

第5章 图像恢复

5.0.1 什么是图像恢复？

图像恢复是利用客观准则以及图像看起来应该如何的先验知识而对图像进行的改善。

5.0.2 为什么图像需要恢复？

一幅图像可能会因为像素的灰度值被改变而退化，或因为像素的位置从正确位置被移动出去而失真。第2种情况是几何恢复要处理的，它是图像配准的一种类型。

5.0.3 什么是图像配准？

图像配准要建立两幅描述相同场景的图像中像素间的对应关系，其基础是对应像素源于成像场景中的同一个物理片。图像配准是一个很宽泛的主题，其应用包括医学图像处理、遥感和多视视觉，它的内容超出了本书的范围。

5.0.4 图像恢复是如何进行的？

灰度值的恢复可以模型化为一个线性过程，此时它可用线性方法来解决。如果退化是均匀的，即退化模型对整幅图像一致，那么问题就变成定义一个恰当的卷积滤波器，用它来处理退化的图像以消除退化。对线性但不均匀的退化，可以寻找一个线性的解，但它不能表示成简单的卷积形式。对一般的退化过程，其中线性和非线性效果都起作用，那么就需要使用非线性方法。

5.0.5 图像增强和图像恢复的区别是什么？

在图像增强中，试图使用主观准则来改善图像，而在图像恢复中，试图使用客观准则通过将图像遭受的特定损伤反方向纠正过来。

5.1 齐次线性图像恢复：逆滤波

5.1.1 如何对齐次线性图像退化建模？

在引起图像损坏的效果是线性的假设下，可以使用式(1.15)。在连续域，输出图像 $g(\alpha, \beta)$ 可借助输入图像 $f(x, y)$ 写成：

$$g(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) h(x, \alpha, y, \beta) dx dy \quad (5.1)$$

其中 $h(x, \alpha, y, \beta)$ 是表示退化效果的点扩散函数。如果这个效果对整幅图像都一样，则点扩散函数是移不变的，式 (1.17) 成立。那么，就可以将退化图像模型化为未退化图像 $f(x, y)$ 和退化过程的点扩散函数 $h(x, \alpha, y, \beta)$ 的卷积：

$$g(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) h(\alpha - x, \beta - y) dx dy \quad (5.2)$$

考虑各个函数的傅里叶变换，可以写成

$$\hat{G}(u, v) = \hat{F}(u, v) \hat{H}(u, v) \quad (5.3)$$

其中 $\hat{F}$ ， $\hat{G}$ 和 $\hat{H}$ 分别是函数 f ， g 和 h 的傅里叶变换。

5.1.2 图像恢复问题可如何解决？

如果有点扩散函数的先验知识，或有退化过程的傅里叶变换（频率响应函数），则图像恢复问题可以解决。

5.1.3 如何可以获得退化过程的频率响应函数 $\hat{H}(u, v)$ 的信息？

1. 根据导致退化的物理过程的知识。例如，如果退化是由于衍射造成的，则 $\hat{H}(u, v)$ 可以计算。类似地，如果退化是由于大气湍流或运动造成的，则可对物理过程建模并计算 $\hat{H}(u, v)$ 。

2. 可以从图像本身提取 $\hat{H}(u, v)$ 或 $h(\alpha - x, \beta - y)$ 的信息，即考虑退化在图像中某些已知目标上造成的效果，而不考虑所发生物理过程的本质。

例 5.1

当记录某个静止的场景时，相机有平行于图像平面 (x, y) 的水平运动。这个运动看起来像场景在 x 和 y 方向移动了一段距离，它们是时间 t 的函数， $x_0(t)$ 和 $y_0(t)$ 。设相机的光圈在 $t=0$ 到 $t=T$ 间是打开的，其中 t 是正实数。借助场景密度函数 $f(x, y)$ 写出描述在像素位置 (x, y) 的密度记录。

在记录媒介（如胶片）上任何点的总曝光时间都是 T ，而模糊的图像为：

$$g(x, y) = \int_0^T f[x - x_0(t), y - y_0(t)] dt \quad (5.4)$$

该方程表明与点 (x, y) 距离足够近的所有点在时间间隔 T 中都会移过点 (x, y) ，它们的值都会被处在位置 (x, y) 的传感器记录下来和累积起来。

例 5.2

对例 5.1 的情况，推导可用来对图像由于相机运动而遭受的退化进行建模的频率响应函数，假设退化是线性的，具有移不变的点扩散函数。

考虑定义在例 5.1 中的 $g(x, y)$ 的傅里叶变换 $\hat{G}(u, v)$ ：

$$\hat{G}(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) e^{-2\pi j(ux + vy)} dx dy \quad (5.5)$$

