

第 3 章

离散傅里叶变换

3.1 引言

有限长序列在数字信号处理中占有很重要的地位。计算机只能处理有限长序列,前面讨论的傅里叶变换和 Z 变换虽然能分析研究有限长序列,但无法利用计算机进行数值计算。在这种情况下,可以推导出另一种傅里叶变换式,称作离散傅里叶变换(DFT)。离散傅里叶变换是有限长序列的傅里叶变换,它相当于把信号的傅里叶变换进行等频率间隔采样。离散傅里叶变换除了在理论上具有重要意义之外,由于存在快速算法,因而在各种数字信号处理的算法中,越来越起到核心的作用。

有限长序列的离散傅里叶变换(DFT)和周期序列的离散傅里叶级数(DFS)本质上是一样的。在讨论离散傅里叶级数与离散傅里叶变换前先回顾并讨论一下傅里叶变换的几种可能形式。

3.2 傅里叶变换的几种形式

傅里叶变换是建立以时间 t 为自变量的“信号”与以频率 f 为自变量的“频率函数”(频谱)之间的某种变换关系。所以“时间”或“频率”取连续值还是离散值,就形成各种不同形式的傅里叶变换对。

在深入讨论离散傅里叶变换 DFT 之前,先概述 4 种不同形式的傅里叶变换对。

3.2.1 连续时间、连续频率——连续傅里叶变换(FT)

这是非周期连续时间信号 $x(t)$ 的傅里叶变换,其频谱 $X(j\Omega)$ 是一个连续的非周期函数。这一变换对为

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (3-1)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (3-2)$$

这一变换对的示意图如图 3-1(a)所示。可以看出时域连续函数造成频域是非周期的谱,而时域的非周期造成频域是连续的谱。

3.2.2 连续时间、离散频率——傅里叶级数(FS)

这是周期(T_p)连续时间信号 $x(t)$ 的傅里叶变换,得到的是非周期离散频谱函数 $X(jk\Omega_0)$,这一变换对为

$$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \quad (3-3)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t} \quad (3-4)$$

其中, $\Omega_0 = 2\pi F = \frac{2\pi}{T_p}$ 为离散频谱相邻两谱线之间的角频率间隔, k 为谐波序号。

这一变换对的示意图如图 3-1(b) 所示, 可以看出时域的连续函数造成频域是非周期的频谱函数, 而频域的离散频谱就与时域的周期时间函数相对应。

3.2.3 离散时间、连续频率——序列的傅里叶变换(DTFT)

这是非周期离散时间信号的傅里叶变换, 得到的是周期性连续的频率函数。这正是第 2 章介绍的序列(离散时间信号)的傅里叶变换。这一变换对为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad (3-5)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (3-6)$$

其中, ω 是数字频率, 它和模拟角频率 Ω 的关系为 $\omega = \Omega T$ 。

这一变换对的示意图如图 3-1(c) 所示。可以看出时域的离散造成频域的周期延拓, 而时域的非周期对应于频域的连接。

3.2.4 离散时间、离散频率——离散傅里叶变换(DFT)

上面讨论的 3 种傅里叶变换对都不适用在计算机上运算, 因为它们至少在一个域(时域或频域)中函数是连续的。我们感兴趣的是时域及频域都是离散的情况, 这就是离散傅里叶变换。一种常用的离散傅里叶变换对可表示为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3-7)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3-8)$$

比较图 3-1(a)、图 3-1(b) 和图 3-1(c) 可发现有以下规律: 如果信号频域是离散的, 则表现为周期性的时间函数。相反, 在时域上是离散的, 则该信号在频域必然表现为周期性的频率函数。不难设想, 一个离散周期序列, 它一定具有既是周期又是离散的频谱, 其示意图如图 3-1(d) 所示。

由此可以得出一般的规律: 一个域的离散对应另一个域的周期延拓, 一个域的连续必定对应另一个域的非周期。表 3-1 对这 4 种傅里叶变换形式的特点作了简要归纳。

下面先从周期性序列的离散傅里叶级数开始讨论, 然后讨论可作为周期函数一个周期的有限长序列的离散傅里叶变换。

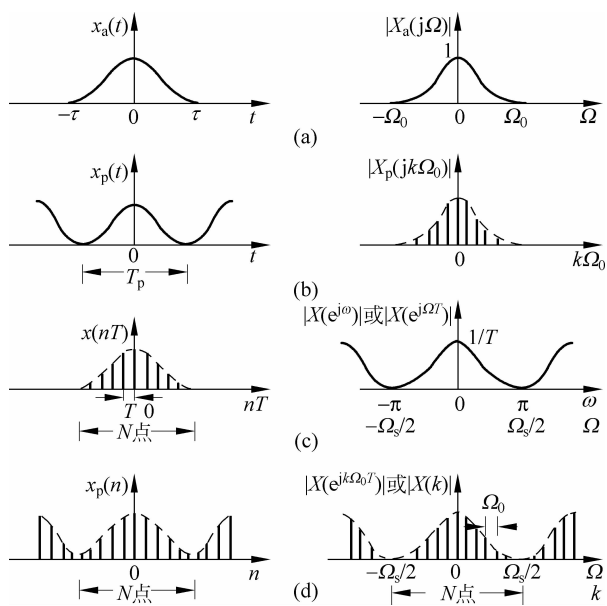


图 3-1 4 种形式的傅里叶变换对示意图

表 3-1 4 种傅里叶变换形式的归纳

时 间 函 数	频 率 函 数
连续和非周期	非周期和连续
连续和周期(T_p)	非周期和离散($\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$)
离散(T)和非周期	周期($\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$)和连续
离散(T)和周期(T_p)	周期($\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$)和离散($\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$)

3.3 离散傅里叶级数(DFS)

3.3.1 DFS 的定义

设 $\tilde{x}(n)$ 是一个周期为 N 的周期序列,即

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + rN), \quad r \text{ 为任意整数}$$

由于周期序列的数值随周期 N 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内周而复始地重复变化,因而在整个 z 平面内找不到一个合适的衰减因子 $|z|$,使周期序列绝对可和。即对于 z 平面内的任意 z 值,都有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(n)z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(n)| |z|^{-n} = \infty$$

所以,周期序列不能用 Z 变换表示。

但是,正如连续时间周期信号可以用傅里叶级数表示一样,离散周期序列也可以用离散

傅里叶级数表示,也就是用周期为 N 的复指数序列来表示。表 3-2 表示了连续周期信号与离散周期序列的复指数对比。

表 3-2 连续周期信号与离散周期序列的复指数对比

	基频序列	周期	基频	k 次谐波序列
连续周期	$e^{j\Omega_0 t} = e^{j(\frac{2\pi}{T_p})t}$	T_p	$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$	$e^{j(\frac{2\pi}{T_p})tk}$
离散周期	$e^{j\omega_0 n} = e^{j(\frac{2\pi}{N})n}$	N	$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	$e^{j(\frac{2\pi}{N})nk}$

可见,周期为 N 的复指数序列的基频序列为 $e_1(n) = e^{j\omega_0 n} = e^{j(\frac{2\pi}{N})n}$, k 次谐波序列为 $e_k(n) = e^{j(\frac{2\pi}{N})nk}$ 。

由于 $e^{j\frac{2\pi}{N}n(k+rN)} = e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$, 即 $e_{k+rN}(n) = e_k(n)$, 因而,离散傅里叶级数的所有谐波成分中只有 N 个是独立的,这点和连续傅里叶级数不同(后者有无穷多个谐波成分)。因此在展开成离散傅里叶级数时,我们只能取 N 个独立的谐波分量,否则将产生二义性。为方便起见,取 k 为 $0 \sim N-1$ 的 N 个独立谐波分量来构成 $\tilde{x}(n)$ 的离散傅里叶级数,即

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j(\frac{2\pi}{N})nk} \quad (3-9)$$

式中 $1/N$ 是习惯上采用的常数, $\tilde{X}(k)$ 是 k 次谐波的系数,为求解这个系数要利用以下性质,即

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(\frac{2\pi}{N})rm} = \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - e^{j(\frac{2\pi}{N})rN}}{1 - e^{j(\frac{2\pi}{N})r}} = \begin{cases} 1, & r = mN, m \text{ 为整数} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3-10)$$

将式(3-9)两端同乘以 $e^{-j\frac{2\pi}{N}rm}$, 并对从 $n=0 \sim N-1$ 的一个周期求和,得

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})rm} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-r)} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-r)} \right] = \tilde{X}(r)$$

将 r 换成 k 可得

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})nk} \quad (3-11)$$

这就是求 $k=0 \sim N-1$ 的 N 个谐波系数 $\tilde{X}(k)$ 的公式。

由于

$$\tilde{X}(k+rN) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})n(k+rN)} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})nk} = \tilde{X}(k)$$

所以 $\tilde{X}(k)$ 也是一个以 N 为周期的周期序列。因此,时域离散周期序列的离散傅里叶级数在频域上仍然是一个周期序列。习惯上采用以下符号

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

这样,式(3-9)和式(3-11)又可表示为

$$\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk} \quad (3-12)$$

$$\tilde{x}(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j(\frac{2\pi}{N})nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk} \quad (3-13)$$

其中,符号 $\text{DFS}[\cdot]$ 表示离散傅里叶级数正变换, $\text{IDFS}[\cdot]$ 表示离散傅里叶级数反变换。

式(3-12)和式(3-13)中的表达式求和时都只取 N 个序列值,这一事实说明一个周期序列虽然是无限长序列,但只要研究一个周期的性质,其他周期的性质也就知道了。因此周期序列与有限长序列有着本质的联系。

3.3.2 DFS 的性质

1. 线性

设 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{y}(n)$ 都是以 N 为周期的序列,并且

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k), \quad \text{DFS}[\tilde{y}(n)] = \tilde{Y}(k)$$

则

$$\text{DFS}[a\tilde{x}(n) + b\tilde{y}(n)] = a\tilde{X}(k) + b\tilde{Y}(k) \quad (3-14)$$

其中, a, b 为任意常数。

2. 移位特性

设

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k)$$

则

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n-m)] = W_N^{mk} \tilde{X}(k) \quad (3-15)$$

3. 周期卷积

设 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{y}(n)$ 都是以 N 为周期的序列,它们的离散傅里叶级数分别为 $\tilde{X}(k)$ 和 $\tilde{Y}(k)$,若

$$\tilde{F}(k) = \tilde{X}(k) \tilde{Y}(k)$$

则

$$\tilde{f}(n) = \text{IDFS}[\tilde{F}(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m) \tilde{y}(n-m) \quad (3-16)$$

这是一个卷积公式,但是和前面所讨论的线性卷积不同, $\tilde{x}(m)$ 和 $\tilde{y}(n-m)$ 都是变量 m 的周期函数,周期为 N ,因而乘积也是周期为 N 的周期函数,另外,卷积过程也只是在一个周期内进行,这类卷积通常称为周期卷积。在作这类卷积的过程中,当一个周期移出计算区间时,下一周期就移入计算区间。

周期卷积的过程可以用图 3-2 来说明,这是一个 $N=7$ 的周期卷积。每一个周期里 $\tilde{x}_1(n)$ 有一个宽度为 4 的矩形脉冲, $\tilde{x}_2(n)$ 有一个宽度为 3 的矩形脉冲,图中画出了对应于 $n=0,1,2$ 时的 $\tilde{x}_2(n-m)$ 。周期卷积过程中一个周期的某一序列值移出计算区间时,相邻的同一位置的序列值就移入计算区间。运算在 $m=0$ 到 $N-1$ 区间内进行,即在一个周期内将 $\tilde{x}_2(n-m)$ 与 $\tilde{x}_1(m)$ 逐点相乘后求和,先计算出 $n=0,1,\dots,N-1$ 的结果,然后将所得结

果周期延拓,就得到所求的整个周期序列 $\tilde{y}(n)$ 。

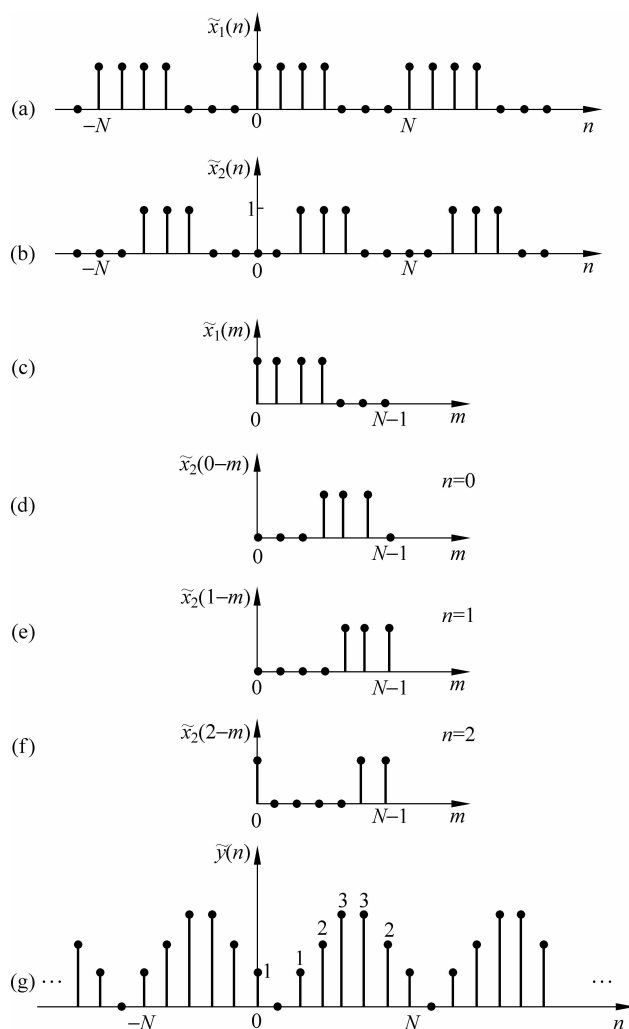


图 3-2 两个周期为 7 的序列的周期卷积

3.4 离散傅里叶变换

3.4.1 DFT 的定义

由上一节的讨论可知,周期序列实际上只有有限个序列值有意义,因而它和有限长序列有着本质的联系。本节将根据周期序列和有限长序列之间的关系,由周期序列的离散傅里叶级数表示式推导得到有限长序列的离散频域表示即离散傅里叶变换(DFT)。

1. 有限长序列和周期序列之间的关系

周期序列只有有限个序列值是独立的。对于长度为 N 的有限长序列,可以看成周期为 N 的周期序列的一个周期,这样利用离散傅里叶级数计算周期序列的一个周期,就相当于

计算了有限长序列。

设 $x(n)$ 为有限长序列, 长度为 N , 把它看成周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期, 而把 $\tilde{x}(n)$ 看成 $x(n)$ 以 N 为周期的周期延拓, 这样就建立了有限长序列 $x(n)$ 和周期序列 $\tilde{x}(n)$ 之间的联系, 即

$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

或

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) \quad (3-17)$$

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN) \quad (3-18)$$

上述关系如图 3-3 所示。习惯上把 $\tilde{x}(n)$ 的第一个周期 ($n=0$ 到 $N-1$) 定义为“主值区间”, 而主值区间上的序列称为“主值序列”, 所以 $x(n)$ 是 $\tilde{x}(n)$ 的“主值序列”。

