max\{d(v)\mid v\in V\},$$
$$\delta(G)=\min\{d(v)\mid v\in V\},$$

分别称为 G 的**最大度**和**最小度**.

对于有向图 $D=\langle V,E\rangle$，除了**最大度** $\Delta(D)$、**最小度** $\delta(D)$外，还有**最大出度** $\Delta^+(D)$、**最大入度** $\Delta^-(D)$、**最小出度** $\delta^+(D)$、**最小入度** $\delta^-(D)$，分别定义如下：

$$\Delta(D)=\max\{d(v)\mid v\in V\};$$
$$\delta(D)=\min\{d(v)\mid v\in V\};$$
$$\Delta^+(D)=\max\{d^+(v)\mid v\in V\};$$
$$\Delta^-(D)=\max\{d^-(v)\mid v\in V\};$$
$$\delta^+(D)=\min\{d^+(v)\mid v\in V\};$$
$$\delta^-(D)=\min\{d^-(v)\mid v\in V\}.$$

在图 5-1(a)中，$\Delta=4$，$\delta=0$. 图 5-1(b)中，$\Delta=4$，$\delta=2$，$\Delta^+=3$，$\Delta^-=3$，$\delta^+=1$，$\delta^-=0$.

下面定理给出图中顶点度数与边数之间的关系.

定理 5.1（**握手定理**） 设图 $G=\langle V,E\rangle$为无向图或有向图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，边数 $|E|=m$，则

$$\sum_{i=1}^{n}d(v_i)=2m.$$

证明 每一条边有 2 个端点，所有顶点的度数之和等于它们作为端点的次数之和，因此恰好等于边数的 2 倍.

握手定理是图论中的基本定理，它有一个重要推论.

推论 任何图(无向的或有向的)中，度数为奇数的顶点个数是偶数.

对有向图来说，还有下面的定理.

定理 5.2 设有向图 $D=\langle V,E\rangle$，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$|E|=m$，则

$$\sum_{i=1}^{n}d^+(v_i)=\sum_{i=1}^{n}d^-(v_i)=m.$$

可类似定理 5.1 证明.

以上两定理及其推论都是非常重要的，希望记住它们并能灵活运用.

设 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$为图 G 的顶点集，称$(d(v_1),d(v_2),\cdots,d(v_n))$为 G 的**度数序列**. 有向图还有入度序列和出度序列. 图 5-1(a)的度数序列为(4,4,3,1,0)，(b)的度数序列为(3,4,3,4,2)，入度序列为(1, 3, 0, 3, 1)，出度序列为(2, 1, 3, 1, 1).

例 5.1 (1) (3,3,2,3)、(5,2,3,1,4)能成为图的度数序列吗？为什么？

(2) 已知图 G 中有 10 条边，4 个度数为 3 的顶点，其余顶点的度数均小于等于 2，问 G 中至少有多少个顶点？为什么？

解 (1) 由于这两个序列中，奇数个数均为奇数，由握手定理的推论可知，它们都不能成为图的度数序列.

(2) 图中边数 $m=10$,由握手定理可知,G 中各顶点度数之和为 20,4 个 3 度顶点占去 12 度,还剩 8 度. 若其余全是 2 度顶点,还需要 4 个顶点来占用这 8 度,所以 G 至少有 8 个顶点.

定义 5.6 在无向图中,关联一对顶点的无向边如果多于 1 条,称这些边为**平行边**. 平行边的条数称为**重数**.

在有向图中,如果有多于 1 条的边的始点与终点相同,则称这些边为**有向平行边**,简称**平行边**.

含平行边的图称为**多重图**. 既不含平行边也不含环的图称为**简单图**.

在图 5-1(a)中,e_4 与 e_5 是平行边. 图 5-1(b)中,e_3 与 e_4 是平行边,而 e_7 与 e_8 不是平行边. 这 2 个图都不是简单图. 图 5-2 中所示的 3 个图都是简单图.