如果将式 (5.4) 代入式 (5.5), 得到:

$$\hat{G}(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T f[x - x_0(t), y - y_0(t)] dt e^{-2\pi j(ux + vy)} dx dy \quad (5.6)$$

改变积分的顺序, 得到:

$$\hat{G}(u, v) = \int_0^T \underbrace{\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f[x - x_0(t), y - y_0(t)] e^{-2\pi j(ux + vy)} dx dy \right\}}_{\text{这是分别在 } x \text{ 和 } y \text{ 方向移动了 } x_0 \text{ 和 } y_0 \text{ 的函数的傅里叶变换}} dt \quad (5.7)$$

式 (2.241) 已证明一个平移函数的傅里叶变换和未平移函数的傅里叶变换有如下关系:

$$\text{平移函数的 } FT = (\text{未平移函数的 } FT) e^{-2\pi j[ux_0(t) + vy_0(t)]} \quad (5.8)$$

所以

$$\hat{G}(u, v) = \int_0^T \hat{F}(u, v) e^{-2\pi j[ux_0(t) + vy_0(t)]} dt \quad (5.9)$$

其中 $\hat{F}(u, v)$ 是场景密度函数 $f(x, y)$ 的傅里叶变换, 即未模糊的图像。 $\hat{F}(u, v)$ 与时间独立, 所以它可从积分中提出来:

$$\hat{G}(u, v) = \hat{F}(u, v) \int_0^T e^{-2\pi j[ux_0(t) + vy_0(t)]} dt \quad (5.10)$$

比较该式与式 (5.3), 可总结出:

$$\hat{H}(u, v) = \int_0^T e^{-2\pi j[ux_0(t) + vy_0(t)]} dt \quad (5.11)$$

例 5.3

假设在例 5.1 中的运动仅沿 x 方向且速度为常数 α / T , 即 $y_0(t) = 0$, $x_0(t) = \alpha / T$ 。计算导致产生运动模糊过程的频率响应函数。

在式 (5.11) 中, 替换进 $y_0(t)$ 和 $x_0(t)$ 得到:

$$\begin{aligned} \hat{H}(u, v) &= \int_0^T e^{-2\pi j u \frac{\alpha t}{T}} dt = \left. \frac{e^{-2\pi j u \frac{\alpha t}{T}}}{-2\pi j u \frac{\alpha}{T}} \right|_0^T = -\frac{T}{2\pi j u \alpha} [e^{-2\pi j u \alpha} - 1] \\ &= \frac{T}{2\pi j u \alpha} [1 - e^{-2\pi j u \alpha}] = \frac{T e^{-\pi j u \alpha}}{2\pi j u \alpha} [e^{\pi j u \alpha} - e^{-\pi j u \alpha}] \\ &= \frac{T e^{-\pi j u \alpha} 2j \sin(\pi u \alpha)}{2\pi j u \alpha} = T \frac{\sin(\pi u \alpha)}{\pi u \alpha} e^{-j \pi u \alpha} \end{aligned} \quad (5.12)$$

例 B5.4

在时间间隔 T 中, 相机的快门一直打开, 相机的运动使得场景中的目标看起来从 0 位移开始以初始速度 s_0 和加速度 2α 沿 y 轴正方向运动。推导此种情况下退化过程的频率响应函数。

在这种情况下, 式 (5.11) 中的 $x_0(t) = 0$, 且

$$\frac{d^2 y_0}{dt^2} = 2\alpha \Rightarrow \frac{dy_0}{dt} = 2\alpha t + b \Rightarrow y_0(t) = \alpha t^2 + bt + c \quad (5.13)$$

其中 b 和 c 是积分常数, 可用问题的初始条件来确定。现有下列初始条件:

$$t=0 \quad \text{零移动, 即 } c=0 \quad (5.14)$$

$$t=0 \quad \text{移动速度} = s_0 \Rightarrow b = s_0$$

所以

$$y_0(t) = \alpha t^2 + s_0 t \quad (5.15)$$

将 $x_0(t)$ 和 $y_0(t)$ 代入式 (5.11) 计算 $\hat{H}(u, v)$:

$$\begin{aligned} \hat{H}(u, v) &= \int_0^T e^{-2\pi j v (\alpha t^2 + s_0 t)} dt \\ &= \int_0^T \cos[2\pi v \alpha t^2 + 2\pi v s_0 t] dt - j \int_0^T \sin[2\pi v \alpha t^2 + 2\pi v s_0 t] dt \end{aligned} \quad (5.16)$$

