第3章 计数

组合数学这一研究个体安排的学科是离散数学的重要部分，早在17世纪人们就开始了对这类课题的研究，当时在赌博游戏的研究中出现了组合的问题。枚举，具有确定性质的个体的计数，是组合数学的一个重要的部分。我们必须对个体计数来求解许多不同类型的问题。例如，用计数确定算法的复杂性，计数也用于确定是否存在着能够充分满足需求的电话号码或因特网址，计数技术也广泛用于计算事件的概率。我们可以用计数分析赌博游戏，如扑克。也可以确定抽奖获胜的概率，如25选6，排列5等彩票。

3.1 基本计数、排列与组合

3.1.1 基本的计数原则

定义3.1 加法法则：如果完成第一项任务有n_1种方式，第二项任务有n_2种方式，并且这两项任务不能同时完成，那么完成第一项或第二项任务有n_1+n_2种方式(可推广到多个任务的情形)。

例3.1 假定要从计算机学院10计本①，②班中推选一名学生参加院座谈会，若10计本①班有55名学生，10计本②班有60名学生，那么有多少种不同的选择？

解：完成第一项任务，选择10计本①班的一名学生作为代表，有55种不同的选择，完成第二项任务，选择10计本②班的一名学生作代表，有60种不同的选择，根据加法法则，结果有$55+60=115$种不同的选择方式。

定义3.2 乘法法则：假定一个过程可以分解成两个相互独立的任务。如果完成第一个任务有n_1种方式，完成第二个任务有n_2种方式，那么完成这个过程有$n_1\times n_2$种方式(可推广到多个任务的情形)。

例3.2 设一标识符由两个字符组成，第一个字符由a,b,c,d,e组成，第二个字符由1，2，3组成，则可以组成多少种不同的标识符？

解：第一个任务为从a,b,c,d,e中选择一个字符作为标识符的第一个字符，共有5种方式，第二个任务为从1，2，3中选择一个字符作为标识符的第二个字符，共有3种方式，根据乘法法则有$5\times3=15$种不同的标识符。

许多计数问题不能仅仅使用加法法则或者乘法法则来求解。但是不管多复杂的计数问题总可以使用加法法则和乘法法则的组合来求解。

例 3.3　我国曾经推行的 02 式汽车的牌照的式样如下：999.999，999.XXX，XXX.999，那么共有多少个不同的车牌号码(其中 9 表示该位为数字，X 表示该位为大写字母)？

解：根据乘法法则：

式样为 999.999 的有 $10\times10\times10\times10\times10\times10=1\ 000\ 000$ 种不同牌照；

式样为 999.XXX 的有 $10\times10\times10\times26\times26\times26=17\ 576\ 000$ 种不同的牌照；

式样为 XXX.999 的同样有 17 576 000 种不同的牌照。

根据加法法则，可用车牌数量为

$$1\ 000\ 000+17\ 576\ 000+17\ 576\ 000=36\ 152\ 000 \text{ 种}$$

例 3.4　计算机系统的每个用户有一个 6 到 8 个字符构成的登录密码，其中每个字符是一个大写字母或者数字，且每个密码必须至少包含一个数字，有多少种可能的密码？

解：令 P 是可能的密码总数，且 P_6，P_7，P_8 分别表示 6，7 或 8 位的可能的密码数，由加法法则，$P=P_6+P_7+P_8$。现在找 P_6，P_7 和 P_8。直接找 P_6 是困难的，而找 6 个大写字母和数字构成的字符串数是容易的，其中包含那些没有数字的串在内，然后从中减去没有数字的串数就得到 P_6，由乘法法则可知，6 个字符的串数是 36^6，而没有数字的字符串数是 26^6，因此 $P_6=36^6-26^6=2\ 176\ 782\ 336-308\ 915\ 776=1\ 867\ 866\ 560$，

类似地，$P_7=36^7-26^7=78\ 364\ 164\ 096-8\ 031\ 810\ 176=70\ 332\ 353\ 920$，

$$P_8=36^8-26^8=2\ 812\ 109\ 907\ 456-208\ 827\ 064\ 576=2\ 612\ 282\ 842\ 880$$

从而 $P=P_6+P_7+P_8=2\ 684\ 483\ 063\ 360$

3.1.2　排列与组合

定义 3.3　设 A 是含有 n 个不同元素的集合，$0\leqslant r\leqslant n$，任取 A 中的 r 个元素，按顺序排成一列，称为从 A 中取 r 个的一个排列。