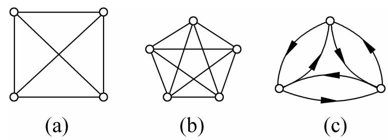

图 5-2

定义 5.7 设 $G=\langle V,E\rangle$ 是 n 阶无向简单图,若 G 中任何顶点都与其余的 $n-1$ 个顶点相邻,则称 G 为 ***n* 阶无向完全图**,记作 K_n.

设 $D=\langle V,E\rangle$ 为 n 阶有向简单图,若对于任意的顶点 $u,v\in V(u\neq v)$,既有有向边 $\langle u,v\rangle$,又有 $\langle v,u\rangle$,则称 D 是 ***n* 阶有向完全图**.

在图 5-2 中(a)为 K_4,(b)为 K_5,(c)为 3 阶有向完全图.

定义 5.8 设 $G=\langle V,E\rangle$,$G'=\langle V',E'\rangle$ 是两个图. 若 $V'\subseteq V$ 且 $E'\subseteq E$,则称 G' 是 G 的**子图**,G 是 G' 的**母图**,记作 $G'\subseteq G$.

若 $G'\subseteq G$ 且 $G'\neq G$(即 $V'\subset V$ 或 $E'\subset E$),则称 G' 是 G 的**真子图**.

若 $G'\subseteq G$ 且 $V'=V$,则称 G' 是 G 的**生成子图**.

设 $V_1\subseteq V$,且 $V_1\neq\varnothing$,以 V_1 为顶点集,以所有两端点均在 V_1 中的边为边集的 G 的子图,称为 V_1 导出的**导出子图**,记作 $G[V_1]$.

设 $E_1\subseteq E$,且 $E_1\neq\varnothing$,以 E_1 为边集,以 E_1 中边关联的所有顶点为顶点集的 G 的子图,称为 E_1 导出的**导出子图**,记作 $G[E_1]$.

在图 5-3 中,图 5-3(b)、图 5-3(c)均为图 5-3(a)的子图,图 5-3(c)是生成子图. 图 5-3(b)是顶点子集$\{v_1,v_2\}$的导出子图,也是边子集$\{e_4,e_5\}$的导出子图. 图 5-3(c)又是边子集$\{e_1,e_3,e_4\}$的导出子图. 图 5-3(e)、图 5-3(f)是图 5-3(d)的子图,图 5-3(e)是生成子图,也是边子集$\{e_1,e_3\}$的导出子图. 图 5-3(f)是边子集$\{e_1\}$的导出子图.

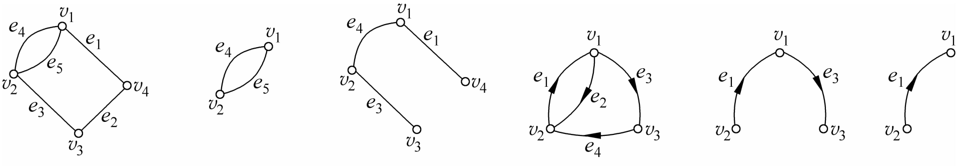

图 5-3

注意,每个图都是本身的子图.

定义 5.9 设 $G=\langle V,E\rangle$ 是 n 阶无向简单图. G 的**补图** $\overline{G}$ 定义如下:$\overline{G}=\langle V,\overline{E}\rangle$,其中

$\bar{E}=\{(u,v)\mid u,v\in V$ 且 $(u,v)\notin E\}$.

有向简单图的补图可类似定义.

在图 5-4 中,图 5-4(a)是图 5-4(b)的补图,当然图 5-4(b)也是图 5-4(a)的补图,就是说,图 5-4(a)和图 5-4(b)互为补图. 图 5-4(c)和图 5-4(d)互为补图.