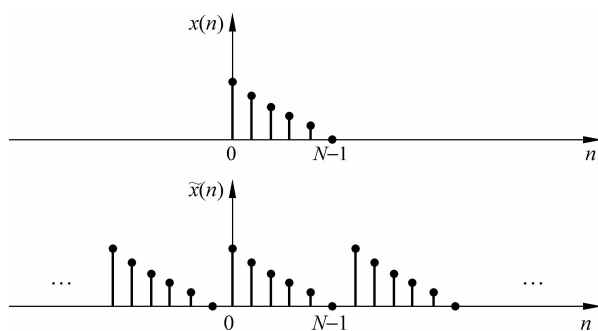


图 3-3 有限长序列及其周期延拓

对不同 r 值, $x(n+rN)$ 之间彼此并不重叠, 故式 (3-18) 也可写成

$$\tilde{x}(n) = x(n \bmod N) = x((n))_N \quad (3-19)$$

用 $((n))_N$ 表示 $(n \bmod N)$, 其数学上就是表示“ n 对 N 取余数”, 或称“ n 对 N 取模值”。令

$$n = n_1 + mN, \quad 0 \leq n_1 \leq N-1, m \text{ 为整数}$$

则 n_1 为 n 对 N 的余数。不管 n_1 加上多少倍的 N , 其余数皆为 n_1 , 即周期性重复出现的 $x((n))_N$ 数值是相等的。例如, $\tilde{x}(n)$ 是周期为 $N=8$ 的序列, 求 $n=19$ 和 $n=-2$ 两数对 N 的余数。

因为

$$n = 19 = 3 + 2 \times 8, \quad n = -2 = 6 + (-1) \times 8$$

所以

$$((19))_8 = 3, \quad ((-2))_8 = 6$$

因此 $\tilde{x}(19) = x((19))_8 = x(3)$, $\tilde{x}(-2) = x((-2))_8 = x(6)$ 。

同理, 频域周期序列 $\tilde{X}(k)$ 也可看成是对有限长序列 $X(k)$ 的周期延拓, 而有限长序列 $X(k)$ 看成周期序列 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列, 即

$$\tilde{X}(k) = X((k))_N \quad (3-20)$$

$$X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k) \quad (3-21)$$

2. 有限长序列的离散傅里叶变换

从DFS和IDFS的定义可以看出,求和运算只限定在 $n=0$ 到 $N-1$ 和 $k=0$ 到 $N-1$ 的主值区间内进行,因而完全适用于主值序列 $x(n)$ 与 $X(k)$ 。因此得到一个新的定义,这就是有限长序列的离散傅里叶变换:长度为 N 的有限长序列 $x(n)$,其离散傅里叶变换 $X(k)$ 仍然是一个长度为 N 的频域有限长序列,它们的关系为

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3-22)$$

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3-23)$$

长度为 N 的有限长序列和周期为 N 的周期序列,都是由 N 个值定义,但有一点需要记住,凡是谈到傅里叶变换关系之处,有限长序列都是作为周期序列的一个周期来表示的,都隐含有周期性的意思。

例 3-1 已知序列 $x(n)=\delta(n)$,求它的 N 点DFT。

解 单位脉冲序列的DFT很容易由DFT的定义式(3-22)得到

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n)W_N^{nk} = W_N^0 = 1$$

$\delta(n)$ 的 $X(k)$ 如图3-4所示。这是一个很特殊的例子,它表明对序列 $\delta(n)$ 来说,不论对它进行多少点的DFT,所得结果都是一个离散矩形序列。

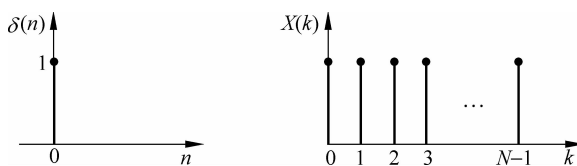


图 3-4 序列 $\delta(n)$ 及其离散傅里叶变换

在一般情况下, $X(k)$ 是一个复量,可表示为

$$X(k) = X_R(k) + jX_I(k)$$

或

$$X(k) = |X(k)|e^{j\theta(k)}$$

例 3-2 求有限长序列 $x(n)=\begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 的DFT,其中 $a=0.8, N=8$ 。

$$\text{解} \quad X(k) = \sum_{n=0}^{8-1} x(n)W_8^{nk} = \sum_{n=0}^7 a^n e^{-j\frac{2\pi}{8}nk} = \sum_{n=0}^7 (ae^{-j\frac{2\pi}{8}k})^n = \frac{1-a^8}{1-ae^{-j\frac{\pi}{4}k}}, \quad 0 \leq k \leq 7$$

因此得

$$X(0) = 4.16114$$

$$X(2) = 0.50746 - j0.40597$$

$$X(4) = 0.46235$$

$$X(6) = 0.50746 + j0.40597$$

$$X(1) = 0.71063 - j0.92558$$

$$X(3) = 0.47017 - j0.16987$$

$$X(5) = 0.47017 + j0.16987$$

$$X(7) = 0.71063 + j0.92558$$

例 3-3 已知序列 $x(n)=R_4(n)$, 求 $x(n)$ 的 8 点和 16 点 DFT。

解 设变换区间 $N=8$, 则

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{8-1} x(n) W_8^{nk} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{2\pi}{8}nk} \\ &= e^{-j\frac{3\pi}{8}k} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}k\right)}, \quad k=0,1,\dots,7 \end{aligned}$$

$$\text{设变换区间 } N=16, \text{ 则 } X(k) = \sum_{n=0}^{16-1} x(n) W_{16}^{nk} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{2\pi}{16}nk} = e^{-j\frac{3\pi}{16}k} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{16}k\right)}, k=0,$$

$1,\dots,15$, 由此可以看出, $x(n)$ 的 DFT 结果与变换区间长度 N 的取值有关。讨论完 DFT 与 Z 变换的关系及 DFT 的物理意义后, 上述问题就会得到解释。

3.4.2 DFT 和 Z 变换、DTFT 的关系

设序列 $x(n)$ 的长度为 N , 其 Z 变换和 DFT 分别为

$$\begin{aligned} X(z) &= Z[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} \\ X(k) &= \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned}$$

比较 Z 变换和 DFT, 可以看出, 当 $z=W_N^{-k}$ 时,

$$X(z) \big|_{z=W_N^{-k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \text{DFT}[x(n)]$$

即

$$X(k) = X(z) \big|_{z=W_N^{-k}}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3-24)$$

$z=W_N^{-k}=e^{j(\frac{2\pi}{N})k}$ 表明 W_N^{-k} 是 z 平面单位圆上幅角为 $\omega=\frac{2\pi}{N}k$ 的点, 也即将 z 平面单位圆 N 等分后的第 k 点, 所以 $X(k)$ 也就是 Z 变换在单位圆上的 N 点等间隔采样。

另外, 由于序列的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 就是单位圆上的 Z 变换, 根据式(3-24), DFT 与序列傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的关系为

$$X(k) = X(e^{j\omega}) \big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \quad (3-25)$$

式(3-25)说明, $X(k)$ 也可以看作序列 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样, 其采样间隔为 $\omega=\frac{2\pi}{N}$, 这就是 DFT 的物理意义。显而易见, DFT 的变换区间长度 N 不同, 表示对 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的采样间隔和采样点数不同, 所以 DFT 的变换结果也不同, 当 N 足够大时, $X(k)$ 的包络可逼近曲线 $X(e^{j\omega})$ 。DFT 与 Z 变换和序列傅里叶变换的关系如图 3-5 所示。

信号时域采样理论实现了信号时域的离散化, 使我们能用数字技术在时域对信号进行处理。而离散傅里叶变换理论实现了频域离散化, 因而开辟了用数字技术在频域处理信号的新途径, 从而推进了信号的频谱分析技术向更深更广的领域发展。

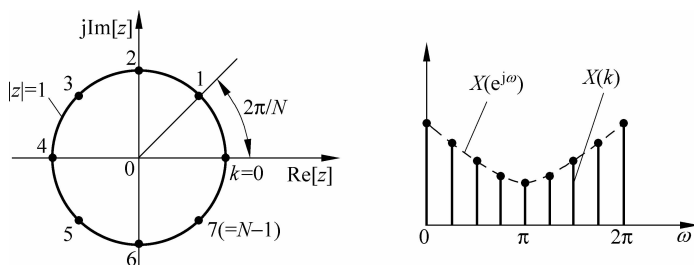


图 3-5 DFT 与 Z 变换和序列傅里叶变换 DTFT 的关系

3.4.3 DFT 的性质

本节讨论 DFT 的一些性质,它们本质上和周期序列的 DFS 概念有关,而且是由有限长序列及其 DFT 表示式隐含的周期性得出的。以下讨论的序列都是 N 点有限长序列,用 $\text{DFT}[\cdot]$ 表示 N 点 DFT,且设

$$\text{DFT}[x_1(n)] = X_1(k), \quad \text{DFT}[x_2(n)] = X_2(k)$$

1. 线性

$$\text{DFT}[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(k) + bX_2(k) \quad (3-26)$$

式中, a, b 为任意常数。该式可根据 DFT 定义证明。若两个序列长度不等,取长度最大者,将短的序列通过补零加长,注意此时 DFT 与未补零的 DFT 不相等。

2. 圆周移位

1) 圆周移位定义

一个有限长序列 $x(n)$ 的圆周移位是指用它的长度 N 为周期,将其延拓成周期序列 $\tilde{x}(n)$,将周期序列 $\tilde{x}(n)$ 移位,然后取主值区间 $(n=0 \sim N-1)$ 上的序列值。即一个有限长序列 $x(n)$ 的圆周移位定义为

$$y(n) = x((n+m))_N \cdot R_N(n) \quad (3-27)$$

一个有限长序列 $x(n)$ 的圆周移位序列 $y(n)$ 仍然是一个长度为 N 的有限长序列,圆周移位的过程可用图 3-6 来描述。

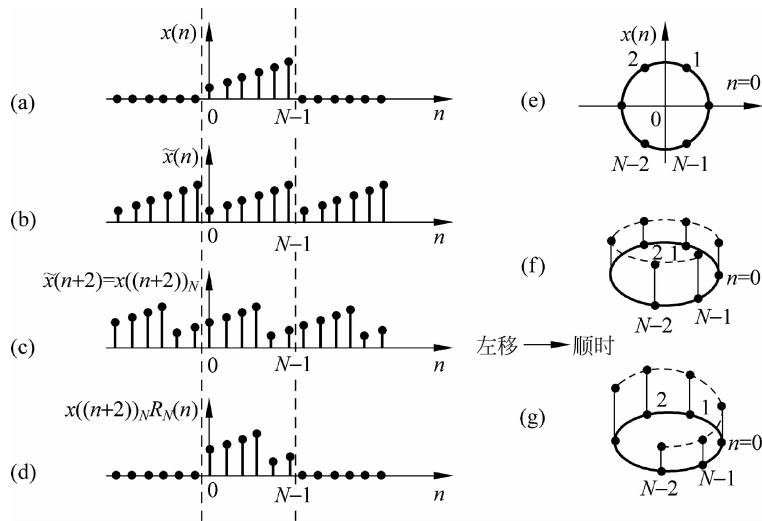
从图 3-6(c)可以看出,由于是周期序列的移位,当只观察 $0 \leq n \leq N-1$ 这一主值区间时,某一采样从该区间的一端移出时,与其相同值的采样又从该区的另一端循环移进。因而,可以想象 $x(n)$ 是排列在一个 N 等分的圆周上,序列 $x(n)$ 的圆周移位,就相当于 $x(n)$ 在此圆周上旋转,如图 3-6(e)、(f)、(g) 所示,因而称为圆周移位。若将 $x(n)$ 向左圆周移位时,此圆是顺时针旋转;将 $x(n)$ 向右圆周移位时,此圆是逆时针旋转。此外,如果围绕圆周观察几圈,那么看到的就是周期序列 $\tilde{x}(n)$ 。

2) 时域圆周移位定理

有限长序列圆周移位后的 DFT 为

$$Y(k) = \text{DFT}[x((n+m))_N R_N(n)] = W_N^{-mk} X(k) \quad (3-28)$$

证明 利用周期序列的移位特性

图 3-6 圆周移位过程示意图($N=6$)

$$\text{DFS}[x((n+m))_N] = \text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk} \tilde{X}(k)$$

序列取主值区间,变换也取主值区间,可得

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x((n+m))_N R_N(n)] &= \text{DFT}[\tilde{x}(n+m) R_N(n)] \\ &= W_N^{-mk} \tilde{X}(k) R_N(k) = W_N^{-mk} X(k) \end{aligned}$$

这表明,有限长序列的圆周移位,在离散频域中只引入一个和频率成正比的线性相移 W_N^{-mk} ,对频谱的幅度是没有影响的。

3) 频域圆周移位定理

对于频域有限长序列 $X(k)$,也可看成是分布在一个 N 等分的圆周上,所以对于 $X(k)$ 的圆周移位,利用频域与时域的对偶关系,可以证明以下性质:

若 $Y(k) = X((k+l))_N \cdot R_N(k)$,则

$$\text{IDFT}[X((k+l))_N R_N(k)] = W_N^{nl} x(n) = e^{-j\frac{2\pi}{N}nl} x(n) \quad (3-29)$$

3. 圆周卷积

设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是长度为 N 的有限长序列 ($0 \leq n \leq N-1$),且有 $\text{DFT}[x_1(n)] = X_1(k)$, $\text{DFT}[x_2(n)] = X_2(k)$ 。

若 $Y(k) = X_1(k) X_2(k)$,则

$$\begin{aligned} y(n) &= \text{IDFT}[Y(k)] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n) \end{aligned} \quad (3-30)$$

或

$$\begin{aligned} y(n) &= \text{IDFT}[Y(k)] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N R_N(n) \end{aligned}$$

上式所表示的运算称为圆周卷积(也叫循环卷积),通常简记为 $y(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$ 。

卷积过程可以用图 3-7 来表示。圆周卷积过程中,求和变量为 m ,而 n 为参变量。先将 $x_2(m)$ 周期化,形成 $x_2((m))_N$,再反转形成 $x_2((-m))_N$,取主值序列则得到 $x_2((-m))_N R_N(m)$,通常称之为 $x_2(m)$ 的圆周反转。对 $x_2(m)$ 的圆周反转序列圆周右移 n ,形成 $x_2((n-m))_N R_N(m)$,当 $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 时,分别将 $x_1(m)$ 与 $x_2((n-m))_N R_N(m)$ 相乘,并在 $m=0$ 到 $N-1$ 区间内求和,便得到圆周卷积 $y(n)$ 。

可见圆周卷积和周期卷积的过程是一样的,只不过圆周卷积要取周期卷积结果的主值序列。特别要注意,两个长度小于等于 N 的序列的 N 点圆周卷积长度仍为 N ,这与一般的线性卷积不同,线性卷积的结果是一个长度为 $2N-1$ 的序列。圆周卷积是周期卷积取主值,在一定条件下可与线性卷积相等。该问题将在 3.6 节详细讨论。

4. 共轭对称性

在讨论 DFT 的共轭对称性之前,先看一下 $x(n)$ 的共轭复序列 $x^*(n)$ 的 DFT。因为

$$\begin{aligned}
 \text{DFT}[x^*(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{nk} R_N(k) \\
 &= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk} \right]^* R_N(k) \\
 &= X^*((-k))_N R_N(k) \\
 &= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(N-k)n} \right]^* R_N(k) \\
 &= X^*((N-k))_N R_N(k) = X^*(N-k)
 \end{aligned}$$

所以

$$\text{DFT}[x^*(n)] = X^*(N-k), \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3-31)$$