例如：$A=\{a,\ b,\ c\}$，$r=2$。从 A 中取 2 个的排列的全体如下：

ab，ac，ba，bc，ca，cb，总数为 6 个。

令 P_n^r 表示从 n 中取 r 个排列的全体数目，有时也记为 $P(n,r)$。从 n 中取 r 个排列，可以与下面问题一一对应。

图 3.1 为 r 个依次排列的具有不同序号的盒子，设 A 为带有标志 1，2，…，n 的 n 个球。从 A 中取 1 个球放在第 1 个盒子中，从剩下的 $n-1$ 个球中取 1 个球放在第 2 个盒子中，以此类推，从 $n-r+1$ 个余下的球中取 1 个放在第 r 个盒子中。由此可得到从 A 中取 r 个的一个排列。

$$\boxed{(1)}\quad \boxed{(2)}\quad \boxed{(3)}\quad \cdots\quad \boxed{(r)}$$

图 3.1　r 个依次排列的盒子

根据乘法法则，排列总数为 $n(n-1)\cdots(n-r+1)$。

定理 3.1　具有 n 个不同元素的集合的 r-排列数是

$$P_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)=n!/(n-r)!$$

例 3.5　假定有 10 名长跑运动员，按成绩给前 3 名运动员分别颁发金、银、铜牌。如果比赛可能出现所有可能的结果。有多少种不同的颁奖方式？

解：颁奖方式就是 10 个不同元素集合的 3-排列数。

因此存在 $P_{10}^3=10\times9\times8=720$ 种可能的颁奖方式。

例 3.6 TSP 问题(旅行商问题)。一个商人从一个城市出发。不重复地走遍 n 个城市。如果路径可以按照他想要的任何次序进行，问可能有多少种不同的路径？

解：这个问题等同于求 n 个元素集合的 n-排列数。

$P_n^n=n!$，若 $n=8$，该商人要想找到一条具有最短距离的路径。那么他必须考虑 $8!=40320$ 条不同的路径。

定义 3.4 当从 n 个元素中取出 r 个而不考虑它们的顺序时，称为从 n 中取 r 的组合，其数目记为 C_n^r，$C(n,r)$ 或 $\binom{n}{r}$。

从 $\{a,b,c\}$ 中取 2 个进行组合，则有以下几种组合形式：

$$\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}$$

组合问题可以看做是：球有标志 $1,2,3,\cdots,n$，盒子则没有区别。从 n 个球中取 r 个球放到 r 个盒子里，每个盒子 1 个，便得到 n 取 r 的组合。

若在每一种组合结果的基础上再对盒子进行排列，便得到 n 取 r 的排列。所以有

$$P_n^r = C_n^r \cdot r!$$

$$\text{即 } C_n^r = P_n^r/r! = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

定理 3.2 设 n 是正整数，r 是满足 $0\leqslant r\leqslant n$ 的整数，n 元素集合的 r 组合数为 $C_n^r=\dfrac{n!}{(n-r)!r!}$。

推论 3.1 设 n 和 r 是满足 $r\leqslant n$ 的非负整数，那么 $C_n^r=C_n^{n-r}$。

证：由定理 3.2 得 $C_n^r=\dfrac{n!}{(n-r)!\ r!}$。

$$C_n^{n-r} = \frac{n!}{(n-n+r)!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_n^r$$

例 3.7 为开展学校的离散数学课程的教学工作，要选出一个委员会。如果数学系有 9 个教师，计算机科学系由 11 个教师，而这个委员会要由 3 个数学系的教师和 4 个计算机科学系的教师组成。那么有多少种不同的选择方式？

解：从数学系 9 个教师选 3 个教师有 $C_9^3=\dfrac{9!}{6!\cdot3!}=84$ 种不同的选择方式。从计算机科学系 11 个教师中选 4 个教师有 $C_{11}^4=\dfrac{11!}{7!\cdot4!}=330$ 不同的选择方式。

