第 3 章　集合的基本概念和运算

内 容 提 要

1. 集合与元素

集合与元素是集合论的基本概念，联系元素和集合的是隶属关系. 如果元素 x 属于集合 A，则记作 $x \in A$，否则记作 $x \notin A$.

2. 集合与集合

集合与集合之间的关系有包含$\subseteq$、相等$=$、不包含$\nsubseteq$、不相等$\neq$、真包含$\subset$、不真包含$\not\subset$等，具体定义如下：

$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$.　　　　（也称 B 是 A 的子集）

$B = A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge A \subseteq B$.

$B \nsubseteq A \Leftrightarrow \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$.

$B \neq A \Leftrightarrow B \nsubseteq A \vee A \nsubseteq B$.

$B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge B \neq A$.　　　　（也称 B 是 A 的真子集）

$B \not\subset A \Leftrightarrow B \nsubseteq A \vee B = A$.

3. 空集$\varnothing$、全集 E 与幂集

不含任何元素的集合叫做空集，记作$\varnothing$. 空集是唯一存在的，且是任何集合的子集.

在一个具体问题中，如果所涉及的集合都是某个集合的子集，则称这个集合为全集，记作 E.

设 A 为集合，A 的所有子集构成的集合称为 A 的幂集，记作 $P(A)$，即

$$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}.$$

令 $|S|$ 表示集合 S 中的元素个数，那么若 $|A| = n$，则 $|P(A)| = 2^n$.

4. 集合的基本运算和算律

集合的基本运算是并$\cup$、交$\cap$、相对补$-$、绝对补$\sim$和对称差$\oplus$，分别定义如下：

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

$$\sim A = E - A = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\} = \{x \mid x \notin A\}.$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B).$$

集合的基本运算遵从下述算律：

(1) 幂等律　$A\cup A=A, A\cap A=A$.

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$.

(4) 分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(5) 同一律　$A\cup=A, A\cap E=A$.

(6) 零律　$A\cup E=E, A\cap\varnothing=\varnothing$.

(7) 排中律　$A\cup\sim A=E$.

(8) 矛盾律　$A\cap\sim A=\varnothing$.

(9) 吸收律　$A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A$.

(10) 德·摩根律　$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$.

$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$.

$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$.

$\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$.

(11) 双重否定律　$\sim(\sim A)=A$.

5. 有穷集合的计数

解决有穷集合的计数问题有两种方法：文氏图和包含排斥原理.

设 S 为有穷集，$p_1, p_2, \cdots, p_m$ 是 m 条性质. S 中的任何元素 x 对于性质 $p_i(i=1,2,\cdots,m)$ 具有或者不具有，两种情况必居其一. 令 $\overline{A_i}$ 表示 S 中不具有性质 p_i 的元素构成的集合，那么包含排斥原理可表述为下面两个公式：

$$
\begin{aligned}
&|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_m}| \\
=&|S|-\sum_{i=1}^{m}|A_i|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant m}|A_i\cap A_j\cap A_k| \\
&+\cdots+(-)^m|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m| \\
=&\sum_{i=1}^{m}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant m}|A_i\cap A_j\cap A_k| \\
&-\cdots+(-1)^{m+1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|.
\end{aligned}
$$

6. 小结

通过本章的学习应该达到下面的基本要求.

能够正确地表示一个集合，会画文氏图.

能判定元素是否属于给定的集合.

能判定两个集合之间是否存在包含、相等或真包含的关系.

能熟练进行集合的并$\cup$、交$\cap$、相对补$-$、绝对补$\sim$、对称差$\oplus$运算；会计算幂集 $P(A)$.

求解与有穷集合计数相关的实际问题.

习　　题

题 3.1～题 3.7 是选择题，题目要求均为从供选择的答案中选出应填入叙述中的□内的正确答案.

3.1　设 F 表示一年级大学生的集合，S 表示二年级大学生的集合，M 表示数学专业学生的集合，R 表示计算机专业学生的集合，T 表示听离散数学课学生的集合，G 表示星期一晚上参加音乐会的学生的集合，H 表示星期一晚上很迟才睡觉的学生的集合，则下列各句子所对应的集合表达式分别是什么？

（1）所有计算机专业二年级的学生在学离散数学课. $\boxed{\text{A}}$

（2）这些且只有这些学离散数学课的学生或者星期一晚上去听音乐会的学生在星期一晚上很迟才睡觉. $\boxed{\text{B}}$

（3）听离散数学课的学生都没参加星期一晚上的音乐会. $\boxed{\text{C}}$

（4）这个音乐会只是大学一、二年级的学生参加. $\boxed{\text{D}}$

（5）除去数学专业和计算机专业以外的二年级学生都去参加音乐会. $\boxed{\text{E}}$

供选择的答案

A、B、C、D、E：

① $T\subseteq G\cup H$；　② $G\cup H\subseteq T$；　③ $S\cap R\subseteq T$；

④ $H=G\cup T$；　⑤ $T\cap G=\varnothing$；　⑥ $F\cup S\subseteq G$；

⑦ $G\subseteq F\cup S$；　⑧ $S-(R\cup M)\subseteq G$；　⑨ $G\subseteq S-(R\cap M)$.

3.2　设 S 表示某人拥有的所有的树的集合，$M,N,T,P\subseteq S$，且 M 是珍贵的树的集合，N 是果树的集合，T 是去年刚栽的树的集合，P 是在果园中的树的集合. 下面是 3 个前提条件和 2 条结论.

前提（1）所有的珍贵的树都是去年栽的.

（2）所有的果树都在果园里.

（3）果园里没有去年栽的树.

结论（1）所有的果树都是去年栽的.

（2）没有一棵珍贵的树是果树.

则前提（1）、（2）、（3）和结论（1）的集合表达式分别为$\boxed{\text{A}}$、$\boxed{\text{B}}$、$\boxed{\text{C}}$、$\boxed{\text{D}}$，根据前提条件，两个结论中正确的是$\boxed{\text{E}}$.

供选择的答案

A、B、C、D、E：

① $N\subseteq P$；　② TN；　③ $M\subseteq T$；　④ $M\cap P=\varnothing$；

⑤ $P\cap T=\varnothing$；　⑥ $N\subseteq T$；　⑦ $N\cap M=\varnothing$.

3.3　设 $S=\{\varnothing,\{1\},\{1,2\}\}$，则有

（1）$\boxed{\text{A}}\in S$.

(2) $\boxed{B}\subseteq S$.

(3) $P(S)$有$\boxed{C}$个元素.

(4) $|S|=\boxed{D}$.

(5) $\boxed{E}$既是 S 的元素，又是 S 的子集.

供选择的答案

A： ① $\{1,2\}$； ② 1；

B： ③ $\{\{1,2\}\}$； ④ $\{1\}$；

C、D： ⑤ 3； ⑥ 6； ⑦ 7； ⑧ 8；

E： ⑨ $\{1\}$； ⑩ $\varnothing$.

3.4 设 S、T、M 为任意的集合，且 $S\cap M=\varnothing$. 下面是一些集合表达式，每一个表达式与图 3-1 的某一个文氏图的阴影区域相对应. 请指明这种对应关系.