可以借助下列公式:

$$\begin{aligned} \int \cos(ax^2 + bx + c) dx &= \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \left\{ \cos \frac{ac-b^2}{a} C\left(\frac{ax+b}{\sqrt{a}}\right) - \sin \frac{ac-b^2}{a} S\left(\frac{ax+b}{\sqrt{a}}\right) \right\} \\ \int \sin(ax^2 + bx + c) dx &= \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \left\{ \cos \frac{ac-b^2}{a} S\left(\frac{ax+b}{\sqrt{a}}\right) + \sin \frac{ac-b^2}{a} C\left(\frac{ax+b}{\sqrt{a}}\right) \right\} \end{aligned} \quad (5.17)$$

其中 $S(x)$ 和 $C(x)$ 是:

$$\begin{aligned} S(x) &\equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin(t^2) dt \\ C(x) &\equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos(t^2) dt \end{aligned} \quad (5.18)$$

且被称为菲涅耳积分。

使用上述公式, 且取:

$$\begin{aligned} a &\rightarrow 2\pi v \alpha \\ b &\rightarrow 2\pi v s_0 \\ c &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

以得到

$$\begin{aligned} \hat{H}(u, v) &= \frac{1}{2\sqrt{v\alpha}} \left\{ \cos \frac{2\pi v s_0^2}{\alpha} C\left(\sqrt{2\pi v} \frac{\alpha t + s_0}{\sqrt{\alpha}}\right) - \sin\left(-\frac{2\pi v s_0^2}{\alpha}\right) S\left(\sqrt{2\pi v} \frac{\alpha t + s_0}{\sqrt{\alpha}}\right) \right. \\ &\quad \left. - j \cos \frac{2\pi v s_0^2}{\alpha} S\left(\sqrt{2\pi v} \frac{\alpha t + s_0}{\sqrt{\alpha}}\right) - j \sin\left(-\frac{2\pi v s_0^2}{\alpha}\right) C\left(\sqrt{2\pi v} \frac{\alpha t + s_0}{\sqrt{\alpha}}\right) \right\} \Bigg|_0^T \\ &= \frac{1}{2\sqrt{v\alpha}} \left\{ \cos \frac{2\pi v s_0^2}{\alpha} \left[C\left(\frac{\sqrt{2\pi v}}{\alpha} (\alpha T + s_0)\right) - j S\left(\frac{\sqrt{2\pi v}}{\alpha} (\alpha T + s_0)\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sin \frac{2\pi v s_0^2}{\alpha} \left[S\left(\frac{\sqrt{2\pi v}}{\alpha} (\alpha T + s_0)\right) - j C\left(\frac{\sqrt{2\pi v}}{\alpha} (\alpha T + s_0)\right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\cos \frac{2\pi v s_0^2}{\alpha} \left[C\left(\sqrt{\frac{2\pi v}{\alpha}} s_0\right) - jS\left(\sqrt{\frac{2\pi v}{\alpha}} s_0\right) \right] \\
& -\sin \frac{2\pi v s_0^2}{\alpha} \left[S\left(\sqrt{\frac{2\pi v}{\alpha}} s_0\right) + jC\left(\sqrt{\frac{2\pi v}{\alpha}} s_0\right) \right] \} \quad (5.20)
\end{aligned}$$

例 B5.5

对例 5.4 的情况，如果快门在很长一段时间保持打开，移动的初始速度可以忽略，计算频率响应函数。

已知式 (5.20) 中的函数 $S(x)$ 和 $C(x)$ 具有如下渐近行为：

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) &= \frac{1}{2} \\
\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) &= \frac{1}{2} \\
\lim_{x \rightarrow 0} S(x) &= 0 \\
\lim_{x \rightarrow 0} C(x) &= 0
\end{aligned} \quad (5.21)$$