根据乘法法则，选择这个委员会的方式为 $84\times330=27720$ 种。

例 3.8 从 1 到 300 间任取 3 个不同的数，使得这 3 个数的和正好被 3 除尽，试问有几种方案？

解：把 1 到 300 的数按除以 3 的余数分成 3 组。

$A=\{1,4,7,\cdots,298\}$

$B=\{2,5,8,\cdots,299\}$

$C=\{3,6,9,\cdots,300\}$

下面 2 种情况是被 3 除尽的可能情况。

(1) 3 个数同属于 A 或 B 或 C。

(2) 3 个数分别属于 A,B,C。

属于 A 的 3 个数共有 C_{100}^3 种方式，属于 B 或 C 的也各有 C_{100}^3 种方案，分别属于 A,B,C 的 3 个数，根据乘法规则有 100^3 种方案。

按照加法法则，总方案数 $N=3C_{100}^3+100^3=1\,485\,100$。

组合数 C_n^r 又称为二项式系数，使用这个名字是由于这些数作为系数出现在形如 $(a+b)^n$ 的二项式幂的展开式中：

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + \cdots + C_n^ra^{n-r}b^r + \cdots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^nb^n$$

这个式子称为二项式定理。

定理 3.3 （帕斯卡恒等式）设 n 和 k 是满足 $n \geqslant k$ 的正整数，那么有

$$C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$$

证明：假定 T 是包含 $n+1$ 个元素的集合。令 a 是 T 的一个元素，且 $S=T-\{a\}$。从 T 的 $n+1$ 个元素取 k 个元素的组合，可看成以下 2 种情况：

(1) 所取的 k 个元素一定包含 a。

(2) 所取的 k 个元素一定不包含 a。

第 1 种情况的组合数等于从除 a 之外的 n 个元素中取 $k-1$ 个的组合数，值为 C_n^{k-1}。

第 2 种情况的组合数等于从除 a 之外的 n 个元素中取 k 个的组合数，值为 C_n^k。

根据加法法则 $C_{n+1}^k=C_n^{k-1}+C_n^k$，即证。

当然也可以利用 C_n^r 的公式通过代数推导来证明这个恒等式。

帕斯卡恒等式是二项式系数以三角形表示的几何排列的基础，如图 3.2 所示。

C_0^0	1
C_1^0 C_1^1	1 1
C_2^0 C_2^1 C_2^2	1 2 1
C_3^0 C_3^1 C_3^2 C_3^3	1 3 3 1
C_4^0 C_4^1 C_4^2 C_4^3 C_4^4	1 4 6 4 1
C_5^0 C_5^1 C_5^2 C_5^3 C_5^4 C_5^5	1 5 10 10 5 1
…	…

图 3.2 帕斯卡三角形

这个三角形叫做杨辉三角形，也叫帕斯卡三角形。

例 3.9 $(a+b)^4$ 的展开式是什么？

解：
$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= C_4^0a^4+C_4^1a^3b+C_4^2a^2b^2+C_4^3ab^3+C_4^4b^4\\ &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\end{aligned}$$

例 3.10 在 $(3x+2y)^{17}$ 中 x^8y^9 的系数是什么？

解：$(3x+2y)^{17} = \sum\limits_{k=0}^{17} C_{17}^k(3x)^{17-k}(2y)^k$

当 $k=9$ 时，得到展开式中 x^8y^9 的系数为

$$C_{17}^{9}3^{8}2^{9}=\frac{17!}{9!8!}3^{8}2^{9}=81\,662\,929\,920$$

3.2 排列组合的进一步讨论

许多计数问题里元素可以被重复使用，例如，一个字母或一个数字可以在一个车牌中多次使用；某些计数问题涉及不可区别的元素，例如，为计数单词 SUCCESS 的字母可能被重新排列的方式数；此外，还有把不同的元素放入盒子的方法数问题，如把扑克牌发给 4 个玩牌人的不同的方式数。

