第 3 章　方程与方程组

解方程对我们来说已经是老问题了，从小学最简单的设未知数 x 来求解方程，到初中求解方程组，到高中求解抛物线的零点，都是解方程里面的问题. 方程的发展无非就是有两个方向：一是未知数的次数在不断增加，比如一元三次方程、一元四次方程等更高次数的方程；还有就是未知数个数的增加，比如二元一次方程组、三元一次方程组等更多未知数的方程组. 本章就从这两个不同的方面来谈方程组. 首先从次数增加的方面来看.

3.1　一元多次方程

解方程对我们大家来说绝对不陌生，从小学就开始求解一元一次方程 $ax+b=0$，到初中求解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，它们的解法和公式都是我们所熟悉的，比如一元二次方程的根就是 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. 可是我们却没有接触过一元三次方程、一元四次方程等更高次数的方程的求根公式，这一章就来追着这个问题来跑：如何求出一元三次方程、一元四次方程等更高次数的方程的求根公式.

在找到求根公式之前，我们首先要来考虑的一个问题就是方程在实数空间上一定有根吗？这里需要注意，我们考虑的是实数空间，因为在第 1 章我们只把空间扩张到了实数空间. 那么可以先回答大家，对于一元三次方程在实数空间内肯定有一个实数根，而一元四次方程可能就没有，比如 $x^4+1=0$，在实数空间就没有根. 如果我们将实数空间扩张到了复数空间，就会有下面非常好的结果.

定理 3-1　(复系数多项式因式分解定理)每个次数大于等于 1 的复系数多项式在复数域上都可以唯一地分解成一次因式的乘积. 这就说明了每个 n 次复系数多项式恰有 n 个复根(重根按重数计算).

定理 3-1 虽然肯定了 n 次方程有 n 个复根，但是并没有给出根的一个具体求法，高次方程求根的问题还是远远没有解决. 那么，我们在这里不去讨论复数空间上的解，因为要想了解复数空间，还需要大量的数学知识，有兴趣的同学可以去参考《复变函数》这本书.

这里我们主要讨论实数空间上的根，前面已经说过了对于一元三次方程在实数空间内肯定有一个实数根，而一元四次方程可能就没有. 那么为什么一元三次方程在实数空间内肯定有一个实数根呢？我们先来解决这个问题，然后再来告诉大家这个实数根该如何来求.

3.1.1　连续

我们首先来解释一个概念：函数的连续性. 说到连续，给我们的感觉就是连绵不绝的意思，比如我们说远处的山是连绵的，我们的皮肤是连续的，不然就会流血了. 我们只是这样直观上去理解连续的. 对于函数的连续性，简单的一句话就是：一笔画出这个函数的图像来. 如果我们把笔放在纸上，没有挪开，如果能一次画出这个函数的图像，那么这个函数就是连

续的，比如 $y=\sin x$，$y=x^2$，我们都可以一笔将它们的图像给画出来．可是如何用数学的语言来精确性地定义连续呢？要解决这个问题，我们不妨从连续的反面来入手，连续的反面就是间断，我们先来研究函数间断的情况，等到把间断研究清楚了，连续自然也就能清楚了．下面我们就来看间断的情况有哪些．

（1）函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 没有定义，那么 $y=f(x)$ 肯定在 x_0 断开，比如：$y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处是断开的，如图 3-1 所示．所以我们要想找到一个函数的间断点，首先就来看这个函数在哪些点没有定义．

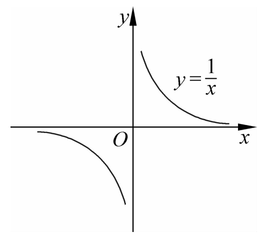

图　3-1

（2）如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 有定义了，是不是就连续呢？不一定，如果函数 $y=f(x)$ 在 x_0 没有极限，依然是间断的．例如，函数

$$y=f(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

在点 $x_0=0$ 处有定义，可是 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在，如图 3-2 所示．

（3）如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 不仅有定义，而且极限也存在，那么是不是就连续呢？不一定，如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 的极限值不等于在 x_0 的函数值，依然是断开的，例如

$$y=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & x\neq1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

首先 $y=f(x)$ 在点 $x_0=1$ 处有定义，其次有

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

因此 $y=f(x)$ 在点 x_0 的极限值存在，但是这个极限值不等于函数值，所以还是断开的，如图 3-3 所示．

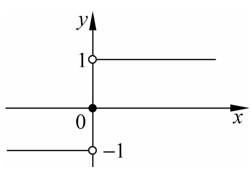

图　3-2

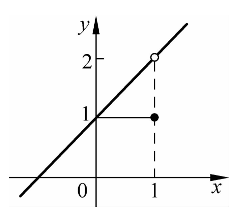

图　3-3

好了，现在我们再加强条件，如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 不仅有定义，而且极限也存在，并且这个极限值还等于这点的函数值，那么函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 是否就连续呢？回答是肯定的，一定连续，这就是连续的定义．

定义 3-1　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域上有定义，如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在，且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续．

我们前面学习过自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$ 与函数的增量 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$，那么上述极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 就可以化成 $\lim\limits_{x-x_0\to 0}[f(x)-f(x_0)]=0$，也就是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，因此连续的定义又可以叙述如下.