所以，对 $s_0 \approx 0$ 和 $T \rightarrow +\infty$ ，有：

$$\begin{aligned}
C\left(\sqrt{\frac{2\pi v}{\alpha}}(\alpha T + s_0)\right) &\rightarrow \frac{1}{2} & C\left(\sqrt{\frac{2\pi v}{\alpha}} s_0\right) &\rightarrow 0 \\
S\left(\sqrt{\frac{2\pi v}{\alpha}}(\alpha T + s_0)\right) &\rightarrow \frac{1}{2} & S\left(\sqrt{\frac{2\pi v}{\alpha}} s_0\right) &\rightarrow 0 \\
\cos \frac{2\pi v s_0^2}{\alpha} &\rightarrow 1 & \sin \frac{2\pi v s_0^2}{\alpha} &\rightarrow 0
\end{aligned} \quad (5.22)$$

所以，式 (5.20) 成为：

$$\hat{H}(u, v) \approx \frac{1}{2\sqrt{v\alpha}} \left[\frac{1}{2} - j\frac{1}{2} \right] = \frac{1-j}{4\sqrt{v\alpha}} \quad (5.23)$$

例 B5.6

在时间间隔 T 中，相机的快门一直打开，相机的运动使得场景中的目标看起来开始以初始速度 0 和加速度 2α 沿 y 轴正方向运动，直到时刻 T_1 后运动速度成为常数。推导此种情况下退化过程的频率响应函数。

根据例 5.4 的符号表示， $s_0 = 0$ ，式 (5.15) 成为 $y_0(t) = \alpha t^2$ 。 $y_0(t)$ 的一阶导数是时刻 t 的运动速度。在匀加速运动阶段的最后速度为：

$$s_1 \equiv \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=T_1} = 2\alpha T_1 \quad (5.24)$$

接下来，使用例 5.2 和例 5.4 的结果，并对 $s_0 = 0$ 使用式 (5.21)，则导致运动模糊的频率响应函数为：

$$\begin{aligned}
\hat{H}(u, v) &= \int_0^{T_1} e^{-2\pi j v \alpha t^2} dt + \int_{T_1}^T e^{-2\pi j v s_1 t} dt \\
&= \frac{1}{2\sqrt{v\alpha}} \left\{ C(\sqrt{2\pi v\alpha} T_1) - jS(\sqrt{2\pi v\alpha} T_1) \right\} - \frac{e^{-2\pi j v s_1 t}}{2\pi j v s_1} \Big|_{T_1}^T \\
&= \frac{1}{2\sqrt{v\alpha}} \left\{ C(\sqrt{2\pi v\alpha} T_1) - jS(\sqrt{2\pi v\alpha} T_1) \right\} - \frac{1}{2\pi j v s_1} \{ e^{-2\pi j v s_1 T} - e^{-2\pi j v s_1 T_1} \} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{v\alpha}} \left\{ C(\sqrt{2\pi v\alpha} T_1) - jS(\sqrt{2\pi v\alpha} T_1) \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2\pi j v s_1} \{ \cos(2\pi v s_1 T) - j\sin(2\pi v s_1 T) - \cos(2\pi v s_1 T_1) + j\sin(2\pi v s_1 T_1) \} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{v\alpha}} C(\sqrt{2\pi v\alpha} T_1) + \frac{1}{4\pi v \alpha T_1} [\sin(4\pi v \alpha T_1 T) - \sin(4\pi v \alpha T_1^2)] \\
&\quad - j \frac{1}{2\sqrt{v\alpha}} S(\sqrt{2\pi v\alpha} T_1) + j \frac{1}{4\pi v \alpha T_1} [\cos(4\pi v \alpha T_1 T) - \cos(4\pi v \alpha T_1^2)] \quad (5.25)
\end{aligned}$$

例 B5.7

解释如何从天文图像推断其退化过程的点扩散函数。

根据定义，点扩散函数是当输入为点源时的成像系统输出。在一幅天文图像中，一个非常远的星座可看成一个点源。通过测量一个星座的亮度剖面，可以直接得到该星座所受到的退化过程的点扩散函数。

例 B5.8

假设场景中有一条平行于图像 x 轴的理想亮直线。利用这个信息推导能使采集图像发生退化的过程的点扩散函数。

数学上说，一条亮直线的未退化图像可表示成：

$$f(x, y) = \delta(y) \quad (5.26)$$

其中假设直线与 x 轴重合。该直线的图像应该是：

$$h_l(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x - x', y - y') \delta(y') dy' dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x - x', y) dx'$$