3.2.1 圆周排列

前面讨论的排列是排列成一列，如若排列在一个圆周上，则称为圆周排列，或简称圆排列。

如 4 个元素 a,b,c,d 的下面 4 种排列 $abcd,dabc,cdab,bcda$ 属于同一个圆周排列。

从 n 中取 r 个做圆周排列的排列数 Q_n^r 与 P_n^r 的关系是：

$$Q_n^r=P_n^r/r$$

因为取 r 个做排列的结果与圆周排列比较重复了 r 次。

例 3.11 5 对夫妻出席一宴会，围一圆桌坐下，试问有多少种不同的方案？若要求每对夫妻相邻又有多少种不同的方案？

解：10 个人围圆桌而坐，相当于 10 个元素的圆排列。排列数为：

$$Q_{10}^{10}=9!=362\,880$$

若加上限制条件，夫妻相邻而坐，则可看做 5 个元素的圆排列，排列数为 4!，但夫妻双方可以交换座位。根据乘法法则，方案数为 $2^5\cdot 4!=768$。

3.2.2 有重复的排列

例 3.12 用英文字母可以构成多少个 n 位字符串？

解：英文字母有 26 个，每个字母可以被重复使用，故每位上都有 26 种可能。根据乘法法则存在 26^n 个 n 位字符串。

例 3.13 r 个不同的球放入 n 个盒子，每个盒子可放任意多个球，有多少种放法？

解：因为每个球都有 n 个盒子可供选择，根据乘法法则有 n^r 种放法。

定理 3.4 具有 n 个物体的集合允许重复的 r 排列数为 n^r。

在计数问题中某些元素可能是没有区别的，在这种情况下必须小心避免重复计数。

例 3.14 用 2 面红旗、3 面黄旗和 4 面蓝旗依次悬挂在一根旗杆上，问可以组成多少种不同的标志？

解：这个问题可以看成是 9 个位置上分别挂红旗、黄旗或蓝旗。

第 1 步：从 9 个位置上选 2 个位置挂红旗有 C_9^2 种方式。

第 2 步：从剩下的 7 个位置上选 3 个位置挂黄旗有 C_7^3 种方式。

第 3 步：从剩下的 4 个位置上选 4 个位置挂蓝旗有 C_4^4 种方式。

根据乘法法则，方式数为 $C_9^2C_7^3C_4^4=1260$。

定理 3.5 设类型1的相同的物体有 n_1 个，类型2的相同的物体有 n_2 个，……，类型 k 的相同的物体有 n_k 个，那么 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$ 个物体的不同排列数是：$\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$。

证明：为确定排列数，按下面的步骤进行。

第1步：在 n 个位置中选择 n_1 个位置放置类型1的物体，有 $C_n^{n_1}$ 种选择。

第2步：在剩下的 $n-n_1$ 个空位置上选择 n_2 个位置放置类型2的物体，有 $C_{n-n_1}^{n_2}$ 种选择。

依次类推。

第 k 步：在剩下的 $n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}=n_k$ 个空位置上选择 n_k 个位置放置类型 k 的物体，有 $C_{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}^{n_k}$ 种选择。

根据乘法法则，不同的排列数是：

$$\begin{aligned}C_n^{n_1}C_{n-n_1}^{n_2}\cdots C_{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}^{n_k} &= \frac{n!}{(n-n_1)!n_1!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!n_2!}\\ &\quad\cdot\cdots\cdot\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!}\\ &= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}\text{。即证。}\end{aligned}$$

例 3.15 重新排序单词 SUCCESS 中的字母能构成多少个不同的串？

解：因为 SUCCESS 中的某些字母是重复的，因此答案并不是7个字母的排列数，这个单词包含3个 S，2个 C，1个 U 和1个 E。根据定理3.5，排列数为：$\dfrac{7!}{3!2!1!1!}=420$。

有些计数问题可以通过枚举把不同的物体放入不同的盒子的方式来求解。典型的例子就是扑克牌游戏，此时物体是牌，而盒子是玩牌人的手。

例 3.16 有多少种方式把52张标准的扑克牌发给4个人使得每个人5张牌？

解：第1步，第1个人得5张牌，有 C_{52}^5 种可能；

第2步，第2个人得5张牌，有 C_{47}^5 种可能；

第3步，第3个人得5张牌，有 C_{42}^5 种可能；

第4步，第4个人得5张牌，有 C_{37}^5 种可能；

根据乘法法则有 $C_{52}^5C_{47}^5C_{42}^5C_{37}^5=\dfrac{52!}{5!5!5!5!32!}$。

值得注意的是，上例是将52个物体分成5堆，前4堆分别为5个，第5堆为32个，也就是说将52个物体放入5个不同的盒子中，前4个盒子是玩牌人的手，第5个盒子放剩下的牌。

定理 3.6 把 n 个不同的物体分配到 k 个不同的盒子，使得 n_i 个物体放入盒子 $i(i=1,2,\cdots,k)$ 的方式数等于 $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$。