定义 3-2 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域上有定义，如果当自变量的增量 $\Delta x\to 0$ 时，函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\to 0$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续.

我们知道 $x\to x_0$ 有两种方式：$x\to x_0^+$ 和 $x\to x_0^-$，因此从连续的定义出发又产生了另外两个定义.

定义 3-3 如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 右连续.

定义 3-4 如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 左连续.

如果函数 $f(x)$ 在区间上的每一点处都连续，就说 $f(x)$ 在该区间上连续. 如果区间还包含两个端点，即闭区间，则函数在右端点连续是指左连续，在左端点连续是指右连续.

对于我们在 2.1 节所讲的基本初等函数和初等函数的连续性都是满足：基本初等函数和初等函数在其定义区间上是连续的.

例 3-1 证明函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

证明：设 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，当自变量 x 在点 x_0 处有增量 Δx 时，函数的增量

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^3-x_0^3=3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$$

因为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3]=0$$

所以 $y=x^3$ 在点 x_0 连续. 又因为 x_0 是区间 $(-\infty,+\infty)$ 内任意一点，所以函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

证毕.

3.1.2 闭区间上连续函数的性质

好了，有了连续之后，我们开始研究连续的性质，有了连续的性质之后，就可以来解决我们前面提出的问题了：为什么一元三次方程在实数空间内肯定有一个根？下面几个定理的证明要用到更多的实数理论，这里我们只用几何直观来解释它们的意义.

定理 3-2 在闭区间上连续的函数一定在该区间取得最大值和最小值.

这就是说，若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则必有 $\xi_1\in[a,b]$，使得 $\forall x\in[a,b]$，有 $f(x)\leqslant f(\xi_1)$，$f(\xi_1)$ 便是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值. 同样有 $\xi_2\in[a,b]$，使得 $f(x)\geqslant f(\xi_2)$，$f(\xi_2)$ 便是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值，如图 3-4 所示.

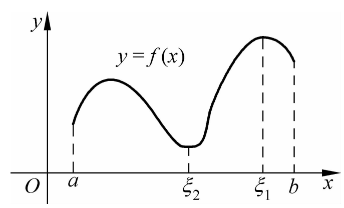

图 3-4

由这个定理可以得到下面推论.

推论 3-1 闭区间上的连续函数在该区间上有界.

例如，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 上连续，其最大值是 $f(1)=1$，最小值是 $f(2)=\dfrac{1}{2}$.

注意：(1)“闭区间”这个条件不可以少，若改成开区

间，定理 3-2 的结论则不一定成立，比如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在半开区间(1,2]内就没有最大值.

(2) 若函数在闭区间内有间断点，定理 3-2 结论也不一定成立，例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

在闭区间[−1,1]上没有最小值，如图 3-5 所示.

定理 3-3(介值定理)　设函数 $y=f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，且在这个区间上，函数的最小值是 m，最大值是 $M(M\neq m)$，任给 μ，$m<\mu<M$，则在开区间(a,b)内至少有一点 ξ 存在，使得 $f(\xi)=\mu$.

定理 3-3 的几何意义就是 $y=f(x)$ 的图形与直线 $y=m$ 和 $y=M$ 之间的任何一条水平直线至少相交一次.

推论 3-2(零点定理)　若 $y=f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则在开区间(a,b)内至少存在一点 ξ 存在，使得 $f(\xi)=0$.

如图 3-6 所示，如果 $f(\xi)=0$，则点 ξ 叫做函数 $y=f(x)$ 的零点. 当然也就是我们所说的 $f(x)=0$ 这个方程的根了.

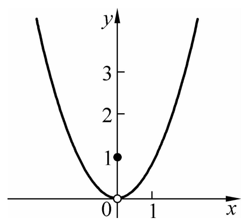

图　3-5

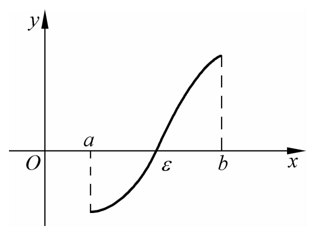

图　3-6

推论 3-2 给出了一个判断一个连续函数在哪个区间有根的方法.