且

$$X(N) = X(0)$$

即认为 $X(k)$ 是等间隔的分布在单位圆上,它们的终点就是起点。式(3-31)说明序列的共轭序列的离散傅里叶变换等于原序列的离散傅里叶变换的反序列的共轭。

同理可证明

$$\text{DFT}[x^*(N-n)] = X^*(k) \quad (3-32)$$

下面利用式(3-31)和式(3-32)讨论 DFT 的共轭对称性。

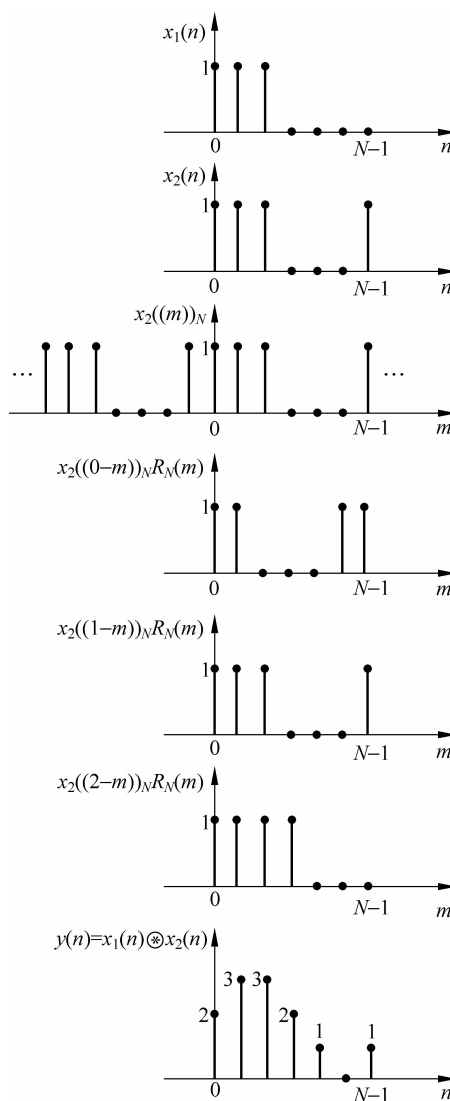


图 3-7 圆周卷积示意图 ($N=7$)

在第2章讨论了序列傅里叶变换的一些对称性质,且定义了共轭对称序列与共轭反对称序列的概念。在那里,对称性是指关于坐标原点的纵坐标的对称性。若 $x(n)$ 的长度为 N ,其共轭对称序列 $x_e(n)$ 与共轭反对称序列 $x_o(n)$ 分别为

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$$

可以看出, $x_e(n)$ 和 $x_o(n)$ 的长度均为 $2N-1$,超出了 $x(n)$ 的主值区间 N 。因为在 DFT 中,涉及的序列 $x(n)$ 及其离散傅里叶变换 $X(k)$ 均为有限长序列,且定义区间为 0 到 $N-1$,所以,这里的对称性是指关于 $N/2$ 点的对称性。为此引入新的长度为 N 、关于 $N/2$ 点的对称,称为圆周对称。

设有限长序列 $x(n)$ 的长度为 N 点,则它的圆周共轭对称分量 $x_{ep}(n)$ 和圆周共轭反对称分量 $x_{op}(n)$ 分别定义为

$$x_{ep}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)] \quad (3-33)$$

$$x_{op}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)] \quad (3-34)$$

则两者满足

$$x_{ep}(n) = x_{ep}^*(N-n) \quad (3-35a)$$

$$x_{op}(n) = -x_{op}^*(N-n) \quad (3-35b)$$

如同任何实函数都可以分解成偶对称分量和奇对称分量一样,任何有限长序列 $x(n)$ 都可以表示成其圆周共轭对称分量 $x_{ep}(n)$ 和圆周共轭反对称分量 $x_{op}(n)$ 之和,即

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3-36)$$

$$\begin{aligned} \text{而 DFT}[x_{ep}(n)] &= \text{DFT}\left\{\frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)]\right\} \\ &= \frac{1}{2}\text{DFT}[x(n)] + \frac{1}{2}\text{DFT}[x^*(N-n)] \end{aligned}$$

利用式(3-32),可得

$$\text{DFT}[x_{ep}(n)] = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(k)] = \text{Re}[X(k)] = X_R(k) \quad (3-37)$$

同理可得

$$\text{DFT}[x_{op}(n)] = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(k)] = \text{jIm}[X(k)] = \text{j}X_I(k) \quad (3-38)$$

由式(3-36)并利用 DFT 的线性性质可得

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \text{DFT}[x_{ep}(n)] + \text{DFT}[x_{op}(n)] = X_R(k) + \text{j}X_I(k) \quad (3-39)$$

式(3-37)和式(3-38)分别说明序列的圆周共轭对称分量的 DFT 等于原序列的 DFT 的实部分量,序列的圆周共轭反对称分量的 DFT 等于原序列的 DFT 的虚部分量乘以 j 。

下面再进一步讨论序列实部与虚部的 DFT。

若用 $x_r(n)$ 及 $x_i(n)$ 分别表示有限长序列 $x(n)$ 的实部及虚部,即

$$x(n) = x_r(n) + \text{j}x_i(n) \quad (3-40)$$

式中,

$$x_r(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]$$

$$jx_i(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)]$$

分别对 $x_r(n)$ 和 $jx_i(n)$ 求 DFT 并利用式(3-31), 可得

$$\text{DFT}[x_r(n)] = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)] = X_{\text{ep}}(k) \quad (3-41)$$

$$\text{DFT}[jx_i(n)] = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)] = X_{\text{op}}(k) \quad (3-42)$$

由式(3-40)并利用 DFT 的线性性质可得

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = X_{\text{ep}}(k) + X_{\text{op}}(k) \quad (3-43)$$

可以证明

$$X_{\text{ep}}(k) = X_{\text{ep}}^*(N-k) \quad (3-44)$$

$X_{\text{ep}}(k)$ 称为 $X(k)$ 的圆周共轭对称分量或共轭偶部。即将 $X_{\text{ep}}(k)$ 认为是分布在 N 等分圆周上, 则以 $k=0$ 为原点其左半圆上与右半圆上的序列是共轭对称的。

同理可以证明

$$X_{\text{op}}(k) = -X_{\text{op}}^*(N-k) \quad (3-45)$$

$X_{\text{op}}(k)$ 称为 $X(k)$ 的圆周共轭反对称分量或共轭奇部。即将 $X_{\text{op}}(k)$ 认为是分布在 N 等分圆周上, 则以 $k=0$ 为原点其左半圆上与右半圆上的序列是共轭反对称的。

式(3-41)和式(3-42)分别说明复序列实部的 DFT 等于序列 DFT 的圆周共轭对称分量, 复序列虚部乘以 j 的 DFT 等于序列 DFT 的圆周共轭反对称分量。

式(3-37)和式(3-38)以及式(3-41)和式(3-42)的概念和对应关系, 可用图 3-8 来说明。比较第 2 章图 2-3, 可见序列与其 DTFT 的对应关系和序列与其 DFT 的对应关系是一样的。因为实质上 $X(k)$ 可以看作序列 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样, 所以不难理解它们就有类似的对称特性, 但要注意 DFT 是关于 $N/2$ 点的对称, 是一种圆周对称。

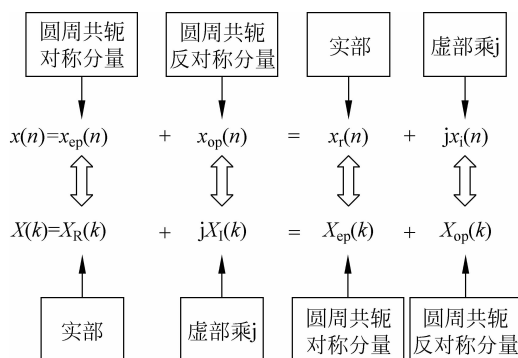


图 3-8 序列的两种表示与其 DFT 的对应关系示意图

此外, 根据上述共轭对称特性可以证明有限长实序列和纯虚序列 DFT 的共轭对称特性。若 $x(n)$ 是实序列, 这时 $x(n) = x^*(n)$, 两边进行离散傅里叶变换并利用式(3-31), 有

$$X(k) = X^*(N-k) \quad (3-46)$$

由上式可看出,实序列的 $X(k)$ 只有圆周共轭对称分量。

若 $x(n)$ 是纯虚序列,则显然只有圆周共轭反对称分量,即满足

$$X(k) = -X^*(N-k) \quad (3-47)$$

结论:以上这两种情况,只要知道一半数目的 $X(k)$ 就可以了,另一半可利用对称性求得。

关于 DFT 共轭对称特性的应用,在 4.6 节可以充分体现出来。

3.4.4 MATLAB 实现

在 MATLAB 中,可用特殊函数 DFT 来计算离散傅里叶变换。函数代码如下:

```
function [Xk] = dft(xn,N)
% xn = N 点有限长度序列, N = DFT 的长度
n = [0:1:N-1]; k = [0:1:N-1]; WN = exp(-j * 2 * pi/N);
nk = n' * k; % 产生一个含 nk 值的 N 乘 N 维矩阵
WNNk = WN.^ nk; % DFT 矩阵
Xk = xn * WNNk; % DFT 系数的行向量
```

例 3-4 $x(n)$ 是一 4 点序列: $x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(1) 计算离散时间傅里叶变换(DTFT)即 $X(e^{j\omega})$, 并且画出它的幅度和相位。

(2) 计算 $x(n)$ 的 4 点 DFT。

解 MATLAB 实现程序如下。

(1) 4 点序列的 DTFT:

```
x = [1,1,1,1]; w = [0:1:500] * 2 * pi/500;
[H] = freqz(x,1,w);
magH = abs(H); phaH = angle(H);
subplot(2,1,1); plot(w/pi,magH); grid
xlabel(''); ylabel('|X|'); title('DTFT 的幅度')
subplot(2,1,2); plot(w/pi,phaH/pi * 180); grid
xlabel('以 pi 为单位的频率'); ylabel('度'); title('DTFT 的相角')
```

(2) 4 点序列的 4 点 DFT:

```
N = 4; k = 0:N-1;
X = dft(x,N);
magX = abs(X), phaX = angle(X) * 180/pi
subplot(2,1,1); plot(w * N/(2 * pi),magH,'- -');
axis([-0.1,4.1,0,5]); hold on
stem(k,magX);
ylabel('|X(k)|'); title('DFT 的幅度: N = 4'); text(4.3, -1, 'k')
hold off
subplot(2,1,2); plot(w * N/(2 * pi),phaH * 180/pi,'- -');
axis([-0.1,4.1, -200,200]); hold on
stem(k,phaX);
ylabel('度'); title('DFT 相角: N = 4'); text(4.3, -200, 'k')
```

运行结果如图 3-9 所示。

设 $X_4(k)$ 为 4 点 DFT,从图中可以看出, $X_4(k)$ 正确给出了 $X(e^{j\omega})$ 的 4 个样本,但它只

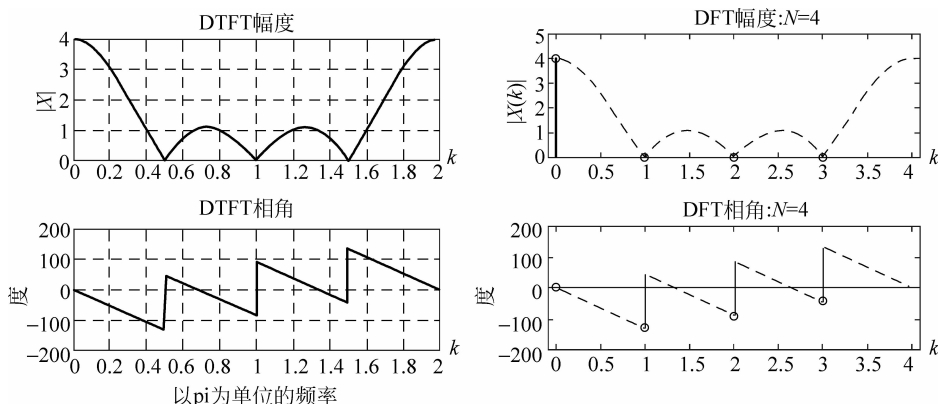


图 3-9 例 3-4 中的 4 点 DTFT 和 DFT 图

有一个非零样本。为什么？考察一个全 1 的 4 点 $x(n)$ ，它的周期性延伸为

$$\tilde{x}(n) = 1, \quad \forall n$$

它是一恒定(或 DC)信号。这正是由 DFT 即 $X_4(k)$ 推知的，它在 $k=0$ (或 $\omega=0$) 上有一非零样本，而在其他频率上为零。

例 3-5 在上题的基础上，如何得到 $X(e^{j\omega})$ 的其他样本？

解 显然，我们可以取采样频率更小一些，也就是说，应增加 N 。现将点数增加一倍即 $N=8$ 。我们可以给 $x(n)$ 后附上 4 个零得到一个 8 点序列。

$$x(n) = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}$$

这是一个很重要的运算，叫做补零运算。在实际应用中，为了得到一较密的频谱，这种运算是非常必要的。设 $X_8(k)$ 为 8 点 DFT，则

$$X_8(k) = \sum_{n=0}^7 x(n) W_8^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, 7; \quad W_8 = e^{-j\pi/4}$$

此时，8 点序列的 DFT 的频率分辨率为 $\omega = 2\pi/N = 2\pi/8 = \pi/4$ 。

MATLAB 主要程序如下：

```
N = 8; w1 = 2 * pi / N; k = 0:N-1;
x = [x, zeros(1,4)];
X = dft(x,N);
magX = abs(X), phaX = angle(X) * 180/pi
% 绘图语句略
```

更进一步，我们给 $x(n)$ 补 12 个零，成为 16 点序列，即

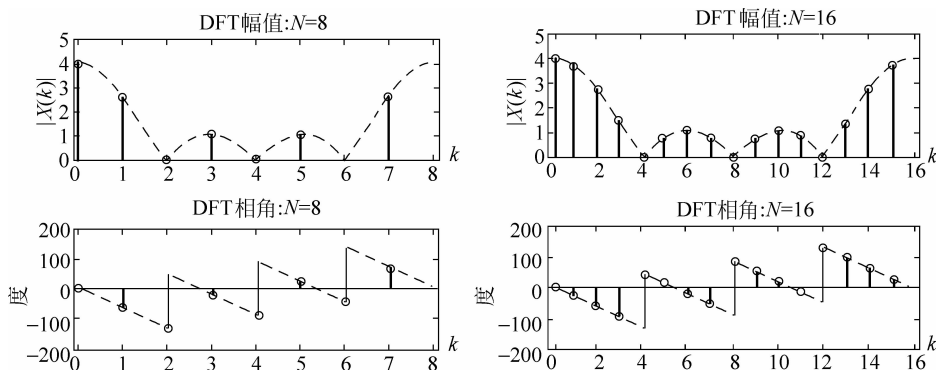
$$x(n) = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

则其频率分辨率为 $\omega = 2\pi/N = 2\pi/16 = \pi/8$, $W_{16} = e^{-j\pi/8}$ 。因此得到频谱样本间隔为 $\pi/8$ 的更密的频谱，称为高密度谱，如图 3-10 所示。

MATLAB 程序：略

通过以上两个例题可以得到以下几个重要结论：

(1) 补零是给原始序列填零的运算。这导致较长的 DFT，它会给原始序列的离散傅里叶变换提供间隔较近的样本。在 MATLAB 中，用 zeros 函数实现补零运算。

图 3-10 例 3-5 中的 DFT 图($N=8$ 、 $N=16$)

(2) 补零运算提供了一个较密的频谱和较好的图示形式。但因为在信号中只是附加了零,而没有增加任何新的信息,因此它不能提供高分辨率的频谱。

(3) 为得到高分辨率的频谱,需从实验或观察中取得更多的数据。

关于对高密度频谱与高分辨率频谱的研究,详见 3.7.3 节和数字信号处理实验(第 9 章)。

例 3-6 设 $x_1(n) = \{1, 2, 2, 1\}$, $x_2(n) = \{1, -1, 1, -1\}$

(1) 确定它们的线性卷积 $x_3(n)$;

(2) 计算圆周卷积 $x_4(n)$ 。

解 (1) MATLAB 实现程序如下:

```
x1 = [1, 2, 2, 1]; x2 = [1, -1, 1, -1];
x3 = conv(x1, x2)
```

运行结果:

```
x3 =
     1     1     1     0    -1    -1    -1
```

于是线性卷积 $x_3(n)$ 为 7 点序列: $x_3(n) = \{1, 1, 1, 0, -1, -1, -1\}$ 。

(2) 圆周卷积的长度为 $N = N_1 + N_2 - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$

```
x4 = circonvt(x1, x2, 7)
```

运行结果:

```
x4 =
     1     1     1     0    -1    -1    -1
```

可见此时 $x_3(n) = x_4(n) = \{1, 1, 1, 0, -1, -1, -1\}$, 即在一定条件下, 圆周卷积与线性卷积可以相等。

注意: 函数 $\text{circonvt}(x1, x2, N)$ 是在 $x1$ 和 $x2$ 之间求 N 点圆周卷积, 当 $x1$ 和 $x2$ 的长度小于 N 时, 会自动补零。

3.5 频域采样理论——抽样 Z 变换

在上节中,可看到离散傅里叶变换相当于信号傅里叶变换的等间隔采样,也就是说实现了频域的采样,便于计算机计算。那么是否任一序列都能用频域采样的方法去逼近呢?