例 3.17 打桥牌时，把一副标准的52张牌发给4个人，有多少种不同发牌的方式？

解：把52张牌发给4个人，每人得13张。

根据定理3.6，其方式数为 $\dfrac{52!}{13!13!13!13!}$。

例 3.18 设某地的街道把城市分割成矩形方格，每个方格称为块，某甲从家里出发上班，向东要走过 m 块，向北要走过 n 块，问某甲上班的路径有多少种？

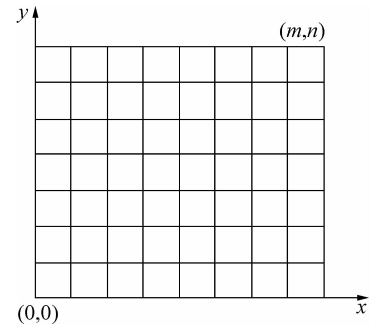

图 3.3 某地街道对应的方格图

解：问题可化成图 3.3 所示的方格图，每格一个单位，求从(0,0)点到(m,n)点的路径数，这里所谓“路径”指的是不允许后退，即不允许逆着 x，y 的正向走。

设从(0,0)点开始向水平方向前进一步为 x，垂直方向上升一步为 y。于是从(0,0)到(m,n)点，水平方向要走 m 步，垂直方向要走 n 步，总和为 $m+n$ 步。一条到达(m,n)点的路径对应一个由 m 个 x，n 个 y 组成的一个排列：$\underbrace{xxy\cdots xy}_{m\text{个}x,n\text{个}y}$。反之，$m$ 个 x，n 个 y 的任一排列对应一条从(0,0)到(m,n)的路径，所以从(0,0)点到(m,n)点的路径和 m 个 x，n 个 y 的排列一一对应，故所求的路径数为 $C_{m+n}^{m}=\dfrac{(m+n)!}{m!\,n!}$。

3.2.3 有重复的组合

先看下面允许重复的组合实例。

例 3.19 从包含苹果、橙子和梨的篮子里选 4 个水果。如果选择水果的顺序无关，且只关心水果的类型而不管是该类型的哪一个水果，那么当篮子中每类水果至少有 4 个时，有多少种选法？

解：为了求解这个问题，我们列出选择水果的所有可能的方式。

令用 a 表示苹果，b 表示橙子，c 表示梨，共有以下 15 种方式。

aaaa，*aaab*，*aaac*，*aabb*，*aabc*，*aacc*，*abbb*，*abbc*，*abcc*，*accc*，*bbbb*，*bbbc*，*bbcc*，*bccc*，*cccc*。

这个解是从 3 个元素的集合$\{a,b,c\}$中允许重复的 4-组合数。

为求解这种类型的更复杂的计数问题，我们需要计数一个 n 元素集合的 r-组合的一般方法。在例 3.20 中，将给出这一方法。

例 3.20 从包含 1 元、2 元、5 元、10 元、20 元、50 元、100 元的钱袋中选 5 张纸币，有多少种方式？假设不管纸币被选的次序，同种币值的纸币都是不加区别的，并且至少每种纸币有 5 张。

解：因为纸币被选的次序是无关的且 7 种不同类型的纸币都可以最多选 5 次，问题涉及的是计数从 7 个元素的集合中允许重复的 5-组合数。列出所有的可能情况是乏味的，因为存在许多解。下面给出一种方法来计数允许重复的组合数。

假设一个零钱盒子有 7 个间隔，每格保存一种纸币，如图 3.4 所示。

1 元	2 元	5 元	10 元	20 元	50 元	100 元

图 3.4 零钱盒子示意图

这些间隔被 6 块隔板分开，每选择 1 张纸币就对应于在相应的隔板里放置 1 个标记。

图 3.5 针对选择 5 张纸币的 3 种不同方式给出了这种对应，其中的竖线表示 6 个隔板，

星表示 5 种纸币。

1 张		2 张			2 张	
1 元	2 元	5 元	10 元	20 元	50 元	100 元

*　|　|　**　|　|　|　**　|

	3 张		1 张			1 张
1 元	2 元	5 元	10 元	20 元	50 元	100 元

|　***　|　|　*　|　|　|　*

		1 张		2 张	1 张	1 张
1 元	2 元	5 元	10 元	20 元	50 元	100 元

|　|　*　|　|　**　|　*　|　*

图 3.5　5 张纸币的 3 种不同方式示意图

选择 5 张纸币的方法数对立于安排 6 条竖线和 5 颗星的方法数，因此选择 5 张纸币的方法数就是从 11 个可能的位置选 5 颗星位置的方法数。这对应于从含 11 个物体的集合中无序地选择 5 个物体的方法数，可以有 C_{11}^5 种方式。