例如，函数 $f(x)=x^3-x+5$ 在闭区间[−2,0]上连续，有 $f(-2)=-1<0$，$f(0)=5>0$，由零点定理，在(−2,0)内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$，也就是说，方程 $x^3-x+5=0$ 在区间(−2,0)内至少有一个根 ξ.

3.1.3　一元三次方程

现在我们开始讨论一元三次方程：$ax^3+bx^2+cx+d=0$. 将方程两边同时除以 a，就可以将其最高次 x^3 的系数变成 1. 所以我们不妨将一元三次方程的标准形式记为 $x^3+ax^2+bx+c=0$. 我们设 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，只要找到这个函数 $f(x)$ 的零点就可以了. 根据前面学习的函数极限在自变量趋向于无穷大的情况，可以得到

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^3+ax^2+bx+c)=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}\right)=+\infty$$

所以 $\exists M>0$，使得 $f(M)>0$. 另外：

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3+ax^2+bx+c)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}\right)=-\infty$$

所以 $\exists N<0$，使得 $f(N)<0$，又由于 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 在$[N,M]$上肯定是连续的，所以根据零点定理，$\exists\xi\in(N,M)$，使得 $f(\xi)=0$，因此 ξ 就是一元三次方程 x^3+ax^2+

$bx+c=0$ 的根，这就说明了前面提到的一元三次方程在实数空间肯定有一个实数根. 好了，到这里知道一元三次方程肯定有实数根，可是怎么来求它的根呢？当然另外两个根可能是实数根也可能不是. 这里给大家介绍一个方法，是由著名的数学家卡尔丹诺提出来的.

前面分析了一元三次方程都可以表示成

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

首先来一个代换，令 $x=y-\frac{a}{3}$，代入上式，化简得

$$y^3+py+q=0 \tag{3-1}$$

式中：$p=b-\frac{a^2}{3}$；$q=c+\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}$. 所以经过这样一个化简，可以知道所有一元三次方程均可化为无二次项的方程. 因此只要来讨论这个无二次项的一元三次方程(3-1)就可以了.

而求解三次方程的关键就是想尽办法来寻找出它的一个根，剩下就是一个一元二次方程了，也就容易求解了. 因此不妨假设已经知道了其中的一个根. 设 y_1 是方程(3-1)的根，即

$$y_1^3+py_1+q=0$$

上面的过程大家都很容易想到，而下面这步就是关键所在. 现在来讨论方程：$t^2-y_1t-\frac{p}{3}=0$. 设这个方程的两个根是 α 与 β，则根据二次方程根与系数的关系，可以得到

$$\alpha+\beta=y_1$$

$$\alpha\beta=-\frac{p}{3}$$

于是 $\alpha+\beta$ 是方程(3-1)的根，带入之后得到

$$(\alpha+\beta)^3+p(\alpha+\beta)+q=0$$

展开得

$$\alpha^3+\beta^3+(3\alpha\beta+p)(\alpha+\beta)+q=0$$

由于 $\alpha\beta=-\frac{p}{3}$，知道 $3\alpha\beta+p=0$，所以

$$\alpha^3+\beta^3=-q$$

$$\alpha^3\beta^3=-\frac{p^3}{27}$$

所以再根据二次方程根与系数的关系，所以 α^3 与 β^3 是一元二次方程

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0$$

的两个根. 根据一元二次方程求根公式，得到

$$z=\frac{-q\pm\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

于是就可以得到 α，β：

$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$\beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

于是就可以解出来

$$y_1=\alpha+\beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

这样就可以求解出一元三次方程的一个根了，而另外两个根，只须再利用因式分解，就可以求出来.

例 3-2　解方程 $x^3+3x^2-9x+5=0$.

解：用 $x=y-1$ 代换，得 $y^3-12y+16=0$.

这时，$p=-12$，$q=16$，代入公式可以解出 $y_1=-4$，所以可以得到原方程的一个根 $x_1=-5$. 为了因式分解，需要用到多项式的除法

$$\frac{x^3+3x^2-9x+5}{x+5}=x^2-2x+1$$

所以
$$x^3+3x^2-9x+5=(x+5)(x^2-2x+1)$$

这样分解完，就很轻松解出原方程的 3 个根为：$x_1=-5$，$x_2=x_3=1$.

3.1.4　一元四次方程

一元四次方程的求根公式要复杂得多，这里我们只是给大家指出求解的具体方式，具体的解的分析不再给出.