3.5.1 频域采样

我们考虑一个任意的绝对可和的序列 $x(n)$, 它的 Z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

如果对 $X(z)$ 在单位圆上进行等距离采样, 得到

$$X(k) = X(z) \big|_{z=W_N^{-k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)W_N^{nk} \quad (3-48)$$

现在的问题是, 这样采样以后, 信息有没有损失? 或者说, 频域采样后从 $X(k)$ 的反变换中所获得的有限长序列, 即 $x_N(n) = \text{IDFT}[X(k)]$, 能不能代表原序列 $x(n)$? 为此, 先来分析 $X(k)$ 的周期延拓序列 $\tilde{X}(k)$ 的离散傅里叶级数的反变换。为了弄清这个问题, 首先从周期序列 $\tilde{x}_N(n)$ 开始:

$$\tilde{x}_N(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}$$

将式(3-48)代入此式, 可得

$$\tilde{x}_N(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)W_N^{mk} \right] W_N^{-nk} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} W_N^{(m-n)k} \right]$$

由于

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(m-n)k} = \begin{cases} 1, & m = n + rN, r \text{ 为任意整数} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

所以

$$\tilde{x}_N(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + rN) \quad (3-49)$$

即 $\tilde{x}_N(n)$ 是原非周期序列 $x(n)$ 的周期延拓序列, 其时域周期为频域采样点数 N 。在第1章中, 时域的采样造成频域的周期延拓, 这里又对称地看到, 频域采样同样造成时域的周期延拓。实际中, 根据序列 $x(n)$ 的长度不同, 可分为下列几种情况讨论:

(1) 如果 $x(n)$ 是有限长序列, 点数为 M , 则当频域采样不够密, 即当 $N < M$ 时, $x(n)$ 以 N 为周期进行延拓, 就会造成混叠。这时, 从 $\tilde{x}_N(n)$ 就不能不失真地恢复出原信号 $x(n)$ 。因此, 对于 M 点的有限长序列 $x(n)$, 频域采样不失真的条件是频域采样点数 N 要大于或等于时域序列长度 M (时域采样点数), 即满足

$$N \geq M \quad (3-50)$$

此时可得到

$$x_N(n) = \tilde{x}_N(n)R_N(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + rN)R_N(n) = x(n), \quad N \geq M \quad (3-51)$$

也就是说,点数为 N (或小于 N) 的有限长序列,可以利用它的 Z 变换在单位圆上的 N 个等间隔点上的采样值精确地表示。

(2) 如果 $x(n)$ 不是有限长序列(即无限长序列),则时域周期延拓后,必然造成混叠现象,因而一定会产生误差;当 n 增加时信号衰减得越快,或频域采样越密(即采样点数 N 越大),则误差越小,即 $\tilde{x}_N(n)$ 越接近 $x(n)$ 。

概括起来,对于 M 点的有限长序列 $x(n)$,当频域采样点数 $N \geq M$ 时,即可由频域采样值 $X(k)$ 恢复出原序列 $x(n)$,否则产生时域混叠现象,这就是所谓的频域采样定理。

例 3-7 一个长度 $M=5$ 的矩形序列,其波形和频谱图如图 3-11 所示。若在频域上进行抽样处理,使其频域也离散化,试比较抽样点数分别取 5 和 4 时的结果。

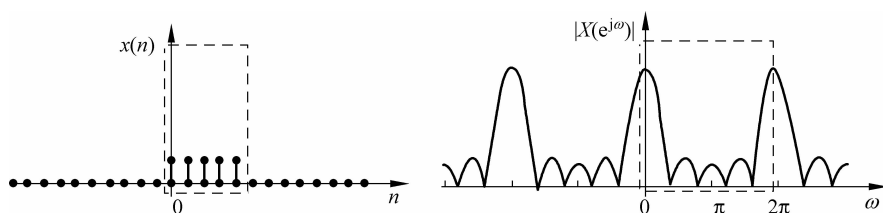


图 3-11 例 3-7 图

解 (1) 取 $N=5$ 点,频域抽样,时域延拓相加,时域延拓的周期个数等于频域的抽样点数 $N=5$,由于 $N=M$,所以时域延拓后,与原序列相比,无混叠现象,如图 3-12(a)所示。

(2) 取 $N=4$ 时进行抽样,由于 $N=4$,而序列长度为 $M=5$, $N < M$,时域延拓后,与原序列相比,产生混叠现象,如图 3-12(b)所示。

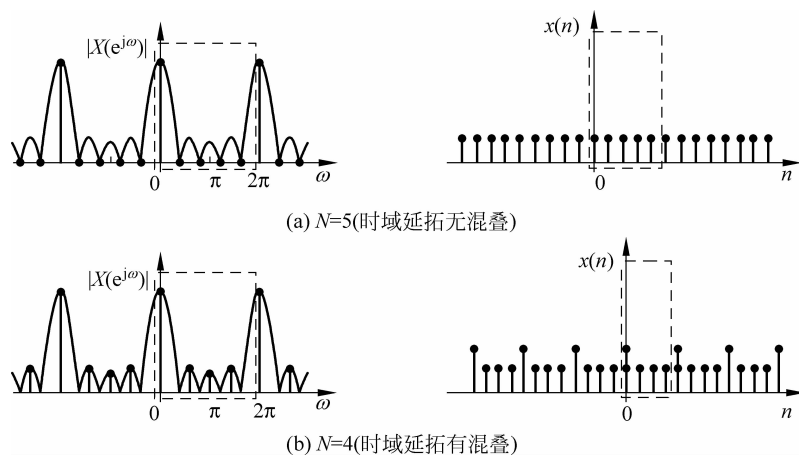


图 3-12 频域抽样点数 N 取不同值时的结果

3.5.2 频域恢复——频域内插公式

对于长度为 N 的有限长序列 $x(n)$,既然其 N 个频域采样 $X(k)$ 就足以不失真地代表序列的特性,那么由此 N 个采样值 $X(k)$ 就应该能够完整的表达整个 $X(z)$ 函数及其频响 $X(e^{j\omega})$,即由 N 点 $X(k)$ 可内插恢复出 $X(z)$ 或 $X(e^{j\omega})$ 。讨论如下:

有限长序列 $x(n)$ ($0 \leq n \leq N-1$) 的 Z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

由于

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$$

将上式代入 $X(z)$, 得

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \right] z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left[\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-nk} z^{-n} \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot \frac{1 - W_N^{-Nk} z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \end{aligned} \quad (3-52)$$

这就是用 N 个频域采样来恢复 $X(z)$ 的内插公式。它可以表示为

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(z) \quad (3-53)$$

其中

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad (3-54)$$

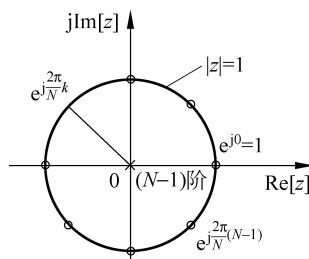
称为内插函数。

下面讨论 $\Phi_k(z)$ 的零、极点特性:

令 $1 - W_N^{-k} z^{-1} = 0$, 得 $z = W_N^{-k} = e^{j(2\pi/N)k}$, $\Phi_k(z)$ 有一个极点。

令 $1 - z^{-N} = 0$, 得 $z = e^{j(2\pi/N)r}$, $r = 0, 1, \dots, N-1$, $\Phi_k(z)$ 有 N 个零点。

$\Phi_k(z)$ 的 N 个零点都在单位圆上, 但极点和第 k 个零点相抵消, 因而内插函数 $\Phi_k(z)$ 只在本采样点 $e^{j(2\pi/N)k}$ 处不为零, 在其他 $(N-1)$ 个采样点 $i (i \neq k)$ 上都是零值。另外, $\Phi_k(z)$ 在 $z=0$ 处有 $(N-1)$ 阶极点。内插函数的零、极点分布如图 3-13 所示。



现在来讨论频率响应, 即求单位圆上 $z = e^{j\omega}$ 的 Z 变换。图 3-13 内插函数的零、极点由式(3-53)可得

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(e^{j\omega})$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi_k(e^{j\omega}) &= \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j(\omega - \frac{2\pi}{N}k)}} = \frac{1}{N} \frac{\sin \omega N / 2}{\sin \left[\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k \right) / 2 \right]} e^{-j \left(\frac{N-1}{2} \omega + \frac{k\pi}{N} \right)} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\sin \left[N \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}k \right) \right]}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}k \right)} e^{j \frac{k\pi}{N} (N-1)} e^{-j \frac{N-1}{2} \omega} \end{aligned} \quad (3-55)$$

进一步表示为更方便的形式

$$\Phi_k(e^{j\omega}) = \Phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) \quad (3-56)$$

其中

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin \omega N/2}{\sin \omega/2} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \quad (3-57)$$

所以

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) \quad (3-58)$$

频域内插函数 $\Phi(\omega)$ 的幅度特性和相位特性如图 3-14 所示。可以看出, 当 $\omega=0$ 时, $\Phi(\omega)=1$, 当 $\omega=\frac{2\pi}{N}i$ ($i=1, 2, \dots, N-1$) 时, $\Phi(\omega)=0$ 。因而有

$$\Phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) = \begin{cases} 1, & \omega = \frac{2\pi}{N}k \\ 0, & \omega = \frac{2\pi}{N}i, i \neq k \end{cases} \quad (3-59)$$

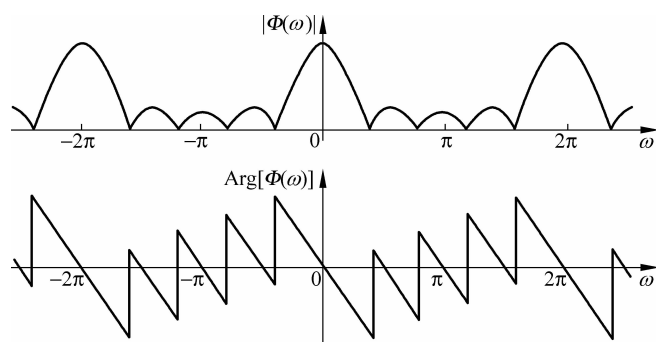


图 3-14 内插函数幅度特性与相位特性 ($N=5$)

也就是说, 函数 $\Phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$ 在本采样点 $\left(\omega = \frac{2\pi}{N}k\right)$ 上值为 1, 而在其他采样点 $\left(\omega = \frac{2\pi}{N}i, i \neq k\right)$ 上值为 0。整个 $X(e^{j\omega})$ 就是由 N 个 $\Phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$ 函数被 N 个 $X(k)$ 加权求和构成。很明显, 在每个采样点上 $X(e^{j\omega})$ 的值精确等于 $X(k)$, 即

$$X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = X(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

而各采样点之间的 $X(e^{j\omega})$ 值, 则由各采样点的加权内插函数 $X(k) \Phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$ 在所求 ω 点上的值的叠加而得, 如图 3-15 所示。

内插函数的另一重要特点是具有分段线性相位特性。

在以后章节中将会看到, 频率采样理论为 FIR 滤波器系统函数的逼近以及 FIR 滤波器的结构设计提供了又一个有力的工具。

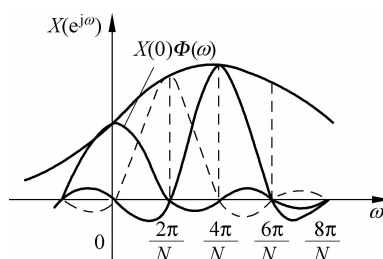


图 3-15 由内插函数求频率响应的示意图

3.6 用 DFT 计算线性卷积和线性相关

3.6.1 线性卷积的 DFT 算法

对于有限长序列,存在两种形式的卷积:线性卷积与圆周卷积。由于圆周卷积可以采用 DFT 的快速算法——快速傅里叶变换进行运算,运算速度上有很大的优越性。然而实际问题一般都是线性卷积运算。例如信号通过线性时不变系统,系统的输出 $y(n)$ 是输入 $x(n)$ 与单位脉冲响应 $h(n)$ 的线性卷积 $y(n) = x(n) * h(n)$ 。若 $x(n)$ 、 $h(n)$ 均为有限长序列,那么能否用圆周卷积来代替线性卷积呢?