因此存在 $C_{11}^5=\dfrac{11!}{5!\,6!}=462$ 种方式从有 7 类纸币的袋中选择 5 张纸币。

定理 3.7　从 n 个元素的集合中允许重复的 r 组合有 C_{n+r-1}^r 个。

证明略。

例 3.21　方程 $x_1+x_2+x_3=11$ 有多少个解？其中 x_1,x_2,x_3 是非负整数。

解：方程 $x_1+x_2+x_3=11$ 的一个解对应从 3 个元素集合中允许重复地选 11 个元素的一种方式，以使得 x_1 为选自第一类的个数，x_2 为选自第二类的个数，x_3 为选自第三类的个数，因此解的个数就是 3 个元素集合允许重复的 11-组合数。根据定理 3.7，其值为 $C_{3+11-1}^{11}=C_{13}^{11}=78$。

思考：若添加限制，当变元满足 $x_1\geqslant1,x_2\geqslant2,x_3\geqslant3$ 的整数时，解的个数？

例 3.22　在下面的伪码被执行后 k 的值是多少？

```
k = 0;
for(i1 = 1; i1 <= n; i1++)
    for(i2 = 1; i2 <= i1; i2++)
          …
          for(im = 1; im <= im-1; im++)
              k++;
```

解：k 的初值是 0，且对于一组满足 $1\leqslant i_m\leqslant i_{m-1}\leqslant\cdots\leqslant i_1\leqslant n$ 的整数 $i_1,i_2,\cdots,i_m$，每次执行这个嵌套循环时 k 的值加 1，这种整数的组数是从 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中允许重复地选择 m 个整数的方式数(因为一旦这组整数选定以后，如果按非降序排列它们，这就唯一地确定了一组对 $i_m,i_{m-1},\cdots,i_1$ 的赋值；相反，每个这样的赋值对应了一个唯一的无序集合)。所以由定理 3.7 得出代码被执行后 $k=C_{n+m-1}^m$。

定理 3.8　r 个无区别的小球放进 n 个有标志的盒子中，每个盒子可多于 1 个，则共有 C_{n+r-1}^r 种不同方式。

证明略。

例 3.23 试问$(x+y+z)^4$有多少项？

解：这个问题可对应于将 4 个无区别的球放进 3 个有标志的盒子的方法数(因为这个式子的展开式中每项的指数和为 4，分别分配到三个变量上，如：x^2yz 相当于放两个球到标志为 x 的盒子，各放一个球到标志为 y 和 z 的盒子)。根据定理 3.8 $r=4$，$n=3$ 的方法数为：$C_{n+r-1}^{r}=C_{3+4-1}^{4}=15$。

3.3 生成排列和组合

本章前几节已经描述了各种类型的排列和组合的计数方法，但是有时需要生成排列和组合，而不仅仅是计数。例如以下 3 个问题：

(1) TSP 问题，假设一个销售商必须访问 6 个城市，应该按照什么顺序访问这些城市而使得总的旅行时间最少？确定最好顺序的一种方法就是确定 $6!=720$ 种不同顺序的访问时间并且选择具有最小旅行时间的访问顺序。

(2) 假定 6 个数的集合中某些数的和是 100。找出这些数的一种方法就是生成集合的所有 $2^6=64$ 个子集并且检查它们的元素和。

(3) 假设一个实验室有 95 个雇员，一个项目需要一组 12 人组成的有 25 种特定技能的雇员(每个雇员可能有一种或多种技能)。找出这组雇员的一种方法就是找出所有的 12 个雇员的小组，然后检查他们是否有所需要的技能。

这些例子都说明为了求解问题常常需要生成排列和组合。

3.3.1 生成排列

任何 n 元素集合可以与集合$\{1,2,\cdots,n\}$建立一一对应。可以如下列出任何 n 元素集合的所有排列：生成 n 个最小正整数的排列，然后用对应的元素替换这些整数。现在已经有许多不同的算法来生成这个集合的 $n!$ 个排列。下列要描述的算法是以$\{1,2,\cdots,n\}$的排列集合的字典顺序为基础的。按照这个顺序，如果对于某个 k，$1\leqslant k\leqslant n$，$a_1=b_1$，$a_2=b_2$，$\cdots$，$a_{k-1}=b_{k-1}$，$a_k<b_k$，那么排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 在排列 $b_1b_2\cdots b_n$ 的前边。换句话说，如果在 n 个最小正整数集合的两个排列不等的第一位置，一个排列的数小于第二个排列的数，那么这个排列按照字典顺序排在第二个排列的前边。