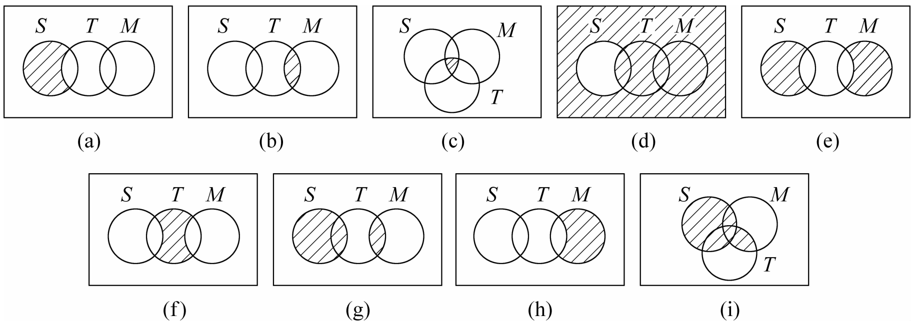

图 3-1

(1) $S\cap T\cap M$ 对应于$\boxed{A}$.

(2) $\sim S\cup T\cup M$ 对应于$\boxed{B}$.

(3) $S\cup(T\cap M)$ 对应于$\boxed{C}$.

(4) $(\sim S\cap T)-M$ 对应于$\boxed{D}$.

(5) $\sim S\cap\sim T\cap M$ 对应于$\boxed{E}$.

供选择的答案

A、B、C、D、E：

① (a)； ② (b)； ③ (c)； ④ (d)； ⑤ (e)； ⑥ (f)；

⑦ (g)； ⑧ (h)； ⑨ (i).

3.5 对 60 个人的调查表明有 25 人阅读《每周新闻》杂志，26 人阅读《时代》杂志，26 人阅读《幸运》杂志，9 人阅读《每周新闻》和《幸运》杂志，11 人阅读《每周新闻》和《时代》杂志，8 人阅读《时代》和《幸运》杂志，还有 8 人什么杂志也不阅读. 那么阅读全部 3 种杂志的有$\boxed{A}$人，只阅读《每周新闻》的有$\boxed{B}$人，只阅读《时代》杂志的有$\boxed{C}$人，只阅读《幸运》杂志的有$\boxed{D}$人，只阅读一种杂志的有$\boxed{E}$人.

供选择的答案

A、B、C、D、E：

① 2；　② 3；　③ 6；　④ 8；　⑤ 10；

⑥ 12；　⑦ 15；　⑧ 28；　⑨ 30；　⑩ 31.

3.6 从 1 到 300 的整数中

(1) 同时能被 3、5 和 7 这 3 个数整除的数有 $\boxed{A}$ 个.

(2) 不能被 3、5，也不能被 7 整除的数有 $\boxed{B}$ 个.

(3) 可以被 3 整除，但不能被 5 和 7 整除的数有 $\boxed{C}$ 个.

(4) 可被 3 或 5 整除，但不能被 7 整除的数有 $\boxed{D}$ 个.

(5) 只能被 3、5 和 7 之中的一个数整除的数有 $\boxed{E}$ 个.

供选择的答案

A、B、C、D、E：

① 2；　② 6；　③ 56；　④ 68；　⑤ 80；

⑥ 102；　⑦ 120；　⑧ 124；　⑨ 138；　⑩ 162.

3.7 75 个学生去书店买语文、数学、英语课外书，每种书每个学生至多买 1 本. 已知有 20 个学生每人买 3 本书，55 个学生每人至少买 2 本书. 设每本书的价格都是 1 元，所有的学生总共花费 140 元. 那么恰好买 2 本书的有 $\boxed{A}$ 个学生. 至少买 2 本书的学生花费 $\boxed{B}$ 元. 买 1 本书的有 $\boxed{C}$ 个学生，至少买 1 本书的有 $\boxed{D}$ 个学生，没买书的有 $\boxed{E}$ 个学生.

供选择的答案

A、B、C、D、E：

① 10；　② 15；　③ 30；　④ 35；　⑤ 40；

⑥ 55；　⑦ 60；　⑧ 65；　⑨ 130；　⑩ 140.

3.8 设 S、T、M 为任意集合，判断下列命题的真假.

(1) $\varnothing$ 是 $\varnothing$ 的子集.

(2) 如果 $S \cup T = S \cup M$，则 $T = M$.

(3) 如果 $S - T = \varnothing$，则 $S = T$.

(4) 如果 $\sim S \cup T = E$，则 $S \subseteq T$.

(5) $S \oplus S = S$.

3.9 $S_1 = \varnothing$，$S_2 = \{\varnothing\}$，$S_3 = P(\{\varnothing\})$，$S_4 = P(\varnothing)$，判断以下命题的真假.

(1) $S_2 \in S_4$.

(2) $S_1 \subseteq S_3$.

(3) $S_4 \subseteq S_2$.

(4) $S_4 \in S_3$.

(5) $S_2 = S_1$.

3.10 用列元素法表示以下集合.

(1) $A = \{ x \mid x \in \mathbf{N} \wedge x^2 \leqslant 7 \}$.

(2) $A = \{ x \mid x \in \mathbf{N} \wedge |3 - x| < 3 \}$.

(3) $A=\{x \mid x\in\mathbf{R}\wedge(x+1)^2\leqslant 0\}$.

(4) $A=\{<x,y> \mid x,y\in\mathbf{N}\wedge x+y\leqslant 4\}$.

3.11 求使得以下集合等式成立时 a、b、c、d 应该满足的条件.

(1) $\{a,b\}=\{a,b,c\}$.

(2) $\{a,b,a\}=\{a,b\}$.

(3) $\{a,\{b,c\}\}=\{a,\{d\}\}$.

(4) $\{\{a,b\},\{c\}\}=\{\{b\}\}$.

(5) $\{\{a,\varnothing\},b,\{c\}\}=\{\{\varnothing\}\}$.

3.12 设 a、b、c、d 代表不同的元素. 说明以下集合 A 和 B 之间成立哪一种关系(指 $A\subset B$, $B\subset A$, $A=B$, $A\not\subseteq B$ 且 $B\not\subseteq A$).

(1) $A=\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$, $B=\{\{a,b\},\{c\}\}$.

(2) $A=\{\{a,b\},\{b\},\varnothing\}$, $B=\{\{b\}\}$.

(3) $A=\{x \mid x\in\mathbf{N}\wedge x^2>4\}$, $B=\{x \mid x\in\mathbf{N}\wedge x>2\}$.

(4) $A=\{ax+b \mid x\in\mathbf{R}\wedge a,b\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{x+y \mid x,y\in\mathbf{R}\}$.

(5) $A=\{x \mid x\in\mathbf{R}\wedge x^2+x-2=0\}$, $B=\{y \mid y\in\mathbf{Q}\wedge y^2+y-2=0\}$.

(6) $A=\{x \mid x\in\mathbf{R}\wedge x^2\leqslant 2\}$, $B=\{cx \mid x\in\mathbf{R}\wedge 2x^3-5x^2+4x=1\}$.

3.13 计算 $A\cup B$、$A\cap B$、$A-B$、$A\oplus B$.

(1) $A=\{\{a,b\},c\}$, $B=\{c,d\}$.

(2) $A=\{\{a,\{b\}\},c,\{c\},\{a,b\}\}$, $B=\{\{a,b\},c,\{b\}\}$.