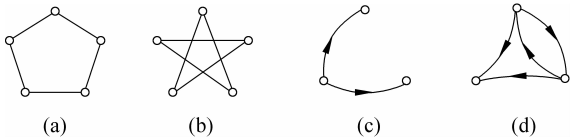

图 5-4

图是表达事物之间关系的工具.在画图时,由于顶点位置的不同,边的直、曲不同,同一个事物之间的关系可能画出不同形状的图来,因而引出了图同构的概念.

定义 5.10 设两个无向图 $G_1=\langle V_1,E_1\rangle$,$G_2=\langle V_2,E_2\rangle$,如果存在双射函数 $f: V_1\to V_2$,使得对于任意的 $e=(u,v)\in E_1$ 当且仅当 $e'=(f(u), f(v))\in E_2$,并且 e 与 e'的重数相同,则称 G_1 与 G_2 是**同构**的,记作 $G_1\cong G_2$.

可类似定义两个有向图同构,只是还要考虑有向边的方向.

在图 5-5 中,图 5-5(a)与图 5-5(b)同构,顶点之间的对应关系为 $a\leftrightarrow v_1$,$b\leftrightarrow v_2$,$c\leftrightarrow v_3$,$d\leftrightarrow v_4$,$e\leftrightarrow v_5$.不难验证,图 5-5(c)与图 5-5(d)同构. 图 5-5(c)称为**彼德森图**.

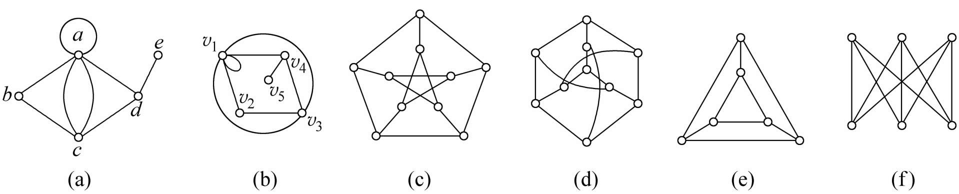

图 5-5

显然，顶点数相同，边数相同，度数序列相同(不计顺序)等都是两个图同构的必要条件,还可以找到更多的必要条件. 只要不满足某个必要条件，就说明这两个图不同构. 例如,在图 5-5 中,在图 5-5(f)中存在 3 个彼此不相邻的顶点,而在图 5-5(e)中却找不到 3 个彼此不相邻的顶点，因此图 5-5(e)与图 5-5(f)不同构. 注意这两个图的顶点个数相同,边的条数相同,每个顶点都是 3 度顶点,但这些都是图同构的必要条件,不是充分条件. 至今还没有找到便于判断的图同构的充分必要条件. 要证明两个图同构，只能根据定义，找到顶点之间满足条件的双射，至今还不知道更好的方法.

例 5.2 (1) 画出 4 个顶点 3 条边的所有非同构的无向简单图.

(2) 画出 3 个顶点 2 条边的所有非同构的有向简单图.

解 (1) 直观上容易看出,4 个顶点 3 条边的所有非同构的无向简单图只有图 5-6(a)、图 5-6(b)、图 5-6(c)所示的 3 个图.

(2) 3 个顶点 2 条边的所有非同构的有向简单图只有图 5-6(d)、图 5-6(e)、图 5-6(f)、图 5-6(g)所示的 4 个图. 3 个顶点 2 条边的非同构的无向简单图只有 1 个,由它可派生出 3 个非同构的有向简单图为图 5-6(d)、图 5-6(e)、图 5-6(f).

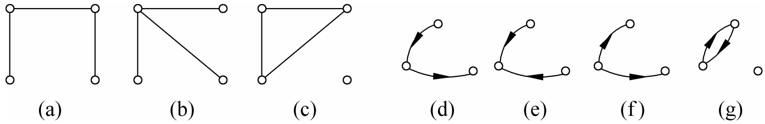

图 5-6

5.2 通路、回路和图的连通性

通路与回路是图论中两个重要而又基本的概念.本节所述定义一般来说既适合无向图，也适合有向图;否则,将加以说明或分开定义.