替换变量 $\tilde{x} \equiv x - x' \Rightarrow dx' = -d\tilde{x}$ 。 $\tilde{x}$ 的积分限是从 $+\infty$ 到 $-\infty$ 。所以，

$$h_l(x, y) = - \int_{+\infty}^{-\infty} h(\tilde{x}, y) d\tilde{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tilde{x}, y) d\tilde{x} \quad (5.27)$$

上式的右边并不依赖于 x ，所以左边也不会依赖。这表明直线的图像将平行于 x 轴（甚至与其重合），且它的剖面沿 x 轴将是常数：

$$h_l(x, y) = h_l(y) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tilde{x}, y) d\tilde{x}}_{\tilde{x} \text{ 是一个哑变量, 独立于 } x} \quad (5.28)$$

计算 $h_l(y)$ 的傅里叶变换：

$$\hat{H}_l(v) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} h_l(y) e^{-2\pi jvy} dy \quad (5.29)$$

点扩散函数的傅里叶变换是频率响应函数, 它由下式给出:

$$\hat{H}(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) e^{-2\pi j(ux+vy)} dx dy \quad (5.30)$$

在这个表达中取 $u = 0$, 得到:

$$\hat{H}(0, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) dx \right]}_{\text{式(5.28)的 } h_l(y)} e^{-2\pi jvy} dy \quad (5.31)$$

将式 (5.29) 与式 (5.31) 比较, 得到:

$$\hat{H}(0, v) = \hat{H}_l(v) \quad (5.32)$$

该方程称为**傅里叶层定理**。该定理指出, 取一个函数 $h(x, y)$ 的傅里叶变换的一层 (即令 $\hat{H}(u, v)$ 中的 $u = 0$), 可以获得该函数沿对应方向 (本例中 y 轴) 投影的傅里叶变换 (即 $\hat{H}_l(u)$)。接下来进行反傅里叶变换, 可以得到函数 (即 $h_l(y)$) 沿那个方向的投影。

这说明, 理想直线的图像提供了点扩散函数沿单个方向 (即与直线正交的方向) 的剖面。这可以理解, 因为与一条线的长度正交的截面与一个点的截面没有区别。根据定义, 一个点图像的截面就是模糊过程的点扩散函数。如果在图像中有很多不同方向的理想直线, 那么就可获得在频域中与这些线正交方向上频率响应函数的信息。通过插值可以在频域上的任何点计算 $\hat{H}(u, v)$ 。

例 B5.9

已知某个场景中有一个尖锐的边缘。如何能用边缘的图像来推断成像装置的点扩散函数?

假设理想边缘可用一个沿 x 轴的阶跃函数表示, 该阶跃函数定义为:

$$u(y) = \begin{cases} 1 & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases} \quad (5.33)$$

该函数的图像是:

$$h_e(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-x', y-y') u(y') dx' dy' \quad (5.34)$$

定义新变量 $\tilde{x} \equiv x - x'$, $\tilde{y} \equiv y - y'$ 。则 $dx' = -d\tilde{x}$, $dy' = -d\tilde{y}$ 。 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 的积分限都是从 $+\infty$ 到 $-\infty$ 。所以,

$$h_e(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tilde{x}, \tilde{y}) u(y - \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y} \quad (5.35)$$

计算该方程两边对 y 的偏导数。利用莱布尼茨规则 (见 B4.9), 取 $\lambda = y$, $a(\lambda) = -\infty$ 和 $b(\lambda) = +\infty$:

$$\frac{\partial h_e(x, y)}{\partial y} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tilde{x}, \tilde{y}) \frac{\partial u(y - \tilde{y})}{\partial y} d\tilde{x} d\tilde{y} \quad (5.36)$$

已知一个阶跃函数对它自变量的导数是一个德尔塔函数:

$$\frac{\partial h_e(x,y)}{\partial y} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tilde{x},\tilde{y})\delta(y-\tilde{y})d\tilde{x}d\tilde{y} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tilde{x},y)d\tilde{x} \tag{5.37}$$

如果比较式 (5.37) 和式 (5.27)，可以发现边缘图像的导数就是平行于边缘的线的图像。所以可以通过获取在不同朝向的理想阶跃边缘的图像来获得有关成像过程的点扩散函数的信息。每个这样的图像都要沿与边缘方向正交的方向求导。每个这样得到的导数图像需要看作一条理想直线的图像，并用来产生沿与直线正交方向的点扩散函数，如例 5.8 所示。