(3) $A=\{x \mid x\in\mathbf{N}\wedge x<3\}$, $B=\{x \mid x\in\mathbf{N}\wedge x\geqslant 2\}$.

(4) $A=\{x \mid x\in\mathbf{R}\wedge x<1\}$, $B=\{x \mid x\in\mathbf{Z}\wedge x<1\}$.

(5) $A=\{x \mid x\in\mathbf{Z}\wedge x<0\}$, $B=\{x \mid x\in\mathbf{Z}\wedge x\geqslant 2\}$.

3.14 计算幂集 $P(A)$.

(1) $A=\{\varnothing\}$.

(2) $A=\{\{1\},1\}$.

(3) $A=P(\{1,2\})$.

(4) $A=\{\{1,1\},\{2,1\},\{1,2,1\}\}$.

(5) $A=\{x \mid x\in\mathbf{R}\wedge x^3-2x^2-x+2=0\}$.

3.15 请用文氏图表示以下集合.

(1) $\sim A\cup(B\cap C)$.

(2) $(A\oplus B)-C$.

(3) $(A\cap\sim B)\cup(C-B)$.

(4) $A\cup(C\cap\sim B)$.

3.16 设 A、B、C 代表任意集合,判断以下等式是否恒真,如果不是,请举一反例.

(1) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$.

(2) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$.

(3) $A-(B\cup C)=(A-B)-C$.

(4) $(A\cup B\cup C)-(A\cup B)=C$.

(5) $(A\cup B)-(B\cup C)=A-C$.

(6) $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$.

3.17 设 A、B、C、D 代表任意集合，判断以下命题是否恒真，如果不是，请举一反例.

(1) $A\subset B\wedge C\subset D\Rightarrow A\cap C\subset B\cap D$.

(2) $A\subseteq B\wedge C\subseteq D\Rightarrow A-D\subseteq B-C$.

(3) $A\subseteq B\Leftrightarrow B=A\cup(B-A)$.

(4) $A-B=B-A\Leftrightarrow A=B$.

3.18 设 $|A|=3$，$|P(B)|=64$，$|P(A\cup B)|=256$. 求 $|B|$、$|A\cap B|$、$|A-B|$、$|A\oplus B|$.

3.19 求在 1 到 1 000 000 之间(包括 1 和 1 000 000 在内)有多少个整数既不是完全平方数，也不是完全立方数?

3.20 错位排列的计数问题. 设 $i_1i_2\cdots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数的排列. 如果排在第 i 位的数都不等于 i，其中 $i=1,2,\cdots,n$，则称这个排列为错位排列. 比如 1,2,3,4 的错位排列有 2143，2341，2413，3142，3412，3421，4123，4312，4321，一共 9 个错位排列，记作 $D_4=9$. 将 n 个数的错位排列个数记作 D_n，证明 $D_n=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right]$.

3.21 求不超过 120 的素数个数.

习题解答

3.1	A：③；	B：④；	C：⑤；	D：⑦；	E：⑧.
3.2	A：③；	B：①；	C：⑤；	D：⑥；	E：⑦.
3.3	A：①；	B：③；	C：⑧；	D：⑤；	E：⑩.

分析 对于给定的集合或集合公式，比如说是 A 和 B，判别 B 是否被 A 包含，可以有下述方法.

1° 若 A 和 B 是通过列元素的方式给出的，那么依次检查 B 中的每个元素是否在 A 中出现. 如果都在 A 中出现，则 $B\subseteq A$，否则不是. 例如，3.3 题给的答案中有$\{\{1,2\}\}$和$\{1\}$，谁是 $S=\{\varnothing,\{1\},\{1,2\}\}$的子集呢? 前一个集合的元素是$\{1,2\}$，在 S 中出现；但后一个集合的元素是 1，不在 S 中出现. 因此，$\{\{1,2\}\}\subseteq S$.

2° 若 A 和 B 是通过用谓词概括元素性质的方式给出的，B 中元素的性质为 P，A 中元素的性质为 Q，那么，

“如果 P 则 Q”意味着 $B\subseteq A$.

“只有 P 才 Q”意味着 $A\subseteq B$.

“除去 P 都不 Q”意味着 $A\subseteq B$.

“P 且仅 P 则 Q”意味着 $A=B$.

例如，3.1 题(1)是“如果 P 则 Q”的形式，其中“计算机专业二年级学生”是性质 P，“学离散数学课”是性质 Q；题(2)是“P 且仅 P 则 Q”的形式. 此外

“如果 P 就非 Q”则意味着 $A\cap B=\varnothing$.

例如，3.1 题(3)和 3.2 题(3)都是这种形式.

3° 通过集合运算判别 $B\subseteq A$. 如果 $B\cup A=A$，$B\cap A=B$，$B-A=\varnothing$ 这 3 个等式中有任何一个成立，则有 $B\subseteq A$.

4° 通过文氏图观察，如果代表 B 的区域落在代表 A 的区域内部，则 $B\subseteq A$.

这后两种方法将在后面的解答中给出实例.

3.4 A：②； B：④； C：⑦； D：⑥； E：⑧.

3.5 A：②； B：④； C：⑤； D：⑥； E：⑨.

3.6 A：①； B：⑨； C：④； D：⑦； E：⑧.

3.7 A：④； B：⑨； C：①； D：⑧； E：①.

分析 设只买 1 本、2 本及 3 本书的学生集合分别为 S_1、S_2 和 S_3. 它们之间两两不交. 由题意可知

$$|S_3|=20,\quad |S_2\cup S_3|=55.$$

又知 $S_2\cap S_3=\varnothing$，所以

$$|S_2|=|S_2\cup S_3|-|S_3|=55-20=35.$$

然后列出下面的方程：

$$|S_1|+2|S_2|+3|S_3|=140$$

求得 $|S_1|=10$. 因此，没有买书的人数是

$$75-(10+35+20)=10.$$

3.8 (1)和(4)为真，其余为假.

分析 这里可以应用集合运算的方法来判别集合之间的包含或相等关系. 题(3)中的条件 $S-T=\varnothing$ 意味着 $S\subseteq T$，这时不一定有 $S=T$ 成立. 而对于题(4)，由条件 $\sim S\cup T=E$ 可推出

$$\begin{aligned}&S\cap(\sim S\cup T)=S\cap E\Rightarrow(S\cap\sim S)\cup(S\cap T)=S\\&\Rightarrow\varnothing\cup(S\cap T)=S\Rightarrow S\cap T=S.\end{aligned}$$

这是 $S\subseteq T$ 的充分必要条件，从而结论为真.

对于假命题都可以找到反例，如题(2)中令 $S=\{1,2\}$，$T=\{1\}$，$M=\{2\}$ 即可；而对于题(5)，只要 $S\neq\varnothing$ 即可.

3.9 (2)、(3)和(4)为真，其余为假.

3.10 (1) $A=\{0,1,2\}$.

(2) $A=\{1,2,3,4,5\}$.

(3) $A=\{-1\}$.

(4) $A=\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 0,3\rangle,\langle 1,2\rangle,$
$\langle 2,1\rangle,\langle 3,0\rangle,\langle 0,4\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,0\rangle\}$.

3.11 (1) $a=c$ 或 $c=b$.

(2) 任何 a、b.