定义 5.11 设图 G 中顶点和边的交替序列 $\Gamma=v_0e_1v_1e_2\cdots e_lv_l$,若 v_{i-1} 和 v_i 是 e_i 的端点(当 G 是有向图时,要求 v_{i-1} 是 e_i 的始点,v_i 是 e_i 的终点),$i=1,2,\cdots,l$,则称 Γ 为顶点 v_0 到 v_l 的**通路**. v_0 和 v_l 分别称为此通路的**起点**和**终点**,Γ 中边的数目 l 称为 Γ 的**长度**. 当 $v_0=v_l$ 时,此通路称为**回路**.

若 Γ 中的所有边互不相同,则称 Γ 为**简单通路**. 当 $v_0=v_l$ 时,称此简单通路为**简单回路**.

若 Γ 中除 v_0,v_l 外所有顶点互不相同,所有边也互不相同,则称此通路为**初级通路**或**路径**. 当 $v_0=v_l$ 时,称此初级通路为**初级回路**或**圈**.

有边重复出现的通路称为**复杂通路**,有边重复出现的回路称为**复杂回路**.

在上述定义中，回路是通路的特殊情况. 但通常都是当起点与终点不同时才说是通路. 在一般情况下，如果顶点互不相同，必有边也互不相同. 在初级通路(回路)的定义中既要求顶点互不相同,又要求边互不相同，这只是为了排除一种特殊情况：沿着边(u,v)从 u 到 v，再沿着这条边回到 v. 它不是初级回路. 根据定义,初级通路(回路)都是简单通路(回路)，但反之不真.

通路和回路是图的子图. 图 5-7 给出了通路、回路的示意图. 图 5-7(a)为 v_0 到 v_4 的长为 4 的初级通路(路径). 图 5-7(c)为 v_0 到 v_7 的长为 8 的简单通路. 图 5-7(e)是 v_0 到 v_0 的长为 5 的初级回路. 图 5-7(g)为 v_0 到 v_0 长为 8 的简单回路. 图 5-7(b)、图 5-7(d)、图 5-7(f)、图 5-7(h)分别为有向图中的初级通路、简单通路、初级回路、简单回路的示意图. 在有向图的通路或回路中,注意箭头方向的一致性.

在无向图中,环和两条平行边构成的回路分别为长度为 1 和 2 的初级回路(圈). 在有向图中,环和两条方向相反边构成的回路分别为长度为 1 和 2 的初级回路(圈).

图中的通路和回路有下述性质.

定理 5.3 在一个 n 阶图中,若从顶点 u 到 $v(u\neq v)$存在通路,则从 u 到 v 存在长度小于等于 $n-1$ 的通路.

证明 设 $v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_lv_l$ 是从 $u=v_0$ 到 $v=v_l$ 的一个通路，如果 $l>n-1$，由于图中只有 n 个顶点，在 v_0，v_1，$\cdots$，v_l 中一定有 2 个是相同的. 设 $v_i=v_j$，$i<j$，那么 $v_ie_{i+1}v_{i+1}\cdots e_jv_j$ 是一条回路，删去这条回路，得到 $v_0e_1v_1\cdots v_ie_{j+1}\cdots e_lv_l$ 仍是从 $u=v_0$ 到 $v=v_l$ 的一个通路，其长度减少 $j-i$. 如果它的长度仍大于 $n-1$，则可以重复上述做法，直到得到长