1. 用圆周卷积计算线性卷积的条件

设 $x_1(n)$ 是长度为 N_1 的有限长序列 ($0 \leq n \leq N_1 - 1$), $x_2(n)$ 是长度为 N_2 的有限长序列 ($0 \leq n \leq N_2 - 1$)

1) 线性卷积

$$y_l(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) = \sum_{m=0}^{N_1-1} x_1(m)x_2(n-m) \quad (3-60)$$

$x_1(m)$ 的非零区间为 $0 \leq m \leq N_1 - 1$, $x_2(n-m)$ 的非零区间为 $0 \leq n-m \leq N_2 - 1$, 将两个不等式相加,有

$$0 \leq n \leq N_1 + N_2 - 2$$

在这个区间以外,不是 $x_1(m)$ 等于 0, 就是 $x_2(n-m)$ 等于 0, 因而 $y_l(n) = 0$, 所以 $y_l(n)$ 是一个长度为 $N_1 + N_2 - 1$ 的有限长序列。例如, 图 3-16 中, $x_1(n)$ 为 $N_1 = 4$ 的矩形序列 (见图 3-16(a)), $x_2(n)$ 为 $N_2 = 5$ 的矩形序列 (见图 3-16(b)), 则它们的线性卷积 $y_l(n)$ 为 $N = N_1 + N_2 - 1 = 8$ 点的有限长序列 (见图 3-16(c))。

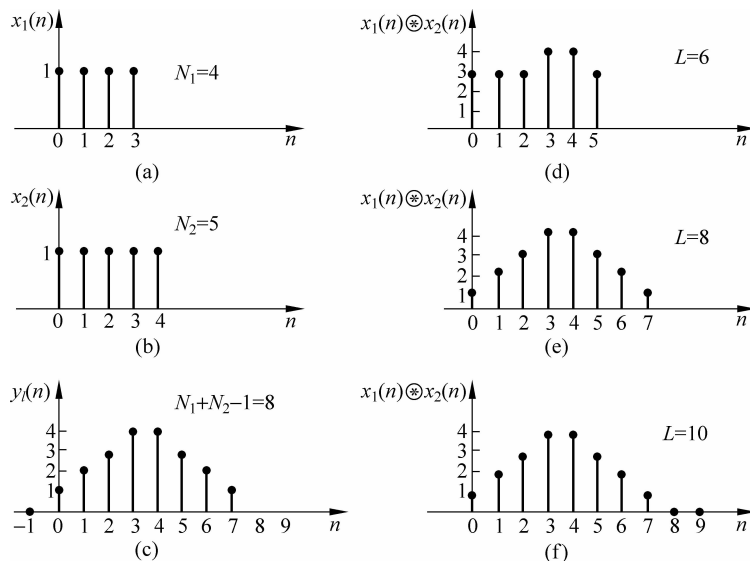


图 3-16 有限长序列的线性卷积与圆周卷积

2) 圆周卷积

圆周卷积运算要求两个有限长序列是等长度的。先一般性的假设是长度为 L 点的圆周卷积,再讨论 L 取何值时,圆周卷积和线性卷积相等。

设 $y_c(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$ 是两序列的 L 点圆周卷积。首先,序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 末尾补零,构成 L 点序列,即

$$x_1(n) = \begin{cases} x_1(n), & 0 \leq n \leq N_1 - 1 \\ 0, & N_1 \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$

$$x_2(n) = \begin{cases} x_2(n), & 0 \leq n \leq N_2 - 1 \\ 0, & N_2 \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$

即 $x_1(n)$ 补 $L - N_1$ 个零点值, $x_2(n)$ 补 $L - N_2$ 个零点值,则

$$y_c(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2((n-m))_L \right] R_L(n) \quad (3-61)$$

将 $x_2(n)$ 变成周期延拓序列,即

$$\tilde{x}_2(n) = x_2((n))_L = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2(n + rL)$$

代入 $y_c(n)$ 表达式,并考虑到式(3-60)的线性卷积,有

$$\begin{aligned} y_c(n) &= \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2(n + rL - m) \right] R_L(n) \\ &= \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2(n + rL - m) \right] R_L(n) \\ &= \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n + rL) \right] R_L(n) \end{aligned} \quad (3-62)$$

所以 L 点圆周卷积 $y_c(n)$ 是线性卷积 $y_l(n)$ 以 L 为周期的周期延拓序列的主值序列。因为 $y_l(n)$ 有 $N_1 + N_2 - 1$ 个非零值,所以只有当 $L \geq N_1 + N_2 - 1$ 时,各延拓周期才不会混叠,也即使圆周卷积等于线性卷积而不产生混叠失真的充要条件是

$$L \geq N_1 + N_2 - 1 \quad (3-63)$$

满足此条件后就有

$$y_c(n) = x_1(n) \otimes x_2(n) = x_1(n) * x_2(n) = y_l(n)$$

图 3-16(d)、(e)、(f)正反映了式(3-62)的圆周卷积与线性卷积的关系。在图 3-16(d)中, $L=6$ 小于 $N_1 + N_2 - 1 = 8$, 这时产生混叠现象,其圆周卷积不等于线性卷积;而在图 3-16(e)、图 3-16(f)中, $L=8$ 和 $L=10$, 这时圆周卷积结果与线性卷积相同,所得 $y_c(n)$ 的前 8 点序列值正好代表线性卷积结果。所以只要 $L \geq N_1 + N_2 - 1$, 圆周卷积结果就能完全代表线性卷积。

2. 用圆周卷积计算线性卷积的方法

用圆周卷积计算线性卷积的实现框图如图 3-17 所示。

图中, $L \geq N_1 + N_2 - 1$, 并且 DFT 与 IDFT 子程序可以共用,而且通常用快速算法(FFT)来实现,故圆周卷积也称为快速卷积。

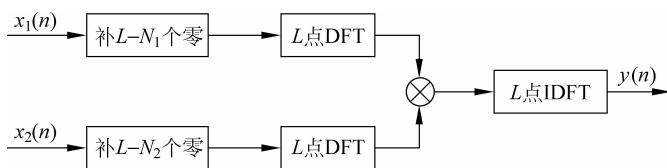


图 3-17 用圆周卷积代替线性卷积的实现框图

若 $x_1(n) = h(n)$ 是系统的单位脉冲响应, $x_2(n) = x(n)$ 是系统的输入序列, 则输入序列通过线性时不变系统的响应即线性卷积结果可以通过如图 3-17 所示的方法来得到, 即

$$y(n) = x(n) * h(n) = x(n) \otimes h(n), \quad L \geq N_1 + N_2 - 1$$

在实际上, 会遇到 $x(n)$ 的长度远大于 $h(n)$ 的长度的情况。若用上述快速卷积法来计算线性卷积, 则要求对短序列补充很多零值, 长序列必须全部输入完才能进行快速计算, 因此要求存储容量大, 且这种方法运算时间长, 运算效率降低, 很难进行实时处理, 为解决这一问题, 可以对长序列分段计算, 具体方法有重叠相加法和重叠保留法。下面简单介绍一下这两种方法。

1) 重叠相加法

设系统单位脉冲响应 $h(n)$ 是 N_1 点的有限长序列, 而输入序列 $x(n)$ 的长度较长且不确定, 如图 3-18 所示。

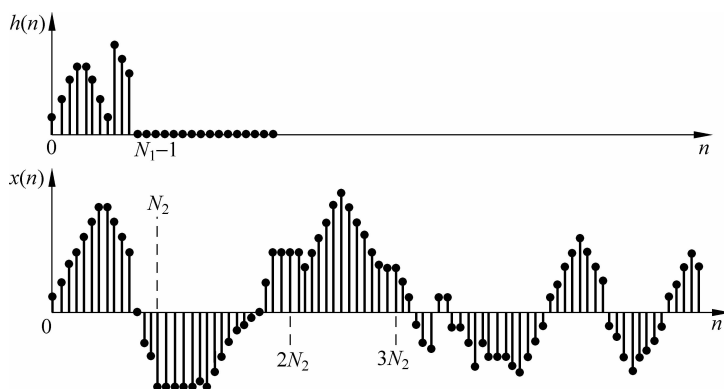


图 3-18 长序列分段滤波

假定 $x_i(n)$ 表示图 3-18 中第 i 段 $x(n)$ 序列:

$$x_i(n) = \begin{cases} x(n), & iN_2 \leq n \leq (i+1)N_2 - 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3-64)$$

显然, 输入序列 $x(n)$ 可表示为

$$x(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i(n) \quad (3-65)$$

这样, $x(n)$ 和 $h(n)$ 的卷积就可以表示为

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i(n) * h(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} y_i(n) \quad (3-66)$$

式中

$$y_i(n) = x_i(n) * h(n)$$

在式(3-65)中,和式的每一项 $x_i(n)$ 只有 N_2 个非零样本,而 $h(n)$ 的长度为 N_1 ,显而易见,线性卷积 $x_i(n) * h(n)$ 的长度为 $(N_1 + N_2 - 1)$ 。也就是说,具有 $(N_1 + N_2 - 1)$ 个非零样本,即 $y_i(n)$ 有 $(N_1 + N_2 - 1)$ 个非零样本,因此相邻两段 $y_i(n)$ 序列必然有 $(N_1 - 1)$ 点的部分要发生重叠,如图 3-19 所示。根据式(3-66),这个重叠部分应该相加起来才能构成最后的输出序列 $y(n)$ 。这种由分段卷积的各段相加构成的卷积输出的方法就称为重叠相加法。

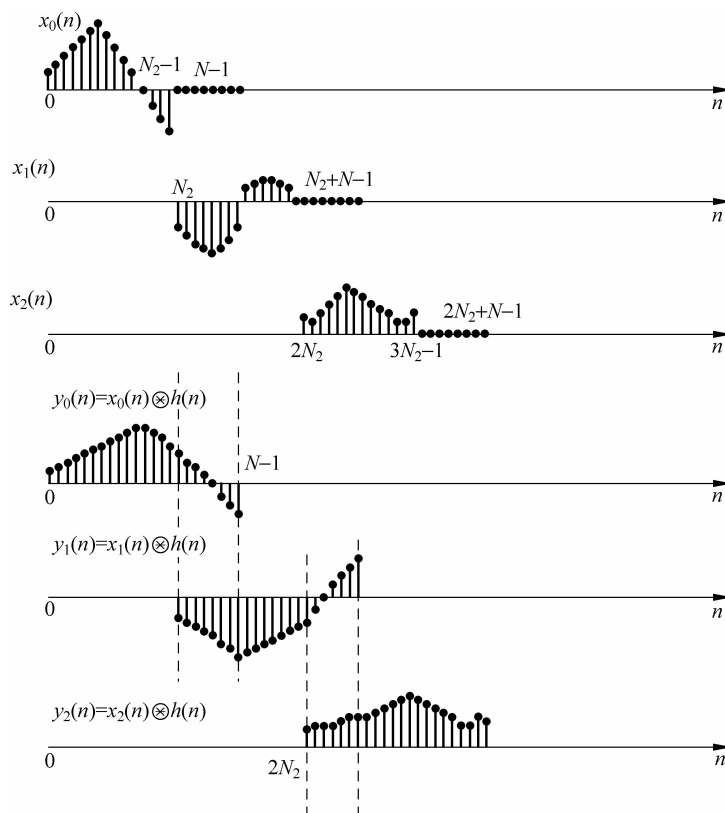


图 3-19 重叠相加法

注意,为了采用基 2-FFT 算法, $x(n)$ 的分段长度 N_2 应按 $N_1 + N_2 - 1 = N = 2^M$ 来选定。

2) 重叠保留法

重叠保留法是将上面的分段序列中补零的部分不补零,而是保留原来的输入序列,于是重叠了输入信号段,就可以省掉输出段的重叠相加。输入段的长度为 $N = N_1 + N_2 - 1$,如图 3-20 所示。其中的 $(N_1 - 1)$ 点与相邻段发生重叠。由于输入段 $x_i(n)$ 和 $h(n)$ 进行圆周卷积,要去掉 $y_i(n)$ 中的混淆部分,保留线性卷积部分,这个混淆只发生在 $y_i(n)$ 的起始一段。因此,每一输出段 $y_i(n)$ 的前 $(N_1 - 1)$ 点就是要去掉的部分,把各相邻段留下来的点衔接起来,就构成了最终的输出。

重叠保留法与重叠相加法的工作量差不多,但可以省去重叠相加法的最后一道相加运算。

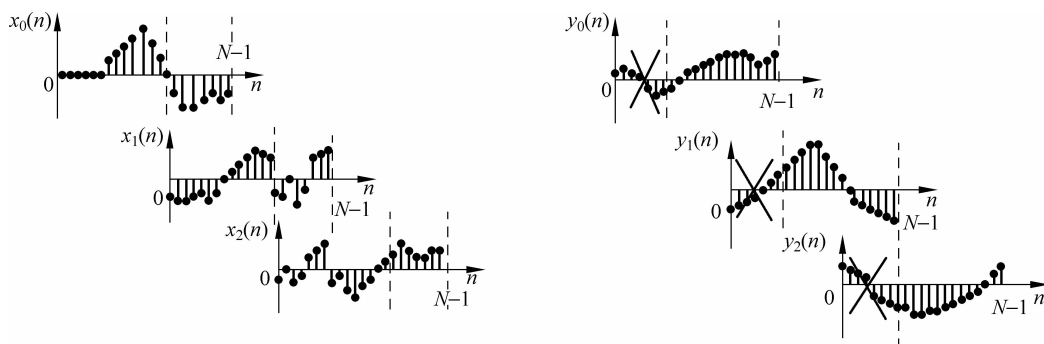


图 3-20 重叠保留法

3.6.2 线性相关的 DFT 算法

互相关和自相关的运算广泛应用于信号分析与统计分析。相关和卷积的物理概念完全不同,卷积反映了线性时不变系统输入和输出的关系,而相关只是反映两个信号的相似程度,和系统本身的特性无关。但在数学计算上相关和卷积确实有类似的地方。

设两个序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 已知,且均为实序列,则线性相关函数的定义为

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n+m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m)y(n) \quad (3-67)$$

式(3-67)表明,互相关函数 $r_{xy}(m)$ 在时刻 m 时的值,等于将 $x(n)$ 保持不动,而 $y(n)$ 左移 m 个抽样周期后两个序列对应相乘再相加的结果,或者将 $y(n)$ 保持不动,而 $x(n)$ 右移 m 个抽样周期后两个序列对应相乘再相加的结果。它与序列的线性卷积运算是相似的,但没有像卷积运算中有翻褶的过程。将式(3-67)与序列的线性卷积公式

$$g(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m-n)y(n) = x(m) * y(m)$$

相比较,可以得到线性相关和线性卷积的时域关系

$$\begin{aligned} r_{xy}(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m)y(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-(m-n)]y(n) \\ &= x(-m) * y(m) \end{aligned} \quad (3-68)$$

另外,相关函数不满足交换律,即 $r_{xy}(m)$ 不能写为 $r_{yx}(m)$,这点与线性卷积不同,因为

$$\begin{aligned} r_{yx}(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)x(n+m) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} y(j-m)x(j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-m) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y[n+(-m)] = r_{xy}(-m) \end{aligned}$$

若 $y(n)=x(n)$,则上面的互相关函数就变成自相关函数 $r_{xx}(n)$,即

$$r_{xx}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n+m) \quad (3-69)$$

自相关函数 $r_{xx}(n)$ 反映了信号 $x(n)$ 和其自身作了一段延迟后的 $x(n+m)$ 的相似程度。

若 $x(n)$ 和 $y(n)$ 均为长度为 N 点的有限长序列, 则互相关函数写为

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n+m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n-m)y(n) \quad (3-70)$$

根据 3.4 节讨论的 DFT 圆周卷积的性质, 并利用 $\text{DFT}[x((-n))_N R_N(n)] = X^*(k)$, 可以得到

$$\sum_{n=0}^{N-1} y(n)x((-n-m))_N R_N(m) = \text{IDFT}[X^*(k)Y(k)] \quad (3-71)$$

式(3-71)实际上是对 $x(n-m)$ 做圆周移位, 再计算相关, 类似于圆周卷积, 称为圆周相关。所以与求线性卷积一样, 线性相关可以采用 DFT 法来求, 即用圆周相关代替线性相关。采用 DFT 法来求线性相关的步骤如下:

(1) 对 N 点序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 补零至长为 L , 选择 $L \geq 2N-1$, 且 $L=2^r$ (r 为整数)。

(2) 分别计算 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的 L 点 DFT:

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)], \quad Y(k) = \text{DFT}[y(n)]$$

(3) 将 $X(k)$ 的虚部 $\text{Im}[X(k)]$ 改变符号, 求得其共轭 $X^*(k)$ 。

(4) 计算 $\text{IDFT}[X^*(k)Y(k)]$; 取后 $L/2$ 项, 得 $r_{xy}(m)$, $-L/2 \leq m \leq -1$; 取前 $L/2$ 项, 得 $r_{xy}(m)$, $0 \leq m \leq L/2-1$ 。

例 3-8 已知两个序列, $x(n) = [2 \ 4 \ -1 \ 1 \ 7 \ 3 \ 1 \ -3]$, $y(n) = x(n-5)$, 即 $y(n)$ 是 $x(n)$ 的延迟序列。试求这两个序列的互相关函数和延迟序列的自相关函数。