例 B5.10

使用例 5.9 的方法推导你的手机上相机的点扩散函数。
使用尺子和黑墨水画一个如图 5.1 (a) 的绘图。

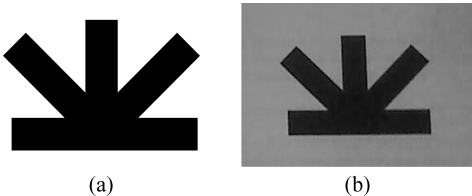


图 5.1 (a) 一个测试绘图，用于推导一个成像装置的点扩散函数。(b) 测试绘图的图像 (尺寸为 200×284)，用一个摩托罗拉 U9 手机上的相机采集

这个绘图可用来测量成像系统在朝向为 0°、45°、90°和 135°的点扩散函数。首先，用手机数字相机对测试绘图成像。图像如图 5.1 (b) 所示。接着，在 0°、45°、90°和 135°的方向上用罗宾森算子计算图像的偏导数。这些算子如图 5.2 所示。

1	2	1
0	0	0
-1	-2	-1

(a) M0

2	1	0
1	0	-1
0	-1	-2

(b) M1

1	0	-1
2	0	-2
1	0	-1

(c) M2

0	-1	-2
1	0	-1
2	1	0

(d) M3

图 5.2 用于计算一幅图像沿 0°、45°、90°和 135°方向上导数的滤波器

沿与原始边缘正交的若干直线计算结果图像的剖面，并平均起来以得到对应 0°、45°、90°和 135°的 4 个平面，如图 5.3 (a) 所示。这些图是点扩散函数的剖面。但是，它们看起来还不是非常满意。首先，它们没有相同的峰值。这里的原因是：一旦原始图像被阈值化，由于背景的照明是变化的，所以“白”背景在图像的左边和右边有不同的值。这种情况下如果使用平场校正就比较有用。其次，测试绘图的边缘并没有很好地与图像轴对齐。这样，当边缘没有与所选方向很好对齐的情况下，对若干剖面求平均将会使点扩散函数看起来比较宽。为避免这两个问题，仅从卷积图像的左边选取截面，并只用单个截面以避免错误配准的影响。所获得的点扩散函数的剖面见图 5.4。将对应朝向 45°和 135°的剖面单独画出来，因为沿这些方向的像素间距离是沿 0°和 90°方向的像素间距离的 $\sqrt{2}$

倍。如此，与峰相距 1 个像素距离的点扩散函数的值实际上约为 1.4 个像素距离。事实上，如果计算两对剖面的宽度的比值，该值约为 1.4。在实际应用中，(i) 变化照明的效果将靠用更细致的场景照明来克服，(ii) 将构建若干个剖面，按亚像素精度进行配准，并平均起来以产生点扩散函数的剖面，用于图像恢复。