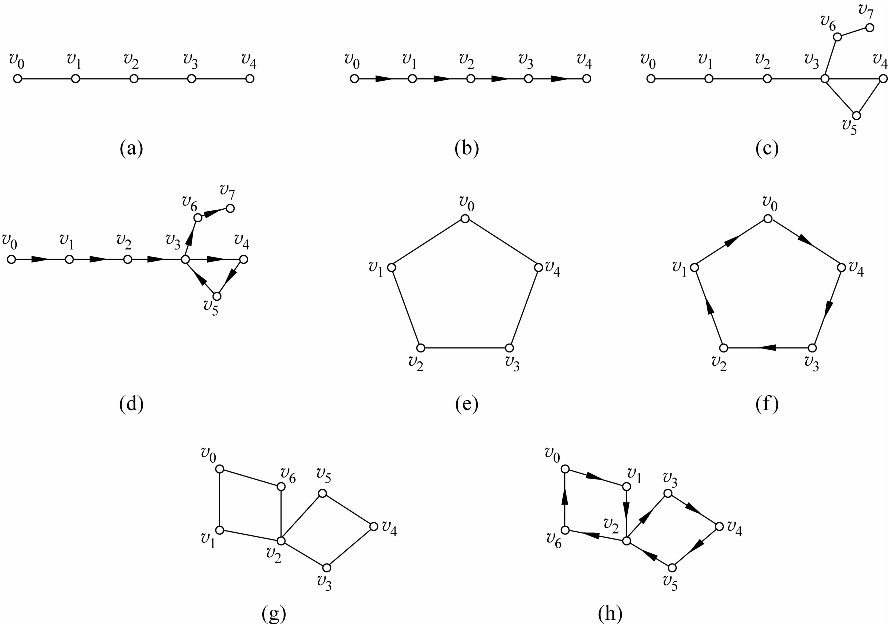

图 5-7

度不超过 $n-1$ 的通路为止.

推论 在一个 n 阶图中,若从顶点 u 到 $v(u\neq v)$ 存在通路,则从 u 到 v 存在长度小于等于 $n-1$ 的初级通路.

下述定理和推论可类似证明.

定理 5.4 在一个 n 阶图中,如果存在 v 到自身的回路,则存在 v 到自身长度小于等于 n 的回路.

推论 在一个 n 阶图中,如果存在 v 到自身的简单回路,则存在 v 到自身长度小于等于 n 的初级回路.

定义 5.12 在一个无向图 G 中,若从顶点 u 到 v 存在通路(当然从 v 到 u 也存在通路),则称 u 与 v 是**连通**的. 规定任何顶点与自身总是**连通**的.

在一个有向图 D 中,若从顶点 u 到 v 存在通路,则称 u **可达** v. 规定任何顶点到自身总是可达的.

定义 5.13 若无向图 G 是平凡图或 G 中任意两顶点都是连通的,则称 G 是**连通图**;否则,称 G 是**非连通图**.

易知,在无向图中,顶点之间的连通关系是等价关系. 设 G 为一个无向图,R 是 G 中顶点之间的连通关系. 按照 R 可将 $V(G)$ 划分成若干个等价类,设为 $V_1,V_2,\cdots,V_k$. 由它们导出的导出子图 $G[V_1],G[V_2],\cdots,G[V_k]$称为 G 的**连通分支**,G 的连通分支个数记为 $p(G)$.

例如,图 5-8 中的图有 3 个连通分支.

定义 5.14 设 D 是一个有向图,如果略去 D 中各有向边的方向后所得无向图是连通图,则称 D 是**弱连通图**,简称**连通图**. 若 D 中任意两顶点至少一个可达另一个,则称 D 是**单向连通图**. 若 D 中任何一对顶点都是相互可达的,则称 D 是**强连通图**.

在图 5-9 中，图 5-9(a)为强连通图，图 5-9(b)为单向连通图，图 5-9(c)是(弱)连通图.

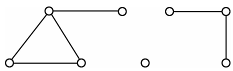

图 5-8

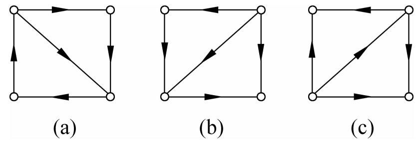

图 5-9

显然，强连通图一定是单向连通图，单向连通图一定是弱连通图，但反之不真.