(3) $b=c=d$.

(4) $a=b=c$.

(5) $a=c=\varnothing$ 且 $b=\{\varnothing\}$.

3.12 (1)、(2)和(6)都是 $B\subset A$,而(3)、(4)、(5)是 $A=B$.

分析 对于用谓词给定的集合先尽量用列元素的方法表示,然后进行集合之间包含关系的判别. 如果有的集合不能列元素,也要先对谓词表示尽可能化简. 如题(3)中的 A 可化简为

$$\{x \mid x\in \mathbf{N}\wedge x>2\}$$

题(5)中的 A 和 B 都可以化简为 $\{1,-2\}$;题(6)中的

$$A=\{x \mid x\in \mathbf{R}\wedge -\sqrt{2}\leqslant x\leqslant \sqrt{2}\},\quad B=\{1,1/2\}.$$

而对于题(4),不难看出 $A=B=\mathbf{R}$,是实数集合.

3.13 (1) $A\cup B=\{\{a,b\},c,d\}$, $A\cap B=\{c\}$,

$A-B=\{\{a,b\}\}$, $A\oplus B=\{\{a,b\},d\}$.

(2) $A\cup B=\{\{a,\{b\}\},c,\{c\},\{a,b\},\{b\}\}$,

$A\cap B=\{\{a,b\},c\}$, $A-B=\{\{a,\{b\}\},\{c\}\}$,

$A\oplus B=\{\{a,\{b\}\},\{c\},\{b\}\}$.

(3) $A\cup B=\mathbf{N}$, $A\cap B=\{2\}$, $A-B=\{0,1\}$,

$A\oplus B=\mathbf{N}-\{2\}$.

(4) 观察到 $B\subset A$,故

$$A\cup B=A,\quad A\cap B=B,\quad A\oplus B=A-B=\{x \mid x\in \mathbf{R}-\mathbf{Z}\wedge x<1\}.$$

(5) 观察到 $A\cap B=\varnothing$,故

$$A\cup B=\mathbf{Z}-\{0,1\},\quad A\cap B=\varnothing,$$
$$A-B=A,\quad A\oplus B=\mathbf{Z}-\{0,1\}.$$

3.14 (1) $P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

(2) $P(A)=\{\varnothing,\{\{1\}\},\{1\},\{\{1\},1\}\}$.

(3) $P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{1\}\},\{\{2\}\},\{\{1,2\}\},\{\varnothing,\{1\}\},\{\varnothing,\{2\}\},\{\varnothing,\{1,2\}\},$
$\{\{1\},\{2\}\},\{\{1\},\{1,2\}\},\{\{2\},\{1,2\}\},\{\varnothing,\{1\},\{2\}\},\{\varnothing,\{1\},\{1,2\}\},$
$\{\varnothing,\{2\},\{1,2\}\},\{\{1\},\{2\},\{1,2\}\},\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}\}$.

(4) $P(A)=\{\varnothing,\{\{1\}\},\{\{1,2\}\},\{\{1\},\{1,2\}\}\}$.

(5) $P(A)=\{\varnothing,\{-1\},\{1\},\{2\},\{-1,1\},\{-1,2\},\{1,2\},\{-1,1,2\}\}$.

分析 在做集合运算前先要化简集合,然后再根据题目要求进行计算. 这里的化简指的是元素、谓词表示和集合公式 3 种化简.

元素的化简:相同的元素只保留一个,去掉所有冗余的元素.

谓词表示的化简:去掉冗余的谓词,这在前边的题解中已经用到.

集合公式的化简:利用简单的集合公式代替相等的复杂公式. 这种化简常涉及集合间包含或相等关系的判别.

例如,题(4)中的 $A=\{\{1,1\},\{2,1\},\{1,2,1\}\}$ 化简后得 $A=\{\{1\},\{1,2\}\}$,而题(5)中的 $A=\{x \mid x\in \mathbf{R}\wedge x^3-2x^2-x+2=0\}$ 化简为 $A=\{-1,1,2\}$.

3.15 (1)、(2)、(3)、(4)各题的文氏图分别如图 3-2(a)~图 3-2(d)所示.

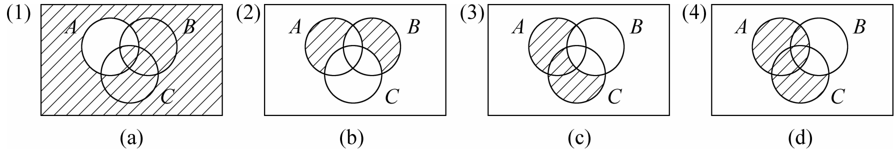

图 3-2

3.16 (1)、(2)、(3)和(6)为真.(4)和(5)不为真.

分析 如果给出的是集合恒等式,可以用两种方法验证.一是分别对等式两边的集合画出文氏图,然后检查两个图中的阴影区域是否一致.二是利用集合恒等式的代入不断对等式两边的集合公式进行化简或者变形,直到两边相等或者一边是另一边的子集为止.例如,题(1)中的等式左边经恒等变形后可得到等式右边,即

$$(A\cup B)-C=(A\cup B)\cap\sim C=(A\cap\sim C)\cup(B\cap\sim C)=(A-C)\cup(B-C).$$

类似地,对题(2)和题(3)中的等式分别有

$$\begin{aligned}A-(B-C)&=A\cap\sim(B\cap\sim C)=A\cap(\sim B\cup C)\\&=(A\cap\sim B)\cup(A\cap C)\\&=(A-B)\cup(A\cap C),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A-(B\cup C)&=(A-B)\cap(A-C)=(A-B)\cap(A\cap\sim C)\\&=((A-B)\cap A)\cap\sim C\\&=(A-B)\cap\sim C=(A-B)-C.\end{aligned}$$

但对于等式(4).左边经变形后得

$$\begin{aligned}(A\cup B\cup C)-(A\cup B)&=((A\cup B)-(A\cup B))\cup(C-(A\cup B))\\&=\varnothing\cup(C-(A\cup B))=C-(A\cup B).\end{aligned}$$

易见,$C-(A\cup B)\subseteq C$,但不一定有 $C-(A\cup B)=C$.如令 $A=B=C=\{1\}$时,等式(4)不为真.类似地,等式(5)的左边经化简后得$(A-C)-B$,而$(A-C)-B$ 不一定恒等于 $A-C$.例如令 $A=\{1,2\}$,$B=\{2\}$,$C=\{1\}$.那么等式(5)不为真.

3.17 (1) 不为真.(2)、(3)和(4)都为真.对于题(1)举反例如下:令 $A=\{1\}$,$B=\{1,4\}$,$C=\{2\}$,$D=\{2,3\}$,则 $A\subset B$ 且 $C\subset B$,但 $A\cap C=B\cap D$,与结论矛盾.

分析 (2) 由于 $C\subseteq D\Leftrightarrow\sim D\subseteq\sim C$,又由 $A\subseteq B$ 可得 $A\cap\sim D\subseteq B\cap\sim C$,即 $A-D\subseteq B-C$ 成立.

(3) 由于 $A\cup(B-A)=A\cup B$,故有

$$B=A\cup(B-A)\Leftrightarrow B=A\cup B\Leftrightarrow A\subseteq B.$$

这里用到 $A\subseteq B$ 的充要条件为 $B=A\cup B$,或 $A=A\cap B$,或 $A-B=\varnothing$.