解 按照上述 DFT 法求线性相关的步骤编制的 MATLAB 程序如下:

```
L = 16; % 选取长度为 2 的整数次方
x = [2 4 -1 1 7 3 1 -3 0 0 0 0 0 0 0 0]; % 补零到 L 长
y = [0 0 0 0 0 2 4 -1 1 7 3 1 -3 0 0 0]; % 右移 5 位后补零到 L 长
xk = dft(x, L);
yk = dft(y, L);
rxy = real(idft(conj(xk) .* yk, L));
rxy = [rxy(L/2+1:L) rxy(1:L/2)];
m = (-L/2):(L/2-1);
rxx = real(idft(conj(yk) .* yk, L));
rxx = [rxx(L/2+1:L) rxx(1:L/2)];
m = (-L/2):(L/2-1);
subplot(121); stem(m, rxy, ' '); xlabel('m'); ylabel('幅度');
subplot(122); stem(m, rxx, ' '); xlabel('m'); ylabel('幅度');
```

运行结果如图 3-21 所示。由图 3-21(a) 可以看到, 两个序列的互相关函数最大值出现在 $m=5$ 处, 正好是 $y(n)$ 对于 $x(n)$ 的延迟。图 3-21(b) 是延迟序列的自相关函数, 在 $m=0$ 处出现最大值, 且波形具有偶对称特点, 即自相关函数是实偶函数。

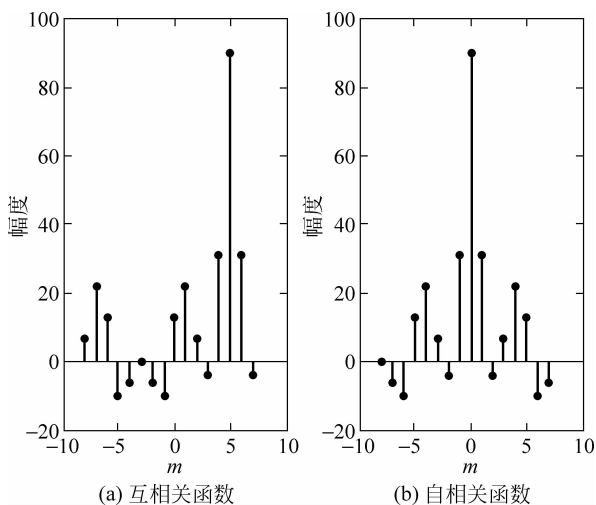


图 3-21 例 3-8 的互相关函数和自相关函数波形

3.7 用 DFT 进行频谱分析

DFT 实现了频域采样,同时 DFT 存在快速算法,所以在实际应用中,可以利用计算机,用 DFT 来逼近连续时间信号的傅里叶变换,进而分析连续时间信号的频谱。连续时间信号 DFT 分析的基本步骤如图 3-22 所示。

连续时间信号 $x_a(t)$ 首先通过抗混叠低通滤波器进行限带处理,然后 A/D 变换进行采样、保持、量化,得到了数字信号 $x(n)$ 。利用 DFT 处理信号 $x(n)$,就实现了连续时间信号的频谱分析。

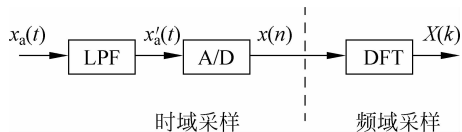


图 3-22 连续时间信号 DFT 分析的基本步骤

3.7.1 利用 DFT 对连续非周期信号进行谱分析

所谓信号的谱分析就是计算信号的傅里叶变换。连续信号与系统的傅里叶分析显然不便于直接用计算机进行计算,使其应用受到限制,而 DFT 是一种时域和频域均离散化的变换,适合数值运算,成为分析离散信号和系统的有力工具。

工程实际中,经常遇到的连续信号 $x_a(t)$,其频谱函数 $X_a(j\Omega)$ 也是连续函数。数字计算机难于处理,因而我们采用 DFT 对其进行逼近。

设对连续非周期信号进行时域抽样,抽样间隔为 T (时域),对其连续非周期性的频谱函数进行频域抽样,频域抽样间隔为 F (频域)。时域抽样,频域必然周期延拓;且延拓周期为时域抽样的频率值,即频域周期 $f_s = \frac{1}{T}$;频域抽样,对应时域按频域抽样间隔的倒数周期延拓,即 $T_p = \frac{1}{F}$ 。对无限长的信号,计算机是不能处理的,必须对时域与频域做截断,若时域取 N 点,则频域至少也要取 N 点。下面把以上的推演过程用严密的数学公式来表示。

连续非周期信号 $x_a(t)$ 的傅里叶变换对为

$$X_a(jf) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (3-72)$$

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(jf) e^{j2\pi ft} df \quad (3-73)$$

下面介绍用 DFT 方法计算这一傅里叶变换对的步骤。首先由式(3-72)推出连续非周期信号的傅里叶变换的抽样值。

(1) 对 $x_a(t)$ 以采样间隔 $T \leq \frac{1}{2f_c}$ (即 $f_s = \frac{1}{T} \geq 2f_c$) 采样得

$$x(n) = x_a(nT) = x_a(t) |_{t=nT} \quad (3-74)$$

对 $X_a(jf)$ 作零阶近似, 即 $t \rightarrow nT, dt \rightarrow T, \int_{-\infty}^{+\infty} dt \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T$, 得频谱密度的近似值为

$$X(jf) \approx T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT) e^{-j2\pi fnT} \quad (3-75)$$

(2) 将序列 $x(n) = x_a(nT)$ 截断为从 $t=0$ 到 $t=T_p$ 的有限长序列, 包含有 N 个抽样(即时域取 N 个抽样点), 则上式成为

$$X(jf) \approx T \sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT) e^{-j2\pi fnT} \quad (3-76)$$

因为时域抽样(抽样频率为 $f_s = \frac{1}{T}$), 则频域必然周期延拓, 且延拓周期为时域抽样的频率值即 f_s , 若频域是限带信号, 则就可能不产生混叠, 则 $X(jf)$ 是频率 f 的连续周期函数(周期为 f_s), $x_a(t)$ 和 $X_a(jf)$ 的波形如图 3-23(a) 所示, $x_a(nT)$ 和 $X(jf)$ 的波形如图 3-23(b) 所示。

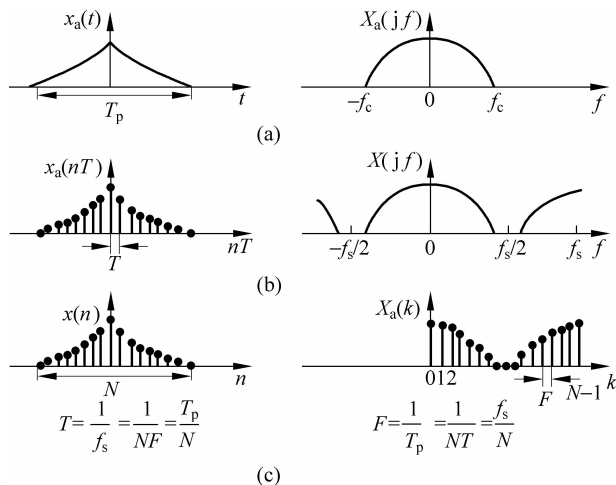


图 3-23 用 DFT 方法分析连续信号频谱的原理示意图

(3) 为了数值计算, 在频域上也要离散化(抽样)。即对 $X(jf)$ 在区间 $[0, f_s]$ 上等间隔采样 N 点, 采样间隔为 F , 如图 3-23(c) 所示。参数 f_s, T_p, N 和 F 满足如下关系式:

$$F = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT} = \frac{1}{T_p} \quad (3-77)$$

式中, $NT = T_p$, T_p 是时域连续信号的持续时间或称记录长度。

需要强调的是, 频域抽样、截断, 也就是将连续函数 f 离散化, 且取有限个抽样值, 即

$$f = kF, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3-78)$$

将式(3-78)和式(3-77)代入 $X(jf)$ 中可得 $X(jf)$ 的采样为

$$X(jkF) = X(jf) \big|_{f=kF} = T \sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

将 $X(jkF) \rightarrow X_a(k)$, $x_a(nT) \rightarrow x(n)$, 则

$$X_a(k) = T \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = T \cdot \text{DFT}[x(n)] \quad (3-79)$$

同理, 由式(3-73)可推出由傅里叶变换的抽样值得到连续非周期信号的表达式。

即由 $x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(jf) e^{j2\pi ft} df$, 得

$$x(n) = x_a(nT) = F \sum_{k=0}^{N-1} X_a(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = FN \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \right] = \frac{1}{T} \text{IDFT}[X_a(k)] \quad (3-80)$$

式(3-79)和式(3-80)分别说明连续非周期信号的频谱可以通过对连续信号采样后进行 DFT 并乘以系数 T 的方法来近似得到, 而对该 DFT 值做反变换并除以系数 $\frac{1}{T}$ 就得到时域采样信号。

3.7.2 用 DFT 进行谱分析的误差问题

用 DFT 逼近连续非周期信号的傅里叶变换过程中除了对幅度的线性加权外, 由于用到了抽样与截断的方法, 因此也会带来一些可能产生的问题, 使谱分析产生误差, 例如混叠效应、截断效应、栅栏效应等。

1. 混叠效应

利用 DFT 逼近连续时间信号的傅里叶变换, 为避免混叠失真, 要求满足抽样定理, 即奈奎斯特准则:

$$f_s \geq 2f_c \quad (3-81)$$

其中, f_s 为抽样频率, f_c 为信号最高频率(即谱分析范围)。但此条件只规定出 f_s 的下限为 $2f_c$, 其上限要受抽样间隔 F 的约束。

抽样间隔 F 即频率分辨率, 它是记录长度的倒数, 即

$$F = \frac{1}{T_p} = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT}$$

若抽样点数为 N , 则抽样间隔与 f_s 的关系为

$$F = \frac{f_s}{N} \geq 2 \frac{f_c}{N} \quad (3-82)$$

在 N 给定时, 为避免混叠失真而一味提高抽样频率 f_s , 必然导致 F 增加, 即频率分辨率下降; 反之, 若要提高频率分辨率即减小 F , 则导致减小 f_s , 最终必须减小信号的高频容量 f_c 。

以上两点结论都是 N 给定的条件下得到的。所以在 f_c 与 F 参数中, 保持其中一个不

变而使另一个性能得以提高的唯一办法就是增加记录长度内的点数 N 。

T_p 和 N 可以按照以下两式进行选择:

$$N > 2 \frac{f_c}{F} \quad (3-83)$$

$$T_p \geq \frac{1}{F} \quad (3-84)$$

例 3-9 对实信号进行谱分析,要求谱分辨率 $F \leq 10\text{Hz}$,信号最高频率 $f_c = 2.5\text{kHz}$,试确定最小记录时间 $T_{p\min}$,最大的采样间隔 $T_{\max}$,最少的采样点数 $N_{\min}$ 。如果 f_c 不变,要求谱分辨率增加一倍,最少的采样点数和最小的记录时间是多少?

解

$$T_p \geq \frac{1}{F} = \frac{1}{10} = 0.1\text{s}$$

因此

$$T_{p\min} = 0.1\text{s}$$

因为要求 $f_s \geq 2f_c$,所以

$$T_{\max} = \frac{1}{2f_c} = \frac{1}{2500} = 0.2 \times 10^{-3}\text{s}$$

$$N_{\min} = \frac{2f_c}{F} = \frac{2 \times 2500}{10} = 500$$

为使频率分辨率提高一倍, $F = 5\text{Hz}$,要求

$$N_{\min} = \frac{2f_c}{F} = \frac{2 \times 2500}{5} = 1000$$

$$T_{p\min} = \frac{1}{F} = \frac{1}{5} = 0.2\text{s}$$

2. 截断效应

在实际中,要把观测的信号 $x(n)$ 限制在一定的时间间隔之内,即采取截断数据的过程。

时域的截断在数学上的意义为原无限长时间信号乘上一个窗函数,使原时间函数成为两端突然截断,中间为原信号与窗函数相乘的结果。时域两函数相乘,在频域是其频谱的卷积。由于窗函数不可能取无限宽,即其频谱不可能为一冲激函数,信号的频谱与窗函数的卷积必然产生展宽和拖尾现象,造成频谱的泄漏现象。具体的数学描述为:

设原信号为 $x(n)$,序列截断的过程相当于给该序列乘上一个矩形窗口函数 $R_N(n)$,即截断后的序列为 $y(n) = x(n)R_N(n)$ 。如果原来序列的频谱为 $X(e^{j\omega})$,矩形窗函数的频谱为 $W_R(e^{j\omega})$,则截断后有限长序列的频谱为

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= FT[y(n)] \\ &= \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * W_R(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) W_R(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \end{aligned}$$

其中: $X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$

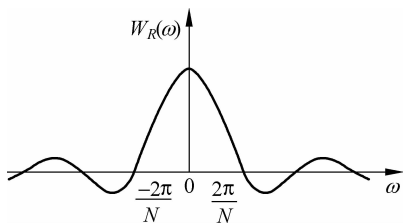


图 3-24 矩形窗函数的幅度谱

$$\begin{aligned} W_R(e^{j\omega}) &= FT[R_N(n)] \\ &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \\ &= W_R(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \end{aligned}$$

幅度谱 $W_R(\omega) \sim \omega$ 曲线如图 3-24 所示。注意 $W_R(\omega)$ 以 2π 为周期, 图中只画出了低频部分。图中, $|\omega| < \frac{2\pi}{N}$ 的部分称为主瓣, 其余部分称为旁瓣。

例 3-10 已知 $x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$, 比较截断前后的频谱。

解 截断前序列 $x(n)$ 的频谱为

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{4} - 2\pi m\right) \right. \\ &\quad \left. + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{4} - 2\pi m\right) \right] \end{aligned}$$

截断后的序列为

$$y(n) = x(n)R_N(n) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * W_R(e^{j\omega})$$

截断前后的频谱图如图 3-25 所示, 可见, 由于矩形窗函数频谱的引入, 使卷积后的频谱 $Y(e^{j\omega})$ 与原序列频谱 $X(e^{j\omega})$ 不一样了, 主要表现在两个方面:

(1) 频谱展宽: 截断后, 使原来的离散谱线向附近展宽, 即 $X(e^{j\omega})$ 的频谱“泄露”到其他频率处, 显然, 泄露使频谱变得模糊, 使谱分辨率降低。

(2) 频谱拖尾: 在主谱线两端形成许多旁瓣, 即频谱产生拖尾, 引起不同频率分量间的干扰, 这种谱间干扰同样会影响频谱分辨率。

在进行 DFT 时, 由于取无限个数据是不可能的, 所以序列的时域截断是必然的, 泄露是难以避免的。为了尽量减少泄露的影响, 截断时要根据具体的情况, 数据不要突然截断, 也就是不要加矩形窗, 而是要缓慢截断, 即选择适当形状的各种缓变的窗函数, 例如升余弦窗 (汉宁窗或海明窗) 等, 使得窗谱的旁瓣能量更小, 卷积后造成的频谱泄露减小。该问题还会在第 6 章 FIR 滤波器设计中进一步讨论到。

3. 栅栏效应

由于 DFT 是有限长序列的频谱等间隔采样所得到的样本值, 这就相当于透过一个栅栏去观察原来信号的频谱, 因此必然有一些地方被栅栏所遮挡, 这些被遮挡的部分就是未被采样到的部分, 这种现象称为“栅栏效应”, 如图 3-26 所示。由于栅栏效应总是存在的, 因而可能会使信号频率中某些较大的频率分量由于被“遮挡”而无法得到反映。