设无向图 $G=\langle V,E\rangle$，$V'\subset V$，从 G 中删除 V' 中的所有顶点及其关联的边，称作**删除 V'**，把删除 V' 后的图记作 $G-V'$. 又设 $E'\subseteq E$，从 G 中删除 E' 中的所有边，称作**删除 E'**，把删除 E' 后的图记作 $G-E'$.

定义 5.15 设无向图 $G=\langle V,E\rangle$，$V'\subset V$，若 $p(G-V')>p(G)$，且对 V' 的任何真子集 V''，$p(G-V'')=p(G)$，则称 V' 为 G 的**点割集**. 若点割集中只有一个顶点 v，则称 v 为**割点**.

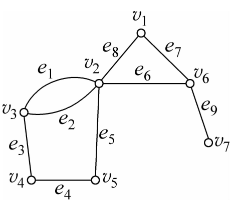

图 5-10

又 $E'\subseteq E$，若 $p(G-E')>p(G)$，且对 E' 的任何真子集 E''，$p(G-E'')=p(G)$，则称 E' 是 G 的**边割集**，简称**割集**. 若边割集中只有一条边 e，则称 e 为**割边**或**桥**.

在图 5-10 中，$\{v_3,v_5\}$、$\{v_2\}$、$\{v_6\}$ 为点割集，v_2、v_6 都是割点. $\{v_4,v_2\}$ 不是点割集，因为它的真子集 $\{v_2\}$ 已经是点割集了. 类似地，$\{v_1,v_6\}$ 也不是点割集.

$\{e_3,e_4\}$、$\{e_4,e_5\}$、$\{e_1,e_2,e_3\}$、$\{e_1,e_2,e_5\}$、$\{e_6,e_7\}$、$\{e_6,e_8\}$、$\{e_9\}$ 等都是边割集，其中 e_9 是桥. $\{e_6,e_7,e_8\}$、$\{e_6,e_8,e_1,e_2,e_5\}$ 都不是边割集.

5.3 图的矩阵表示

前面介绍了图的集合描述和图形表示，本节介绍图的矩阵表示. 用矩阵表示图便于用代数方法研究图，同时也便于计算机的存储和处理. 由于矩阵的行列有固定的顺序，因此在用矩阵表示图之前，必须规定图的顶点和边的顺序. 本节讨论图的关联矩阵、邻接矩阵和可达矩阵.

1. 无向图的关联矩阵

设无向图 $G=\langle V,E\rangle$，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$，令 m_{ij} 为顶点 v_i 与边 e_j 的关联次数，称 $(m_{ij})_{n\times m}$ 为 G 的**关联矩阵**，记为 $\boldsymbol{M}(G)$.

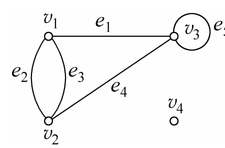

图 5-11

显然 m_{ij} 的可能取值为 0(v_i 与 e_j 不关联)、1(v_i 与 e_j 关联 1 次)、2(v_i 与 e_j 关联 2 次，即 e_j 是以 v_i 为端点的环). 例如，图 5-11 的关联矩阵为

$$M(G)=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0\\0&1&1&1&0\\1&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

无向图的关联矩阵具有下述性质.

(1) 每一列恰好有两个1或一个2,这是因为每条边关联两个顶点(环关联的两个顶点重合).

(2) 第 i 行元素之和为 v_i 的度数, $\sum_{j=1}^{m} m_{ij}=d(v_i)$.

(3) 所有元素之和等于 $2m$,

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}m_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}m_{ij}=\sum_{i=1}^{n}d(v_i)=2m,$$

这正是握手定理的内容.

(4) v_i 为孤立点当且仅当第 i 行全为0. 如上面的第4行.