(4) 易见,当 $A=B$ 成立时,必有 $A-B=B-A$.反之,由 $A-B=B-A$,得

$$(A-B)\cap B=(B-A)\cap B,$$

化简后得 $B-A=\varnothing$,即 $B\subseteq A$.同理,可证出 $A\subseteq B$,从而得到 $A=B$.

3.18 由$|P(B)|=64$,可知$|B|=6$.又由$|P(A\cup B)|=256$,知$|A\cup B|=8$.代入包含排斥原理得

$$8=3+6-|A\cap B|,$$

从而有 $|A\cap B|=1$，$|A-B|=2$，$|A\oplus B|=2+5=7$.

3.19 令 $S=\{x\mid x\in\mathbf{N}\wedge 1\leqslant x\leqslant 1\,000\,000\}$.

$$A=\{x\mid x\in S\wedge x\text{ 是完全平方数}\},$$
$$B=\{x\mid x\in S\wedge x\text{ 是完全立方数}\},$$

从而有 $|S|=1\,000\,000$，$|A|=1000$，$|B|=100$，$|A\cap B|=10$. 代入包含排斥原理得

$$\begin{aligned}|\overline{A}\cap\overline{B}|&=|S|-(|A|+|B|-|A\cap B|\\&=1\,000\,000-(1000+100)+10\\&=998\,910\end{aligned}$$

3.20 设 S 是由 $1,2,\cdots,n$ 构成的所有排列的集合，P_i 是其中 i 处在排列中的第 i 位的性质，A_i 是 S 中具有性质 P_i 的排列的集合，$i=1,2,\cdots,n$. 错位排列数 D_n 就是 S 中不具有以上任何一条性质的排列个数. 使用包含排斥原理. 显然，S 中的排列总数是 $n!$. 如果在排列中 i 处在第 i 位，那么其他 $n-1$ 个数还有 $(n-1)!$ 排列的方式. 通过类似的分析可以得到下述结果：

$$\begin{array}{ll}|S|=n! & \\ |A_i|=(n-1)! & i=1,2,\cdots,n\\ |A_i\cap A_j|=(n-2)! & 1\leqslant i<j\leqslant n\\ |A_i\cap A_j\cap A_k|=(n-3)! & 1\leqslant i<j<k\leqslant n\\ \vdots & \\ |A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|=0!=1 & \end{array}$$

代入包含排斥原理得

$$\begin{aligned}D_n&=|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}|\\&=n!-C_n^1(n-1)!+C_n^2(n-2)!-\cdots+(-1)^nC_n^n0!\\&=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right]\end{aligned}$$

3.21 由于 $11^2=121$，因此对于不超过 120 的合数，其素因子只可能是 2、3、5 和 7. 考虑集合

$$S=\{x\mid x\in\mathbf{Z},1\leqslant x\leqslant 120\},$$

S 中不能被 2、3、5、7 中任何一个数整除的数就是不超过 120 的素数. 令能被 2、3、5 或 7 整除的集合分别记为 A_1、A_2、A_3 和 A_4，那么不超过 120 的素数个数是

$$N=|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}|+3$$

上述公式中 $+3$ 的理由是：2、3、5、7 这 4 个数不属于集合 $\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}$，但它们是不超过 120 的素数. 此外，1 属于集合 $\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}$，但 1 不是素数.

$$\begin{array}{llll}|A_1|=60, & |A_2|=40, & |A_3|=24, & |A_4|=17\\ |A_1\cap A_2|=20, & |A_1\cap A_3|=12, & |A_1\cap A_4|=8, & \\ |A_2\cap A_3|=8, & |A_2\cap A_4|=5, & |A_3\cap A_4|=3 & \\ |A_1\cap A_2\cap A_3|=4, & |A_1\cap A_2\cap A_4|=2, & |A_1\cap A_3\cap A_4|=1, & \\ |A_2\cap A_3\cap A_4|=1, & |A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=0. & & \end{array}$$

将上述结果代入包含排斥原理得

$$
\begin{aligned}
N &= |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| + 3 \\
&= 120 - (60 + 40 + 24 + 17) + (20 + 12 + 8 + 8 + 5 + 3) \\
&\quad - (4 + 2 + 1 + 1) + 0 + 3 \\
&= 120 - 141 + 56 - 8 + 3 = 30
\end{aligned}
$$

不妨验证这个结果，把 30 个素数枚举出来是 2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，53，59，61，67，71，73，79，83，89，97，101，103，107，109，113.

第 4 章　二元关系和函数

内 容 提 要

1. 有序对与笛卡儿积

由两个元素 x 和 y（允许 $x=y$）按一定的顺序排列成的二元组叫做一个有序对（也称序偶），记作 $<x,y>$. 其中 x 是它的第一元素，y 是它的第二元素. 两个有序对 $<x,y>$ 与 $<u,v>$ 相等的充分必要条件是 $x=u$ 且 $y=v$.

设 A、B 为集合，A 与 B 的笛卡儿积记作 $A\times B$，其中

$$A\times B=\{<x,y>\mid x\in A\wedge y\in B\}.$$

笛卡儿积运算具有下述性质：

$$\varnothing\times B=A\times\varnothing=\varnothing.$$

$$A\times B\neq B\times A\quad(A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing\wedge A\neq B).$$

$$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)\quad(A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing\wedge C\neq\varnothing).$$

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C).$$

$$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A).$$

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C).$$

$$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A).$$

2. 关系、从 *A* 到 *B* 的关系和 *A* 上的关系

如果一个集合为空集或者它的元素都是有序对，则称这个集合是一个二元关系，记作 R. 对于二元关系 R，如果 $<x,y>\in R$，则记作 xRy；如果 $<x,y>\notin R$，则记作 $x\not R y$.

设 A、B 为集合，$A\times B$ 的任何子集所定义的二元关系称做从 A 到 B 的二元关系，特别当 $A=B$ 时，则叫做 A 上的二元关系. 当 A 含有 n 个元素，即 $|A|=n$ 时，A 上有 2^{2^n} 个不同的二元关系，其中最常用的 A 上的二元关系有下述 5 种.

恒等关系：$I_A=\{<x,x>\mid x\in A\}$.

全域关系：$E_A=A\times A$.

小于等于关系：$L_A=\{<x,y>\mid x,y\in A\wedge x\leqslant y\}$，这里的 A 是实数集 $\mathbf{R}$ 的某个子集.

整除关系：$D_A=\{<x,y>\mid x,y\in A\wedge x\mid y\}$，这里的 A 是正整数集 $\mathbf{Z}^+$ 的某个子集，$x\mid y$ 表示 x 是 y 的因子，或者说 x 整除 y.

包含关系：$R=\{<x,y>\mid x,y\in P(B)\wedge x\subseteq y\}$，这里 $A=P(B)$.

3. 关系表示法

表示关系的方法有 3 种：集合表达式、关系矩阵和关系图，其中关系图只能表示有穷集

A 上的关系，关系矩阵可以表示有穷集 A 到 B 的关系与 A 上的关系.

4. 关系的性质

对于集合 A 上的关系 R 可以定义 5 种性质：自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性.

R 在 A 上自反 $\Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow xRx)$.