减小栅栏效应的一个方法就是要使频域采样更密, 即增加频域采样点数 N , 在不改变时域数据的情况下, 必然是在时域数据末端即在有限长序列的尾部增补若干个零值, 借以改变原序列的长度, 但并不改变原有的记录数据。这样对加长的序列作 DFT 时, 由于点数增

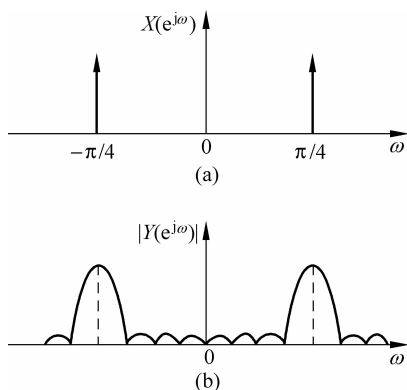


图 3-25 $\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$ 加矩形窗前、后的频谱

加就相当于调整了原来栅栏的间隙即频率间隔,谱线更密,可以使原来得不到反映的那些较大的频率分量落在采样点上而得到反映。

但要注意,由于栅栏效应,使得被分析的频谱变得较为稀疏,为此,在采样样本序列 $x(n)$ 后面补零,在数据长度 T_p 不变的情况,可以改变频谱的频率取样密度,这样得到的是高密度频谱。但因在 $x(n)$ 后面补零并没有增加新的信息量,改善的仅是栅栏效应。所以补零是不能提高频率分辨率的,即得不到高分辨率谱。

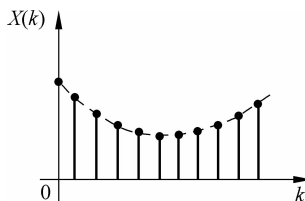


图 3-26 栅栏效应

3.7.3 用 DFT 进行谱分析的参数考虑

用 DFT 对连续信号进行谱分析时,一般要考虑两方面的问题:第一,频谱分析范围;第二,频率分辨率。

频谱分析范围由采样频率 f_s 决定。前面已经叙述,为减小混叠失真,通常要求 $f_s > 2f_c$ 。但采样频率 f_s 越高,频谱分析范围越宽,在单位时间内采样点增多,要储存的数据量加大,计算量也越大。所以应结合实际的具体情况,确定频谱分析范围。

频率分辨率在信号谱分析中是一个非常重要的概念。它反映了将两个相邻谱峰分开的能力,是分辨两个不同频率分量的最小间隔。因此将频域采样间隔 $F = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT} = \frac{1}{T_p}$ 定义为频率分辨率。但要注意,由于对连续信号进行谱分析时要进行截断处理,所以频率分辨率实际上还与截断窗函数及时宽相关。因此有文献将 $F = \frac{f_s}{N}$ 称为“计算分辨率”,即该分辨率是靠计算得出的,但它并不能反映真实的频率分辨能力。而另一方面将 $F = \frac{1}{T_p}$ 称为“物理分辨率”,数据的有效长度越小,频率分辨能力越差。前面提到,补零是改善栅栏效应的一个方法,但不能提高频率分辨率,即得不到高分辨率谱。这说明,补零仅仅是提高了计算分辨率,得到的是高密度频谱,而要得到高分辨率谱,则要通过增加数据的记录长度 T_p 来提高物理分辨率。在实际工作中,当数据的实际长度 T_p 或 N 不能再增加时,通过发展新的信号处理算法也可能提高频率分辨率。

通过前面的讨论可知,频率分辨率的概念和 DFT 紧密相连,频率分辨率的大小反比于数据的实际长度。在数据长度相同的情况下,使用不同的窗函数将在频谱的分辨率和频谱的泄露之间有着不同的取舍。窗函数的主瓣宽度主要影响分辨率,而旁瓣的大小影响了频谱的泄露。

综上所述,DFT 参数选择的一般原则是:

- (1) 确定信号的最高频率 f_c 后,为防止混叠,采样频率 $f_s \geq (3 \sim 6)f_c$;
- (2) 根据实际需要,即根据频谱的“计算分辨率”需要确定频率采样两点之间的间隔 F , F 越小频谱越密,计算量也越大;
- (3) F 确定后,就可确定做 DFT 所需的点数 N ,即

$$N = \frac{f_s}{F}$$

为了使用后面一章将要介绍的基 2-FFT 算法,一般取 $N=2^M$,若点数 N 已给定且不能

再增加,可采用补零的方法使 N 为 2 的整次幂。

(4) f_s 和 N 确定后,则可确定所需的数据长度,即

$$T_p = \frac{N}{f_s} = NT_s$$

下面举两个例题具体说明。

3.7.4 MATLAB 实现

例 3-11 设 $x(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) + \sin(2\pi f_3 t)$, 其中 $f_1 = 2\text{Hz}$, $f_2 = 2.02\text{Hz}$, $f_3 = 2.07\text{Hz}$, 现用 $f_s = 10\text{Hz}$, 即 $T_s = 0.1\text{s}$ 对其进行采样。设 $T_p = 25.6\text{s}$, 即采样得 $x(n)$ 的点数为 256, 试分析若对 $x(n)$ 做 DFT 时, 能否分辨出 3 个频率分量?

解 因为信号的最高频率 $f_c \leq 3\text{Hz}$, 由采样定理可知, 不会发生混叠问题。

$F = \frac{f_s}{N} = \frac{10}{256} = 0.039\ 062\ 5\text{Hz}$, 对 $x(n)$ 做 DFT 求其频谱时, 幅频特性如图 3-27(a) 所示。

由于 $f_2 - f_1 = 0.02 < F$, 所以不能分辨出由 f_2 产生的正弦分量; 又由于 $f_3 - f_1 = 0.07 > F$, 所以能分辨出由 f_3 产生的正弦分量。

如果增加点数 N , 即增加数据的长度 T_p , 如令 $N = 1024$, 此时 $T_p = 1024 \times 0.1\text{s} = 102.4\text{s}$, 其幅频特性如图 3-27(b) 所示。可见, 此时可以分辨出 3 个频率分量。

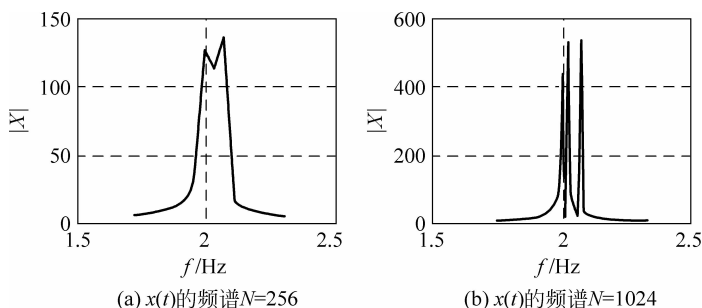


图 3-27 数据长度 N 的变化对 DTFT 分辨率的影响

MATLAB 实现程序如下:

```
% 观察数据长度 N 的变化对 DTFT 分辨率的影响
f1 = 2; f2 = 2.02; f3 = 2.07; fs = 10;
w = 2 * pi / fs; N = 256;
x = sin(w * f1 * (0:N-1)) + sin(w * f2 * (0:N-1)) + sin(w * f3 * (0:N-1));
f = 0:fs/N:fs/2 - fs/N;
X = fft(x); Y = abs(X);
subplot(211); plot(f(45:60), Y(45:60)); grid on;
N = N * 4;
x = sin(w * f1 * (0:N-1)) + sin(w * f2 * (0:N-1)) + sin(w * f3 * (0:N-1));
f = 0:fs/N:fs/2 - fs/N;
X = fft(x); Y = abs(X);
subplot(212); plot(f(45 * 4:4 * 60), Y(4 * 45:4 * 60)); grid on;
```

例 3-12 $x(n) = \cos(0.48\pi n) + \cos(0.52\pi n)$, 利用 MATLAB 程序求如下 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 。

- (1) 取 $x(n)$ 的前 10 点数据, 求 $N=10$ 点的 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 并作图;
- (2) 将 $x(n)$ 补零至 100 点, 求 $N=100$ 点的 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 并作图;
- (3) 取 $x(n)$ 的前 100 点数据, 求 $N=100$ 点的 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 并作图;
- (4) 取 $x(n)$ 的前 128 点数据, 求 $N=128$ 点的 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 并作图。

解 $x(n)$ 是由频率分别为 $\omega_1 = 0.48\pi$ 、 $\omega_2 = 0.52\pi$ 的周期序列叠加的周期序列, 该序列的基本周期可以采用求最小公倍数 $N = \frac{N_1 N_2}{\gcd(N_1, N_2)}$ 的方法来得到, 可求得其周期 $N=50$ 。

- (1) 求 $x(n)$ 的前 10 点数据对应的 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 。

MATLAB 程序如下:

```
n = [0:1:9]; x = cos(0.48 * pi * n) + cos(0.52 * pi * n);
w = [0:1:500] * 2 * pi / 500;
X = x * exp(-j * n' * w); % 用矩阵-向量乘法求 DTFT
magx = abs(X);
x1 = fft(x); magx1 = abs(x1(1:1:10));
k1 = 0:1:9; w1 = 2 * pi / 10 * k1;
subplot(3,1,1); stem(n,x); title('x(n), 0 ≤ n ≤ 9'); xlabel('n')
axis([0,10,-2.5,2.5]); line([0,10],[0,0]);
subplot(3,1,2); plot(w/pi,magx); title('DTFT 幅度'); xlabel('频率(单位: pi)'); axis([0,1,0,10])
subplot(3,1,3); stem(w1/pi,magx1); title('DFT 幅度');
xlabel('频率(单位: pi)'); axis([0,1,0,10])
```

$x(n)$ 的前 10 点数据对应的 $x(n)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 如图 3-28 所示。

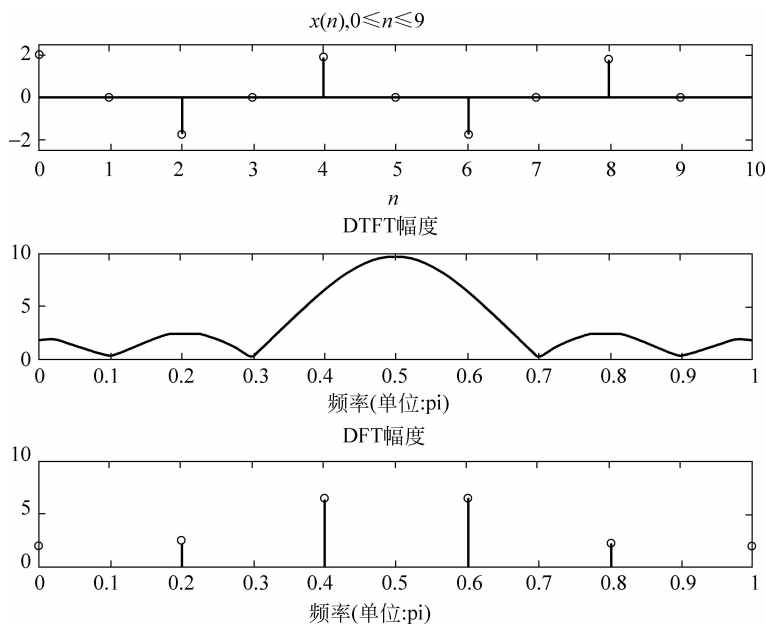


图 3-28 $x(n)$ 的前 10 点数据对应的 $x(n)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$

由图可见,由于截断函数的频谱混叠作用, $X(k)$ 不能正确分辨 $\omega_1=0.48\pi$ 、 $\omega_2=0.52\pi$ 这两个频率分量。

(2) 将 $x(n)$ 补零至100点,求 $N=100$ 点的 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 。

MATLAB 主要程序如下:

```
n = [0:1:9]; y = cos(0.48 * pi * n) + cos(0.52 * pi * n);
n1 = [0:1:99]; x = [y(1:1:10) zeros(1,90)];
w = [0:1:500] * 2 * pi / 500;
X = x * exp(-j * n1' * w); magx = abs(X);
x1 = fft(x); magx1 = abs(x1(1:1:50));
k1 = 0:1:49; w1 = 2 * pi / 100 * k1;
% 绘图语句略
```

$x(n)$ 补零至100点对应的 $x(n)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 如图3-29所示。由图可见,虽然 $x(n)$ 补零至100点,只是改变 $X(k)$ 的密度,截断函数的频谱混叠作用没有改变,这时的物理分辨率使 $X(k)$ 仍不能正确分辨 $\omega_1=0.48\pi$ 、 $\omega_2=0.52\pi$ 这两个频率分量。这说明,补零仅仅是提高了计算分辨率,得到的是高密度频谱,而得不到高分辨率谱。

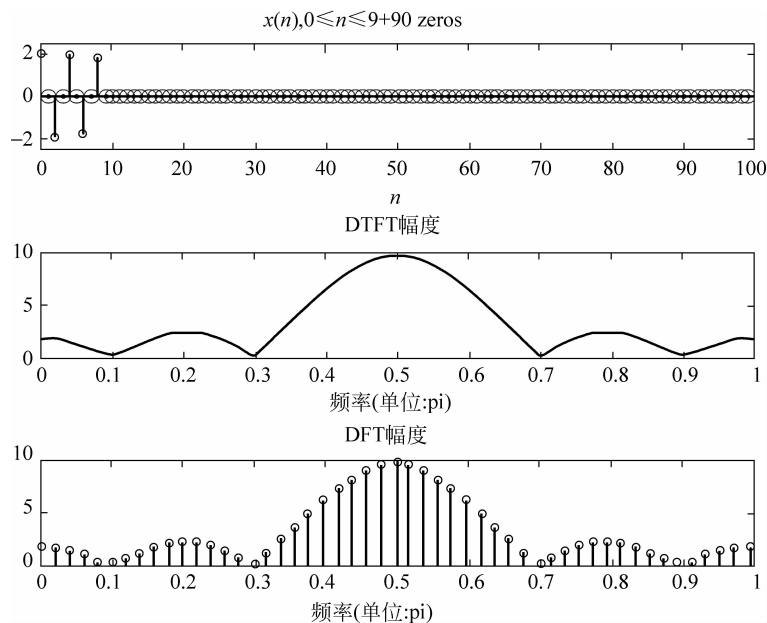


图 3-29 $x(n)$ 补零至100点对应的 $x(n)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$

(3) 取 $x(n)$ 的前100点数据,求 $N=100$ 点的 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 。

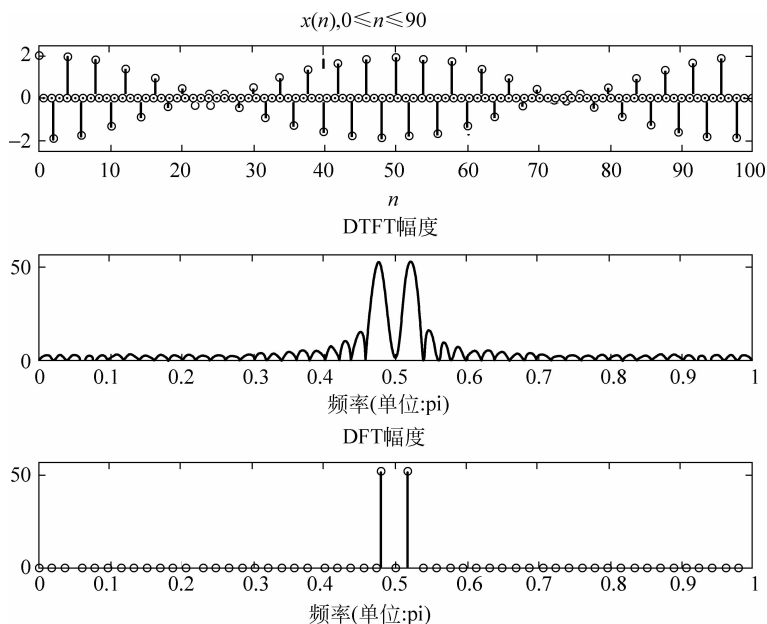
程序略。

100点 $x(n)$ 的数据对应的 $x(n)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 如图3-30所示。