例如：集合$\{1,2,3,4,5\}$的排列 23415 在排列 23514 的前边，因为这两个排列的前两位相同，但第一排列的第三位是 4，小于第二排列的第三位数 5。类似的，排列 41532 在排列 52143 的前边。

生成$\{1,2,\cdots,n\}$的排列的算法基础是从一个给定排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 按照字典顺序构成下一个排列的过程，具体描述如下。

首先，假设最后两位 $a_{n-1}<a_n$，交换 a_{n-1} 和 a_n 可以得到一个更大的排列而且没有任何一个排列既大于原来的排列而又小于这个通过交换 a_{n-1} 与 a_n 得到的排列，例 234156 后面的排列为 234165。

另一方面，如果 $a_{n-1}>a_n$，那么由交换这个排列中的最后两项不可能得到一个更大的排

列。此时可以看排列中的最后3个整数，如果$a_{n-2}<a_{n-1}$，那么可以重新安排这后3个数而得到下一个更大的排列。在a_{n-1}和a_n中找一个大于a_{n-2}的较小数，先把这个数放在位置$n-2$上，然后把剩下的那个数和a_{n-2}按照递增的顺序放到最后的两个位置上。例在234165的下一个更大的排列是234516，235461的下一个更大的排列是235614。

但是，如果$a_{n-2}>a_{n-1}>a_n$，那么不可能由安排在这个排列的最后三项而得到下一个更大的排列。基于这个观察，可以描述一个一般的方法，对于给定的排列$a_1a_2\cdots a_n$，依据字典顺序来生成下一个更大的排列：

首先找到整数a_j和a_{j+1}，使得$a_j<a_{j+1}$，且$a_{j+1}>a_{j+2}>\cdots>a_n$，即在这个排列中的最后一对相邻的整数，使得这个对的第一个整数小于第二个整数，然后把$a_{j+1},a_{j+2},\cdots,a_n$中大于$a_j$的最小的整数放到第$j$个位置，再按照递增顺序从位置$j+1$到$n$列出$a_j,a_{j+1},\cdots,a_n$中其余的整数，这就得到依照字典顺序的下一个更大的排列。容易看出，没有其他排列大于$a_1a_2\cdots a_n$而小于这个新生成的排列。

例3.24　在362541后面按照字典顺序的下一个更大排列是什么？

解：使得$a_j<a_{j+1}$的最后一对整数是a_3和a_4($a_3=2,a_4=5$)，排列在a_3右边大于a_3的最小整数是$a_5=4$。因此交换a_3与a_5的位置。后三个数字依递增顺序排列，即125。于是得下一排列为364125。

为生成整数$1,2,\cdots,n$的$n!$个排列，按照字典顺序由最小的排列，即$123\cdots n$开始，连续施用$n!-1$次生成下一个更大排列的过程，就得到n个最小整数按字典顺序的所有排列。

例3.25　按字典顺序生成整数1,2,3,4的排列。

解：从1234开始，交换4,3得下一个排列1243。下一步，由于4>3，2< 4，把3,4中大于2的最小数3放在第二位，后两位按递增序放置，得1324。依次类推，得到：

1234→1243→1324→1342→1423→1432
→2134→2143→2314→2341→2413→2431
→3124→3142→3214→3241→3412→3421
→4123→4132→4213→4231→4312→4321

下面算法为在给定排列不是最大排列$n,n-1,\cdots,1$时，在它的后面按照字典顺序找到下一个更大排列的过程。

算法3.3.1

```
void nextpermutation(int a[1…n])
//a₁a₂…aₙ 存储在数组 a 中
{
    j = n - 1;
    while(a[j]> a[j + 1]) j -- ;
        //使得 j 是 aⱼ < aⱼ₊₁ 的最大下标
    k = n;
    while(a[j]> a[k]) k -- ;
        //aₖ 是在 aⱼ 的右边大于 aⱼ 的最小正整数
    swap(a[j],a[k]);        //互换 aⱼ,aₖ
    r = n;
    s = j + 1;
```