R 在 A 上反自反 $\Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x\not R x)$.

R 在 A 上对称 $\Leftrightarrow \forall x \forall y(x, y \in A \wedge xRy \rightarrow yRx)$.

R 在 A 上反对称 $\Leftrightarrow \forall x \forall y(x, y \in A \wedge xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)$.

R 在 A 上传递 $\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z(x, y, z \in A \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$.

判别关系性质的方法如表 4-1 所示，其中的 M^2 表示矩阵 M 和 M 相乘. 注意在做乘法时的相加为逻辑加，即 $0+0=0, 0+1=1+0=1+1=1$. $M-M^2$ 表示将 M 中的每个元素减去 M^2 中的相对应元素后得到的结果矩阵，这里的减法是普通的减法.

表 4-1

充要条件	自　反	反自反	对　称	反对称	传　递
集合表示 R	$I_A \subseteq R$	$I_A \cap R = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} = \varnothing$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵 M	主对角线元素全是 1	主对角线元素全是 0	对称矩阵	若 $r_{ij}=1$，且 $i \neq j$，则 $r_{ji}=0$	$M-M^2$ 中不含负数
关系图 G	每个结点都有环	每个结点都没有环	如果两个结点之间有边，必是一对方向相反的边	如果两个结点之间有边，必是一条单方向的边	若结点 x_i 到 x_j 有边，x_j 到 x_k 有边，则从 x_i 到 x_k 有边

5. 等价关系和划分

设 R 为非空集合 A 上的关系，如果 R 是自反的、对称的和传递的，则称 R 为 A 上的等价关系. 对任何 $x, y \in A$，如果 $\langle x, y \rangle \in$ 等价关系 R，则记作 $x \sim y$. 对于 A 的任何元素 x，A 中与 x 等价的元素构成了 x 的等价类，记作 $[x]_R$，简记作 $[x]$，即

$$[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge xRy\}.$$

A 上等价关系 R 的所有不交的等价类的集合称为 A 在 R 下的商集，记作 A/R，即

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}.$$

设 A 是非空集合，如果存在一个 A 的子集族 $\pi(\pi \subseteq P(A))$，满足以下条件：

(1) $\varnothing \notin \pi$.

(2) π 中任意两个元素不交.

(3) π 中所有元素的并集等于 A.

则称 π 为 A 的一个划分，且称 π 中元素为划分块.

可以证明 A 关于等价关系 R 的商集 A/R 就是 A 的划分；反之，给定 A 的划分 π，将 π 中划分块作为等价类也可以导出 A 上的等价关系. A 上的等价关系与 A 的划分是一一对应的.

6. 偏序关系与偏序集

设 R 为非空集合 A 上的关系,如果 R 是自反的、反对称的和传递的,则称 R 为 A 上的偏序关系,简称偏序,记作$\preccurlyeq$. 集合 A 和 A 上的偏序关系$\preccurlyeq$一起叫做偏序集,记作$<A,\preccurlyeq>$. $\forall x,y\in A$,x 与 y 之间只能保持下面 4 种关系之一:$x=y$,$x\prec y$,$y\prec x$,x 与 y 不可比. 这里的 $x\prec y$、$y\prec x$ 以及 x 与 y 不可比的含义是

$$x \prec y \Leftrightarrow x \preccurlyeq y \wedge x \neq y,$$

$$y \prec x \Leftrightarrow y \preccurlyeq x \wedge y \neq x,$$

$$x\text{ 与 }y\text{ 不可比} \Leftrightarrow x \not\preccurlyeq y \wedge y \not\preccurlyeq x.$$

当 $x\prec y$ 且不存在其他的元素 z 使得 $x\prec z\prec y$ 成立时,称 y 盖住 x. $x\prec y$ 意味着在序关系上 y 排在 x 的后边;而 y 盖住 x 则意味着在序关系上 y 紧跟在 x 的后边.

有穷集上的偏序可以用哈斯图来表示. 在哈斯图中的元素是分层排列的. 最底层是所有的极小元,相邻两层之间较高一层的元素至少盖住较低一层的一个元素. 每条路径的最高层元素都是极大元. 如果偏序集只有唯一的极小元,它就是该偏序集的最小元. 类似地,如果偏序集只有唯一的极大元,它就是该偏序集的最大元. 给定偏序集$<A,\preccurlyeq>$的子集 B,如果存在元素 $x\in A$ 大于等于 B 中所有的元素,那么 x 就是 B 的上界. 所有上界中的最小元就是 B 的最小上界. 类似地,可以定义 B 的最大下界. B 的最大下界或最小上界如果存在,一定是唯一的.

7. 关系运算

和关系有关的运算有以下几种:

定义域　$\mathrm{dom}R=\{x\mid \exists y(<x,y>\in R)\}$.

值域　$\mathrm{ran}R=\{y\mid \exists x(<x,y>\in R)\}$.

域　$\mathrm{fld}R=\mathrm{dom}R\cup \mathrm{ran}R$.

逆　$R^{-1}=\{<x,y>\mid yRx\}$.

合成　$F\circ G=\{<x,y>\mid \exists z(xGz\wedge zFy)\}$.

限制　$F\upharpoonright A=\{<x,y>\mid xFy\wedge x\in A\}$.

像　$F[A]=\mathrm{ran}(F\upharpoonright A)$.

以下运算仅适合 A 上的关系 R:

幂　$R^0=I_A$,

　$R^{n+1}=R^n\circ R$, n 为自然数.

自反闭包　$r(R)=R\cup R^0$.

对称闭包　$s(R)=R\cup R^{-1}$.

传递闭包　$t(R)=R\cup R^2\cup\cdots$

8. 函数

函数也称作映射,它是一种特殊的二元关系. 函数的定义是:设 F 为二元关系,若对任意的 $x\in\mathrm{dom}F$ 都存在唯一的 $y\in\mathrm{ran}F$ 使得 xFy 成立,则称 F 为函数. 若$<x,y>\in$ 函数

F，则记作 $y=F(x)$，称 y 是 F 在 x 的函数值.

给定集合 A、B 和函数 f，若 f 满足下述条件：

（1）$\mathrm{dom}f=A$.

（2）$\mathrm{ran}f\subseteq B$.

则称 f 是从 A 到 B 的函数，记作 $f:A\to B$. 所有从 A 到 B 的函数的集合 $\{f\mid f:A\to B\}$ 记作 B^A，读作"B 上 A". 如果 $|A|=m$，$|B|=n$，且 m、n 不全为 0，则 $|B^A|=n^m$.

9. 函数的性质

某些函数 $f:A\to B$ 具有单射、满射或双射的性质. 这些性质分别定义如下：

设 $f:A\to B$，

（1）若 $\mathrm{ran}f=B$，则称 $f:A\to B$ 是满射的.

（2）若对任意 $x,y\in A$，$x\neq y$，都有 $f(x)\neq f(y)$，则称 $f:A\to B$ 是单射的.

（3）若 $f:A\to B$ 既是满射的，又是单射的，则称 $f:A\to B$ 是双射的.

10. 函数的复合和反函数

给定函数 f 和 g，f 与 g 的合成也是函数，称作 f 与 g 的复合函数，并且满足

（1）$\mathrm{dom}(f\circ g)=\{x\mid x\in \mathrm{dom}g\wedge g(x)\in \mathrm{dom}f\}$；

（2）$f\circ g(x)=f(g(x))$，$\forall x\in \mathrm{dom}(f\circ g)$.