(5) e_j 与 e_k 为平行边当且仅当第 j 列与第 k 列相同. 如上面的第2列和第3列.

给定图 G 的关联矩阵,不难画出 G 的图形(在同构的意义下).

2. 有向图的关联矩阵

这里要求有向图 D 中没有环. 设无环有向图 $D=\langle V,E\rangle, V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}, E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$,令

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 的始点},\\ 0, & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不关联},\\ -1, & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 的终点},\end{cases}$$

则称 $(m_{ij})_{n\times m}$ 为 D 的**关联矩阵**,记作 $M(D)$.

例如,图5-12的关联矩阵为

$$M(D)=\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0\\-1&0&1&-1&1\\0&0&0&0&-1\\0&1&-1&1&0\end{bmatrix}$$

有向图的关联矩阵具有下述性质:

(1) 每一列恰好有一个1和一个−1.

(2) 第 i 行1的个数等于 $d^+(v_i)$, −1的个数等于 $d^-(v_i)$. $M(D)$ 中所有1的个数等于所有−1的个数,都等于 m.

3. 有向图的邻接矩阵

设有向图 $D=\langle V,E\rangle, V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}, |E|=m$. 令 $a_{ij}^{(1)}$ 为 v_i 邻接到 v_j 的边的条数,称 $(a_{ij}^{(1)})_{n\times n}$ 为 D 的**邻接矩阵**,记作 $A(D)$.

例如,图5-13的邻接矩阵为

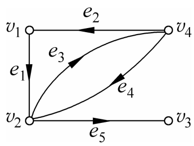

图 5-12

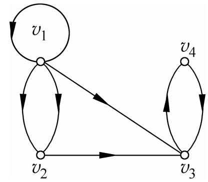

图 5-13

$$\boldsymbol{A}(D)=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

有向图的邻接矩阵具有下述性质.

(1) 第 i 行元素之和等于 $d^+(v_i)$，$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)}=d^+(v_i)$.

(2) 第 j 列元素之和等于 $d^-(v_j)$，$\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)}=d^-(v_j)$.

(3) 所有元素之和等于边数，$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)}=m$.

每一条边是一条长度为 1 的通路，而环是长度为 1 的回路，因而 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)}$ 是 D 中长度为 1 的通路(含回路) 数，而 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}^{(1)}$ 为 D 中长度为 1 的回路总数. 一般地，记 $A=A(D)$，$A^l=(a_{ij}^{(l)})_{n\times n}$. 可以证明下述定理和推论.

定理 5.5 设 $\boldsymbol{A}$ 为有向图 D 的邻接矩阵，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，则 $A^l(l\geqslant 1)$ 中元素 $a_{ij}^{(l)}$ 为 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路数，$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的通路(含回路) 总数，其中 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的回路数.

推论 设 $B_r=A+A^2+\cdots+A^r(r\geqslant 1)$，则 B_r 中元素 $b_{ij}^{(r)}$ 为 D 中 v_i 到 v_j 长度小于等于 r 的通路数，$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}^{(r)}$ 为 D 中长度小于等于 r 的通路(含回路) 总数，其中 $\sum\limits_{i=1}^{n} b_{ii}^{(r)}$ 为 D 中长度小于等于 r 的回路总数.

注意：在这里通路和回路可以是初级的、简单的，也可以是复杂的，并且把回路看成通路的特殊情况，即在计算通路数时把回路包括在内. 在计算通路数和回路数时是在定义的意义下，而不是在同构的意义下. 也就是说，当表示通路或回路的顶点边序列不同时认为它们是不同的通路或回路. 例如，在图 5-12 中，$v_1e_1v_2e_3v_4e_2v_1$，$v_2e_3v_4e_2v_1e_1v_2$ 和 $v_4e_2v_1e_1v_2e_3v_4$ 实际上是同一条回路，而在定义意义下它们是 3 条回路.

在图 5-13 中，计算得到