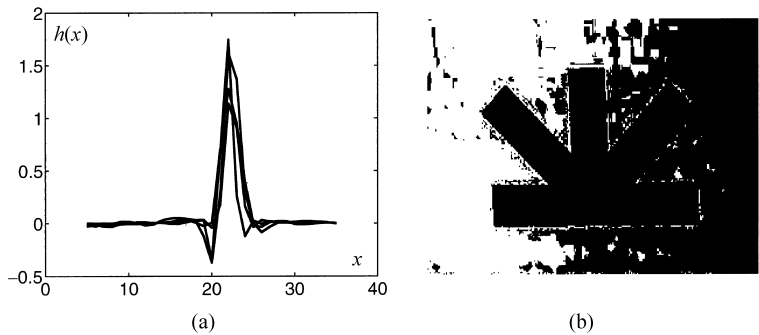


图 5.3 (a) 当卷积图像的若干个截面平均后得到的点扩散函数。(b) 取阈值后的图 5.1 (b)，从中可看到背景受到变化照明的问题。所使用的阈值是 137

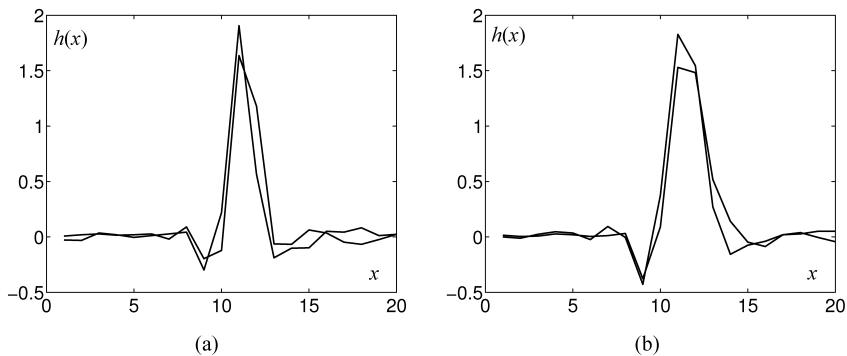


图 5.4 仅考虑单个截面得到的点扩散函数。(a) 45°和 135°。(b) 0°和 90°

注意，除去手机常不具备高质量的相机这一因素外，采集的图像被有损压缩也是一个原因，所计算出来的点扩散函数反映了所有这些图像的缺陷。

在实际应用中，如果这 4 个剖面被发现很相似，它们就被平均以产生旋转对称的点扩散函数的单个截面。这个 2-D 函数的傅里叶变换就是成像装置的频率响应函数。

5.1.4 如果已知退化过程的频率响应函数，解决图像恢复的问题是否很容易？

如果知道了退化的频率响应函数并计算了退化图像的傅里叶变换，如式 (5.3)，那么很容易得到未退化图像的傅里叶变换：

$$\hat{F}(u,v)=\frac{\hat{G}(u,v)}{\hat{H}(u,v)} \tag{5.38}$$

接着, 通过计算 $\hat{F}(u, v)$ 的傅里叶反变换, 将可以恢复所需要的 $f(x, y)$ 。但是, 这种直接的方法会产生不可接受的差结果。

5.1.5 在频率响应函数为零处, 频率会发生什么情况?

在 (u, v) 平面上的某些点 $\hat{H}(u, v)$ 有可能成为 0, 根据式 (5.3), 这表示 $\hat{G}(u, v)$ 也会在相同的点成为 0。式 (5.38) 中的比值 $\hat{G}(u, v) / \hat{H}(u, v)$ 将是 $0/0$, 不确定。所有这些都表明对特殊的频率 (u, v) , 原始图像的频率内容不能被恢复过来。为克服这个问题, 可以简单地消除频率平面上的对应点, 只要它们的个数是有限的。

5.1.6 频率响应函数和图像的零点总相同吗?

否。如果式 (5.3) 中有一点点噪声, $\hat{H}(u, v)$ 的零点将不会与 $\hat{G}(u, v)$ 的零点重合。尽管式 (5.38) 的分子非常小, 只要分母变成 0, 结果就是无穷大。这表明图像处理消除的频率将会无穷放大。考虑产生整数值图像的数字化过程, 则 $\hat{G}(u, v)$ 总会有噪声。

5.1.7 如何避免噪声的放大?

在很多情况下, $|\hat{H}(u, v)|$ 的值在离开原点时会很快下降, 而 $|\hat{N}(u, v)|$ 的值会或多或少保持常数。当使用式 (5.38) 时为避免对噪声的放大, 不使用滤波因子 $1/\hat{H}(u, v)$, 而是它的一个加窗版本, 即在 $|\hat{H}(u, v)|$ 变得很小之前或在它的第 1 个零点出现之前将其截断。换句话说, 使用:

$$\hat{F}(u, v) = \hat{M}(u, v) \hat{G}(u, v) \quad (5.39)$$

其中

$$\hat{M}(u, v) \equiv \begin{cases} \frac{1}{\hat{H}(u, v)} & u^2 + v^2 \leq \omega_0^2 \\ 1 & u^2 + v^2 > \omega_0^2 \end{cases} \quad (5.40)$$

对 ω_0 的选择要把 $\hat{H}(u, v)$ 的所有零点都排除掉。当然, 也可以使用其他具有矩形剖面的窗函数, 以使 $\hat{M}(u, v)$ 在 ω_0 点平滑地过渡到零。

例 5.11

当对一个静止场景成像时, 相机有平行于图像平面 i 轴的从右向左的平面运动。这个运动看起来相当于场景从左向右移动了同样距离。相机的快门保持打开足够长的时间, 使得 i_T 个接续的场景片段的值被记录在所成图像中的同一个像素上 (本来应该在 i_T 个接续的像素上)。借助在理想情况下应获得的未模糊图像 $f(i, j)$ 写出描述在像素位置 (i, j) 所记录的密度的方程。