特别地，若 $f:B\to C$，$g:A\to B$，那么 $f\circ g:A\to C$.

函数的逆不一定构成函数. 但对于双射函数 $f:A\to B$，它的逆 $f^{-1}:B\to A$ 也是双射函数，称为 f 的反函数.

11. 小结

通过本章的学习应达到下面的基本要求.

能正确地使用集合表达式、关系矩阵和关系图表示给定的二元关系.

给定 A 上的关系 R（可能是集合表达式，也可能是关系矩阵或关系图），能判别 R 的性质.

给定 A 上的等价关系 R，求所有的等价类和商集 A/R，或者求与 R 相对应的划分；给定 A 的划分 π，求对应于 π 的等价关系 R.

给定 A 上的偏序关系 $\preccurlyeq$，画出偏序集的哈斯图；给定偏序集 $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ 的哈斯图，求 A 和 $\preccurlyeq$ 的集合表达式.

确定偏序集的极大元、极小元、最大元、最小元、最大下界和最小上界.

给定集合 A、B 和 f，判别 f 是否为从 A 到 B 的函数 $f:A\to B$. 如果是，说明 $f:A\to B$ 是否为单射、满射、双射的.

应熟练掌握的计算包括：

给定关系 R，求 $\mathrm{dom}R$、$\mathrm{ran}R$、$\mathrm{fld}R$、R^{-1}；给定关系 R 和集合 A，求 $R\restriction A$、$R[A]$；给定关系 F 和 G，求 $F\circ G$；给定 A 上的关系 R，求 R^n、$r(R)$、$s(R)$、$t(R)$.

给定函数 $f:A\to B$，$x\in A$，$A'\subseteq A$，求 $f(x)$、$f(A')$；求 $f:A\to B$ 的反函数；给定函数

$f: A \to B$，$g: C \to D$，求复合函数 $f \circ g$.

给定集合 A 和 B，求 $A \times B$、B^A，构造从 A 到 B 的双射函数.

在做以上计算时，如果没有特殊说明，所得结果应该与已知的关系或函数的表示方法一致. 例如，已知关系 R 是用集合表达式给出的，那么，在计算 R^{-1}、$R \upharpoonright A$、R^n、$r(R)$、$s(R)$、$t(R)$时所得的结果关系也要用集合表达式表示. 若 R 用关系图给出，那么结果关系也应该用关系图给出.

习　　题

题 4.1～题 4.10 为选择题. 题目要求是从供选择的答案中选出应填入叙述中的□内的正确答案.

4.1　(1) 设 $S=\{1,2\}$，R 是 S 上的二元关系，且 xRy. 如果 $R=I_S$，则$\boxed{\text{A}}$，如果 R 是数的小于等于关系，则$\boxed{\text{B}}$，如果 $R=E_S$，则$\boxed{\text{C}}$.

(2) 设有序对 $<x+2,4>$ 与有序对 $<5,2x+y>$ 相等，则 $x=\boxed{\text{D}}$，$y=\boxed{\text{E}}$.

供选择的答案

A、B、C：① x、y 可任意选择 1 或 2；　② $x=1,y=1$；

③ $x=1,y=1$ 或 2；$x=y=2$；　④ $x=2,y=2$；

⑤ $x=y=1$ 或 $x=y=2$；　⑥ $x=1,y=2$；

⑦ $x=2,y=1$.

D、E：　⑧ 3；　⑨ 2；　⑩ -2.

4.2　设 $S=\{1,2,3,4\}$，R 为 S 上的关系，其关系矩阵是

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则　(1) R 的关系表达式是$\boxed{\text{A}}$.

(2) $\text{dom}R=\boxed{\text{B}}$，$\text{ran}R=\boxed{\text{C}}$.

(3) $R \circ R$ 中有$\boxed{\text{D}}$个有序对.

(4) R^{-1}的关系图中有$\boxed{\text{E}}$个环.

供选择的答案

A：　① $\{<1,1>,<1,2>,<1,4>,<4,1>,<4,3>\}$；

② $\{<1,1>,<1,4>,<2,1>,<4,1>,<3,4>\}$.

B、C：③ $\{1,2,3,4\}$；　④ $\{1,2,4\}$；　⑤ $\{1,4\}$；　⑥ $\{1,3,4\}$.

D、E：⑦ 1；　⑧ 3；　⑨ 6；　⑩ 7.

4.3　设 R 是由方程 $x+3y=12$ 定义的正整数集 $\mathbf{Z}^+$ 上的关系，即

$$\{<x,y> \mid x,y \in \mathbf{Z}^+ \wedge x+3y=12\},$$

则　(1) R 中有$\boxed{\text{A}}$个有序对.

(2) dom$R$ = $\boxed{B}$.

(3) $R\upharpoonright\{2,3,4,6\}$ = $\boxed{C}$.

(4) $\{3\}$在 R 下的像是$\boxed{D}$.

(5) $R \circ R$ 的集合表达式是$\boxed{E}$.

供选择的答案

A: ① 2; ② 3; ③ 4.

B、C、D、E: ④ $\{<3,3>\}$; ⑤ $\{<3,3>,<6,2>\}$; ⑥ $\{0,3,6,9,12\}$; ⑦ $\{3,6,9\}$; ⑧ $\{3\}$; ⑨ $\varnothing$; ⑩ 3.

4.4 设 $S=\{1,2,3\}$,图 4-1 给出了 S 上的 5 个关系,则它们只具有以下性质:R_1 是$\boxed{A}$,R_2 是$\boxed{B}$,R_3 是$\boxed{C}$,R_4 是$\boxed{D}$,R_5 是$\boxed{E}$.

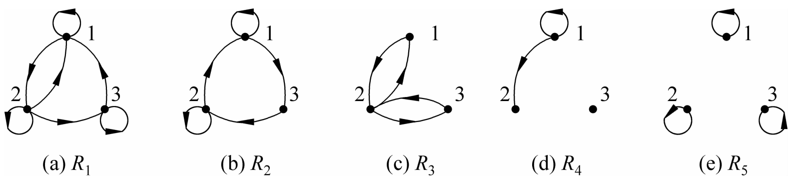

图 4-1

供选择的答案

A、B、C、D、E:

① 自反的,对称的,传递的;

② 反自反的,反对称的;

③ 反自反的,反对称的,传递的;

④ 自反的;

⑤ 反对称的,传递的;

⑥ 什么性质也没有;

⑦ 对称的;

⑧ 反对称的;

⑨ 反自反的,对称的;

⑩ 自反的,对称的,反对称的,传递的.

4.5 设 $\mathbf{Z}^+=\{x \mid x\in\mathbf{Z}\wedge x>0\}$,$\pi_1$、$\pi_2$、$\pi_3$ 是 $\mathbf{Z}^+$ 的 3 个划分.

$$\pi_1 = \{\{x\} \mid x \in \mathbf{Z}^+\},$$

$$\pi_2 = \{S_1, S_2\}, \quad S_1 \text{ 为素数集}, S_2 = \mathbf{Z}^+ - S_1,$$

$$\pi_3 = \{\mathbf{Z}^+\}.$$

则 (1) 3 个划分中划分块最多的是$\boxed{A}$,最少的是$\boxed{B}$.