一元四次方程的求解和一元三次方程的求解有类似的地方. 主要目的还是先求解出一个根，然后利用因式分解就可以将一元四次方程变成一元三次方程，利用前面一元三次方程的知识就可以求出所有的根了. 首先可以将最高次的系数化为 1，这样更方便后面的分析. 同样可以利用代换，消掉三次项.

设实数系数一元四次方程为 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$，利用代换 $x=y-\frac{a}{4}$ 消去 x^3，得

$$y^4+py^2+qy+r=0 \tag{3-2}$$

在方程(3-2)中加上一个参数 α，得到

$$y^4+py^2+qy+r=\left(y^2+\frac{p}{2}+\alpha\right)^2+qy+r-\frac{p^2}{4}-\alpha^2-2\alpha y^2-p\alpha=0$$

$$\left(y^2+\frac{p}{2}+\alpha\right)^2-\left(2\alpha y^2-qy+\alpha^2+p\alpha-r+\frac{p^2}{4}\right)=0$$

在这里取 α 使得后面部分方括号里是完全平方项，根据对一元二次方程的认识，知道这是方括号里面的一元二次方程的判别式 $\Delta=0$，即

$$q^2-4\times 2\alpha\left(\alpha^2+p\alpha-r+\frac{p^2}{4}\right)=0 \tag{3-3}$$

方程(3-3)除 α 外均为已知数，所以方程(3-3)明显是关于 α 的一个一元三次方程，而前面已经求过一元三次方程的根了，所以 α 是一个一元三次方程的根，因此 α 可以求出. 如果 α_0 是方程(3-3)的一个根，则

$$\left(x^2+\frac{p}{2}+\alpha_0\right)^2-2\alpha_0\left(x-\frac{q}{4\alpha_0}\right)^2=0$$

即

$$x^2+\frac{p}{2}+\alpha_0=\pm\sqrt{2\alpha_0}\left(x-\frac{q}{4\alpha_0}\right)$$

这样原方程变为解一元二次方程了,因此原来方程的解就可以由此方程解出来.

大家要注意这里 α_0 的求法有 3 种,而且 $\sqrt{2\alpha_0}$ 又有两个解,这样子就会得到 12 个解,当然要舍去 8 个,这里我们就不再多讲了,只是给大家讲出一元四次方程根的求法的思想.

接下来就要思考一元五次、一元六次方程等更高次方程根的求法.这里我可以肯定地告诉大家,伟大的数学家伽罗瓦已经告诉我们,对于次数大于等于 5 次的一元方程,一般并不存在根式解,即不会有求根公式.如果大家有兴趣,可以学习"近世代数"这门课程.

对于一元的方程我们就讲这么多,现在开始解决多元一次方程组的问题.

3.2 多元一次线性方程组

我们大约是在初中开始学习解方程组的,从最开始的二元一次方程组到后来的多元一次方程组,而在以前我们的解法基本上都是想办法通过方程组之间的化简将未知数的个数降低,最后一个一个地解出来.这种方法显得没有一定规律性而且还要因不同的题目来进行化简,更可怕的就是随着未知数个数的增加,这种方法变得很难操作,因此我们就要采用别的办法来解决.我们尽量使我们的方法不仅求解方便,便于计算,而且更有普及性和规律性.现在我们就开始追着方程组的一般解法跑吧.

3.2.1 行列式

下面从最简单的二元一次方程组入手

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}\tag{3-4}$$

下面来解这个方程组,通过消元可以知道当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,方程有解

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\\[2ex]x_2=\dfrac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\end{cases}$$

好了,走到这里我们也就知道,对于二元一次方程组要是存在解,必须要求 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$.下面我们来分析这个方程的两个解,我们发现无论是分子部分还是分母部分,在方程中都对应了一个十字交叉相乘然后相减的结构,于是为了更好地去记住二元一次方程组解的结构,我们引进二阶行列式的定义.

定义 3-5 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,称这个结构为二阶行列式.

于是二元一次方程组(3-4)的解就可以用二阶行列式表示出来

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\[2em]
x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}
\end{cases}
$$

仔细看一下就可以看出规律来，分母部分都是由未知数前面的系数所构成的行列式.分子部分行列式的特点是：求的是哪个未知数，就用等号右边的常数项来替换掉这个未知数的系数，其余未知数的系数不变.