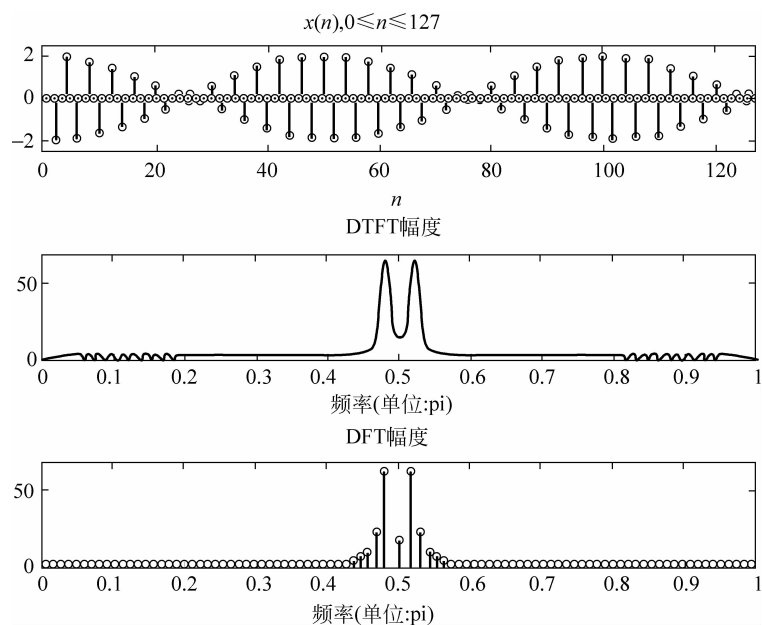
由图可见,截断函数的加宽且为周期序列的整数倍,改变了频谱混叠作用,提高了物理分辨率,使 $X(k)$ 能正确分辨 $\omega_1=0.48\pi$ 、 $\omega_2=0.52\pi$ 这两个频率分量。这说明通过增加数据的记录长度 T_p 来提高物理分辨率可以得到高分辨率谱。

(4) 取 $x(n)$ 的前128点数据,求 $N=128$ 点的 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 。

程序略。

图 3-30 100 点 $x(n)$ 对应的 $x(n)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$

128 点 $x(n)$ 的数据对应的 $x(n)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 如图 3-31 所示。

图 3-31 128 点 $x(n)$ 对应的 $x(n)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$

由图可见,截断函数虽然进一步加宽,但不是周期序列的整数倍,所以尽管 $X(k)$ 能正确分辨 $\omega_1 = 0.48\pi$ 、 $\omega_2 = 0.52\pi$ 这两个频率分量,但还呈现频谱泄露。

本章小结

1. 离散傅里叶变换(DFT)是有限长序列的傅里叶变换,其时域及频域都是离散的信号。这一对变换可表示为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

2. 归纳4种不同形式的傅里叶变换,有以下规律:如果信号频域是离散的,则表现为周期性的时间函数。相反,在时域上是离散的,则该信号在频域必然表现为周期性的频率函数。所以要讨论DFT,一般要先从周期性序列的离散傅里叶级数开始讨论,然后讨论可作为周期函数一个周期的有限长序列的离散傅里叶变换。

周期序列的离散傅里叶级数(DFS)的一对变换的表达式为

$$\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk}$$

$$\tilde{x}(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk}$$

3. 有限长序列 $x(n)$ 和周期序列之间的联系为

$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \text{或} \quad x(n) = \tilde{x}(n) R_N(n)$$

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN)$$

4. 离散傅里叶变换(DFT)与Z变换以及序列傅里叶变换(DTFT)的关系:

DFT与Z变换的关系—— $X(k) = X(z)|_{z=W_N^{-k}}$, 即 $X(k)$ 是Z变换在单位圆上的 N 点等间隔采样。

DFT与序列傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的关系—— $X(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$, 即 $X(k)$ 可以看作序列 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样,其采样间隔为 $\omega = \frac{2\pi}{N}$, 这就是DFT的物理意义。

5. DFT的主要性质有线性、圆周移位特性、圆周卷积、共轭对称性等。

6. 频域采样理论——抽样Z变换

对于 M 点的有限长序列 $x(n)$, 当频域采样点数 $N \geq M$ 时,即可由频域采样值 $X(k)$ 恢复出原序列 $x(n)$, 否则产生时域混叠现象,这就是所谓的频域采样定理。

用 N 个频域采样来恢复 $X(z)$ 的内插公式为

$$X(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1-W_N^{-k} z^{-1}}$$

7. 用DFT计算线性卷积:

设 $x_1(n)$ 是长度为 N_1 的有限长序列, $x_2(n)$ 是长度为 N_2 的有限长序列,它们的线性卷

积为

$$y_l(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^{N_1-1} x_1(m)x_2(n-m)$$

它们的圆周卷积为

$$y_c(n) = x_1(n) \otimes x_2(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m)x_2((n-m))_L \right] R_L(n)$$

线性卷积和圆周卷积的关系为

$$y_c(n) = \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n+rL) \right] R_L(n)$$

圆周卷积等于线性卷积而不产生混叠失真的充要条件是

$$L \geq N_1 + N_2 - 1$$

8. 用 DFT 进行频谱分析:

$$X_a(k) = T \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = T \cdot \text{DFT}[x(n)]$$

$$x(n) = x_a(nT) = \frac{1}{T} \text{IDFT}[X_a(k)]$$

即: 连续非周期信号的频谱可以通过对连续信号采样后进行 DFT 并乘以系数 T 的方法来近似得到, 而对该 DFT 值做反变换并除以系数 T 就得到时域采样信号。

利用 DFT 对连续非周期信号进行谱分析时, 时域与频域都要做抽样和截断, 所用到的相关公式为

$$T = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{NF} = \frac{T_p}{N}; \quad F = \frac{1}{T_p} = \frac{1}{NT} = \frac{f_s}{N}$$

要注意的是, 用 DFT 逼近连续非周期信号的傅里叶变换过程中除了对幅度的线性加权外, 由于用到了抽样与截断的方法, 因此也会带来一些可能产生的问题, 使谱分析产生误差。例如, 混叠效应、截断效应、栅栏效应等。

习题

3-1 计算以下序列的 N 点离散傅里叶变换。

(1) $x(n) = \delta(n - n_0)$

(2) $x(n) = R_4(n)$

(3) $x(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}nm}, \quad 0 \leq m < N$

(4) $x(n) = e^{j\omega_0 n} R_N(n)$

(5) $x(n) = \sin(\omega_0 n) \cdot R_N(n)$

3-2 长度为 $N=10$ 的两个有限长序列

$$x_1(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & 5 \leq n \leq 9 \end{cases}; \quad x_2(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ -1, & 5 \leq n \leq 9 \end{cases}$$

试分别用图解法和列表法求 $y(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$ 。

3-3 设 $x(n) = R_4(n)$, $\tilde{x}(n) = x((n))_6$, 试求 $\tilde{X}(k)$, 并画出 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{X}(k)$ 的图形。

3-4 证明 DFT 的对称定理,即假设 $X(k)=\text{DFT}[x(n)]$,试证明:

$$\text{DFT}[X(n)] = Nx(N-k)$$

3-5 证明离散傅里叶变换的下列对称性质。

$$(1) x^*(n) \leftrightarrow X^*((-k))_NR_N(k)$$

$$(2) x^*((-n))_NR_N(n) \leftrightarrow X^*(k)$$

$$(3) \text{Re}[x(n)] \leftrightarrow X_{\text{ep}}(k)$$

$$(4) \text{jIm}[x(n)] \leftrightarrow X_{\text{op}}(k)$$

3-6 证明若 $x(n)$ 实偶对称,即 $x(n)=x(N-n)$,则 $X(k)$ 也实偶对称;若 $x(n)$ 实奇对称,即 $x(n)=-x(N-n)$,则 $X(k)$ 为纯虚函数并奇对称。(注: $X(k)=\text{DFT}[x(n)]$)

3-7 已知长为 N 的有限长序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的关系为 $x_2(n)=x_1(N-1-n)$ 。设 $\text{DFT}[x_1(n)]=X_1(k)$,试证明 $\text{DFT}[x_2(n)]=W_N^{-k}X_1(-k)$ 。

3-8 已知序列 $x(n)=a^nu(n)$, $0 < a < 1$,对 $x(n)$ 的 Z 变换 $X(z)$ 在单位圆上等间隔采样 N 点,采样值为

$$X(k) = X(z) \big|_{z=W_N^{-k}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

求有限长序列 $\text{IDFT}[X(k)]$ 。

3-9 已知两个序列 $x(n)=\{1,2,3,4,5,0,0\}$, $y(n)=\{1,1,1,1,0,0,0\}$,试求:

(1) 它们的周期卷积(周期长度为 $N=7$);

(2) 它们的圆周卷积(序列长度为 $N=7$);

(3) 用圆周卷积定理求这两个序列的线性卷积,它与上述两结果又有何不同(请用 $N_1=5$ 和 $N_2=4$ 来做)?

3-10 已知两个序列 $x(n)=n+1, 0 \leq n \leq 3$, $y(n)=(-1)^n, 0 \leq n \leq 3$,用圆周卷积法求这两个序列的线性卷积。

3-11 已知两个序列 $x_1(n)=(0.5)^nR_4(n)$, $x_2(n)=R_4(n)$,求它们的线性卷积以及 4 点、6 点和 8 点的圆周卷积。

3-12 已知 $x(n)$ 是长度为 N 的有限长序列, $X(k)=\text{DFT}[x(n)]$,现将长度扩大 r 倍,得长度为 rN 的有限长序列 $y(n)$ 为

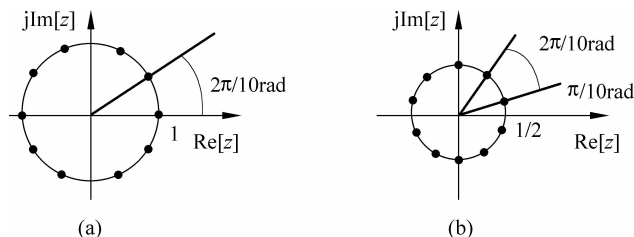
$$y(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq rN-1 \end{cases}$$

求 $\text{DFT}[y(n)]$ 与 $X(k)$ 的关系。

3-13 有限宽序列的离散傅里叶变换相当于其 Z 变换在单位圆上的取样。例如 10 点序列 $x(n)$ 的离散傅里叶变换相当于 $X(z)$ 在单位圆 10 个均分点上的取样,如图题 3-13(a) 所示,希望求出图题 3-13(b) 所示圆周上 $X(z)$ 的等间隔取样,即 $X(z) \big|_{z=0.5e^{j[(2k\pi/10)+(\pi/10)]}}$,如何修改 $x(n)$,才能得到序列 $x_1(n)$,使其离散傅里叶变换相当于上述的 $X(z)$ 取样。

3-14 (1) 模拟数据以 10.24kHz 速率采样,且计算了 1024 个采样的离散傅里叶变换。求频谱采样之间的频率间隔。

(2) 以上数字数据经处理以后又进行了离散傅里叶反变换,求离散傅里叶反变换后采样点的间隔是多少? 整个 1024 点的时宽为多少?



图题 3-13

3-15 若 $x(n)$ 表示长度为 $N=8$ 点的有限长序列, $y(n)$ 表示长度为 $N=20$ 点的有限长序列, $R(k)$ 为两个序列 20 点的离散傅里叶变换相乘, 求 $r(n)$, 并指出 $r(n)$ 的哪些点与 $x(n)$ 、 $y(n)$ 的线性卷积相等。

3-16 两个有限长序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的零值区间为

$$x(n) = 0, \quad n < 0, 8 \leq n$$

$$y(n) = 0, \quad n < 0, 20 \leq n$$

对每个序列作 20 点 DFT, 即

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)], \quad k = 0, 1, \dots, 19$$

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)], \quad k = 0, 1, \dots, 19$$

如果

$$F(k) = X(k) \cdot Y(k) \quad k = 0, 1, \dots, 19$$

$$f(n) = \text{IDFT}[F(k)], \quad k = 0, 1, \dots, 19$$

试问在哪些点上 $f(n) = x(n) * y(n)$? 为什么?

3-17 已知序列 $x(n)$ 的长度为 120 点, 序列 $y(n)$ 的长度为 185 点, 若计算 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的 256 点圆周卷积, 试分析结果中相当于 $x(n)$ 与 $y(n)$ 的线性卷积的范围是多少?

3-18 已知一个有限长序列为 $x(n) = \delta(n-2) + 3\delta(n-4)$

(1) 求它的 8 点离散傅里叶变换 $X(k)$;

(2) 已知序列 $y(n)$ 的 8 点离散傅里叶变换为 $Y(k) = W_8^{4k} X(k)$, 求序列 $y(n)$ 。

3-19 用微处理机对实数序列作谱分析, 要求谱分辨率 $F \leq 50\text{Hz}$, 信号最高频率为 1kHz, 试确定以下各参数:

(1) 最小记录时间 T_{pmin} ; (2) 最大取样间隔 T_{max} ; (3) 最少采样点数 N_{min} ;

(4) 在频带宽度不变的情况下, 将频谱分辨率提高一倍的 N 值。

3-20 已知调幅信号的载波频率 $f_c = 1\text{kHz}$, 调制信号频率 $f_m = 100\text{Hz}$, 用 FFT 对其进行谱分析, 试确定以下各参数:

(1) 最小记录时间 T_p ; (2) 最低采样频率 f_s ; (3) 最少采样点 N 。

3-21 若 $x_1(n)$ 是长度为 50 点的有限长序列, 非零区间为 $0 \leq n \leq 49$, $x_2(n)$ 是长度为 15 点的有限长序列, 非零区间为 $5 \leq n \leq 19$, 两序列做 50 点的圆周卷积, 即

$$y(n) = \sum_{m=0}^{49} x_1(m) x_2((n-m))_{50} R_{50}(n)$$

指出 $y(n)$ 的哪些点与 $x_1(n) * x_2(n)$ 的结果相等。

3-22 以 20kHz 的采样率对最高频率为 10kHz 的带限信号 $x_a(t)$ 采样, 然后计算

$x(n)$ 的 $N=1000$ 个采样点的 DFT,即

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad N = 1000$$

试求:

(1) $k=150$ 对应的模拟频率是多少? $k=800$ 呢?

(2) 频谱采样点之间的间隔是多少?

3-23 假设以 8kHz 速率对一段长为 10 秒的语音信号采样,现用一个长度为 $L=64$ 的 FIR 滤波器 $h(n)$ 对其进行滤波,若采用 DFT 为 1024 点的重叠保留法,那么共需要多少次 DFT 变换和多少次 IDFT 变换来进行卷积?

3-24 对一个连续时间信号 $x(t)$ 进行采样,采样频率为 8192Hz,共采样 500 点,得到一个有限长序列 $x(n)$,试分析:

(1) 通过 DFT 方法来分析该序列在 800Hz 频率处的频率特性,应如何做?

(2) 如果只能一次进行 256 点数值的 FFT 运算,用什么办法能实现信号 $x(n)$ 的谱分析?