(2) 划分 π_1 对应的是 $\mathbf{Z}^+$ 上的$\boxed{C}$,π_2 对应的是 $\mathbf{Z}^+$ 上的$\boxed{D}$,π_3 对应的是 $\mathbf{Z}^+$ 上的$\boxed{E}$.

供选择的答案

A、B: ① π_1; ② π_2; ③ π_3.

C、D、E：　④ 整除关系；　⑤ 全域关系；　⑥ 包含关系；

⑦ 小于等于关系；　⑧ 恒等关系；　⑨ 含有两个等价类的等价关系；

⑩ 以上关系都不是.

4.6　设 $S=\{1,2,\cdots,10\}$，$\leqslant$是 S 上的整除关系，则$<S,\leqslant>$的哈斯图是$\boxed{\text{A}}$，其中最大元是$\boxed{\text{B}}$，最小元是$\boxed{\text{C}}$，最小上界是$\boxed{\text{D}}$，最大下界是$\boxed{\text{E}}$.

供选择的答案

A：　① 一棵树；　② 一条链；　③ 以上都不对.

B、C、D、E：④ $\varnothing$；　⑤ 1；　⑥ 10；

⑦ 6,7,8,9,10；　⑧ 6；　⑨ 0；　⑩ 不存在.

4.7　设 f：$\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$\mathbf{N}$ 为自然数集，且

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } x \text{ 为奇数；}\\ \dfrac{x}{2}, & \text{若 } x \text{ 为偶数.}\end{cases}$$

则 $f(0)=\boxed{\text{A}}$，$f(\{0\})=\boxed{\text{B}}$，$f(\{1,2\})=\boxed{\text{C}}$，$f(1,2)=\boxed{\text{D}}$，$f(\{0,2,4,6,\cdots\})=\boxed{\text{E}}$.

供选择的答案

A、B、C、D、E：

① 无意义；　② 1；　③ $\{1\}$；　④ 0；

⑤ $\{0\}$；　⑥ $\dfrac{1}{2}$；　⑦ $\mathbf{N}$；　⑧ $\{1,3,5,\cdots\}$；

⑨ $\left\{\dfrac{1}{2},1\right\}$；　⑩ $\{2,4,6,\cdots\}$.

4.8　设 $\mathbf{R}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{N}$ 分别表示实数、整数和自然数集，下面定义函数 f_1、f_2、f_3、f_4. 试确定它们的性质.

f_1：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(x)=2^x$，

f_2：$\mathbf{Z}\to\mathbf{N}$，$f(x)=|x|$，

f_3：$\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$f(x)=(x)\bmod 3$，x 除以 3 的余数，

f_4：$\mathbf{N}\to\mathbf{N}\times\mathbf{N}$，$f(n)=<n,n+1>$.

则 f_1 是$\boxed{\text{A}}$，f_2 是$\boxed{\text{B}}$，f_3 是$\boxed{\text{C}}$，f_4 是$\boxed{\text{D}}$，$f_4(\{5\})=\boxed{\text{E}}$.

供选择的答案

A、B、C、D：① 满射不单射；　② 单射不满射；　③ 双射；

④ 不单射也不满射；　⑤ 以上性质都不对.

E：　⑥ 6；　⑦ 5；　⑧ $<5,6>$；

⑨ $\{<5,6>\}$；　⑩ 以上答案都不对.

4.9　设 f：$R\to R$，$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 3；\\ -2, & x<3.\end{cases}$

g：$R\to R$，$g(x)=x+2$，

则 $f\circ g(x)=\boxed{\text{A}}$，$g\circ f(x)=\boxed{\text{B}}$，$g\circ f$：$R\to R$ 是$\boxed{\text{C}}$、$f^{-1}$$\boxed{\text{D}}$、$g^{-1}$$\boxed{\text{E}}$.

供选择的答案

A、B：① $\begin{cases}(x+2)^2, & x\geqslant 3\\ -2, & x<3\end{cases}$； ② $\begin{cases}x^2+2, & x\geqslant 3\\ -2, & x<3\end{cases}$

③ $\begin{cases}(x+2)^2, & x\geqslant 1\\ -2, & x<1\end{cases}$； ④ $\begin{cases}x^2+2, & x\geqslant 3\\ 0, & x<3\end{cases}$

C： ⑤ 单射不满射； ⑥ 满射不单射； ⑦ 不单射也不满射；

⑧ 双射.

D、E：⑨ 不是反函数； ⑩ 是反函数.

4.10 （1）设 $S=\{a,b,c\}$，则集合 $T=\{a,b\}$ 的特征函数是 $\boxed{A}$，属于 S^S 的函数是 $\boxed{B}$.

（2）在 S 上定义等价关系 $R=I_S\cup\{<a,b>,<b,a>\}$，那么该等价关系对应的划分中有 $\boxed{C}$ 个划分块. 作自然映射 $g:S\to S/R$，$g(x)=[x]_R$，那么 g 的表达式是 $\boxed{D}$，$g(b)=\boxed{E}$.

供选择的答案

A、B、D：① $\{<a,a>,<b,b>,<c,c>\}$； ② $\{<a,b>\}$；

③ $\{<a,1>,<b,1>,<c,0>\}$； ④ $\{<a,\{a\}>,<b,\{b\}>,<c,\{c\}>\}$；

⑤ $\{<a,\{a,b\}>,<b,\{a,b\}>,<c,\{c\}>\}$.

C： ⑥ 1； ⑦ 2； ⑧ 3.

E： ⑨ $\{a,b\}$； ⑩ $\{b\}$.

4.11 设 $S=\{1,2,\cdots,6\}$，下面各式定义的 R 都是 S 上的关系，分别列出 R 的元素.

（1）$R=\{<x,y>\mid x,y\in S\wedge x\mid y\}$.

（2）$R=\{<x,y>\mid x,y\in S\wedge x$ 是 y 的倍数$\}$.

（3）$R=\{<x,y>\mid x,y\in S\wedge (x-y)^2\in S\}$.

（4）$R=\{<x,y>\mid x,y\in S\wedge x/y$ 是素数$\}$.

4.12 设 $S=\{1,2,\cdots,10\}$，定义 S 上的关系

$$R=\{<x,y>\mid x,y\in S\wedge x+y=10\},$$

R 具有哪些性质？

4.13 $S=\{a,b,c,d\}$，R_1、R_2 为 S 上的关系，

$$R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,d>\},$$
$$R_2=\{<a,d>,<b,c>,<b,d>,<c,b>\}.$$

求 $R_1\circ R_2$、$R_2\circ R_1$、R_1^2、R_2^3.

4.14 设 R 的关系图如图 4-2 所示，试给出 $r(R)$、$s(R)$、$t(R)$的关系图.

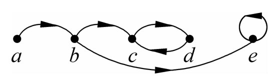

图 4-2

4.15 对任意非空集合 S，$P(S)-\{\varnothing\}$是 S 的非空子集族，那么 $P(S)-\{\varnothing\}$能否构成 S 的划分？

4.16 画出下列集合关于整除关系的哈斯图.

（1）$\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$.

（2）$\{1,2,\cdots,9\}$.

并指出它的极小元、最小元、极大元、最大元.