为了便于后面的理解，记

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}
$$

于是二元一次线性方程组(3-4)的解就可以表示为

$$
x_1 = \frac{D_1}{D},\quad x_2 = \frac{D_2}{D}
$$

例 3-3　用行列式求解二元一次方程组

$$
\begin{cases}
2x_1 - x_2 = 5 \\
3x_1 + 2x_2 = 11
\end{cases}
$$

解：

$$
D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7,\quad D_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = 21,\quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 7
$$

所以

$$
x_1 = \frac{D_1}{D} = 3,\quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 1
$$

二元一次方程组我们解决了，现在来看三元一次方程组.

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3
\end{cases} \tag{3-5}
$$

对于方程(3-5)依然可以采用过去的消元法来求，让我们来看一下求出来的结果吧.

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{32}a_{13} + b_3a_{12}a_{23} - b_1a_{23}a_{32} - b_2a_{12}a_{33} - b_3a_{22}a_{13}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}} \\[1em]
x_2 = \dfrac{b_1a_{31}a_{23} + b_2a_{11}a_{33} + b_3a_{21}a_{13} - b_1a_{21}a_{33} - b_2a_{13}a_{31} - b_3a_{23}a_{11}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}} \\[1em]
x_3 = \dfrac{b_1a_{21}a_{32} + b_2a_{12}a_{31} + b_3a_{11}a_{22} - b_1a_{22}a_{31} - b_2a_{32}a_{11} - b_3a_{12}a_{11}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}
\end{cases}
$$

当我们看到第一眼时，开始惊讶了，不过你千万不要放弃，因为这个里面有个秘密，请读者朋友一定要记住，当我们追着问题跑的时候，请不要中途放弃，解数学问题往往具有“山重水复疑无路，柳暗花明又一村”的特点.就像上面我们求出来的解的结果，让我们来分析，先

来看分母,分母都是一样的,而且都和未知数的系数有关系,可能这个关系不像前面的二元一次方程组那么简单地能看出来,不过细致分析后,依然能够找出来;再来看分子部分,求哪个未知数,那个未知数的系数没有了,而是被等号右边的常数项给替换掉了.比如我们求 x_1,我们只要将分母中 x_1 的系数用等号右边相应的常数项给替换掉,就可以得到分子了.所以这种关系和我们前面的二元一次方程组很类似.因此我们可以给出三阶行列式的定义.

定义 3-6

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

这个结构我们就称为三阶行列式.

从定义可以看出,三阶行列式不过是一些乘积的代数和,而每一项乘积都是由行列式中位于不同的行和不同的列的元素构成的,并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成.而且我们看出前面是正号的都是朝右划斜线,前面带负号的都是朝左划斜线,如图 3-7 所示.

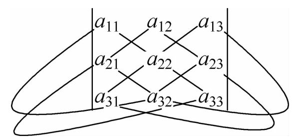

图 3-7

我们将 a_{11}, a_{22}, a_{33} 构成的对角线叫做主对角线;将 a_{13}, a_{22}, a_{31} 构成的对角线叫做次对角线.

好了,方程(3-5)解的分母部分就可以用由未知数的系数构成的三阶行列式来替换掉,设系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

而对于分子部分,经过上面的分析,求哪个未知数,只需要用等号右边的常数项来换掉这个未知数的系数,因此

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

那么三元一次方程组的解就可以写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

由此我们可以看出,要想求出三元一次方程组的解,不用像我们以前那样针对不同的题目进行消元了,而是只要将我们的目光放在求解三阶行列式上就可以了,只要我们能很轻松顺手地解出行列式,也就能很轻松地解出三元一次方程组.那我们余下的目光就放在如何更加简单地求解三阶行列式上.首先来熟悉一下一般的解法吧.

例 3-4 求解下列三阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$

解：

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\times4\times5+(-3)\times(-2)\times(-1)+7\times3\times2-7\times4\times(-1)-(-3)\times3\times5-1\times(-2)\times2=133$$

(2)

$$\begin{vmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc+0+0-0-0-0=abc$$

例 3-5　用行列式解三元一次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3 \\ -2x_1+x_2-x_3=-3 \\ x_1-4x_2+2x_3=-5 \end{cases}$$

解： $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}=2+8-2-1+8-4=11$

$$D_1=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}=33$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}=11$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix}=-22$$

$$x_1=\frac{D_1}{D}=3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=1,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-2$$

我们根据上面的例 3-4 中的(2)题，想到了下面的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

这个行列式称为上三角行列式. 这个行列式特别容易计算，只需要主对角线上的元素相乘就可以. 于是我们想，如果所有的三阶行列式都能够化简成上三角行列式，那么计算起来就方便多了. 为了能够实现这个愿望，我们就要来研究行列式的性质. 这里我们要说明一下，以下研究的行列式的性质，不仅对于三阶行列式，对于高阶行列式也依然是成立的.