第3章 平稳时间序列分析

在时间序列的统计分析中，平稳时间序列是一类重要的随机序列，在这方面已经有了比较成熟的理论，最常用的是 ARMA 模型。用 ARMA 模型去近似地描述动态数据在实际应用中有许多优点。例如，它是线性模型，只要给出少量参数就可以完全确定模型形式；便于分析数据的结构和内在性质，也便于在最小方差意义下进行最佳预测和控制。本章对 ARMA 模型的基本性质和特征进行介绍。

3.1 ARMA 模型的时域特征

ARMA 模型的全称是自回归移动平均(auto regression moving average)模型，它是目前最常用的拟合平稳序列的模型。它又可以细分为 AR 模型(auto regression model)、MA 模型(moving average model)和 ARMA 模型(auto regression moving average)三大类。

3.1.1 AR 模型

1. AR 模型的定义

具有如下结构的模型称为 p 阶自回归模型，简记为 AR(p)：

$$\begin{cases} x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t \\ \phi_p \neq 0 \\ E(\varepsilon_t) = 0, \mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, s \neq t \\ Ex_s \varepsilon_t = 0, \forall s < t \end{cases} \tag{3-1}$$

AR(p)模型具有三个限制条件：

条件一：$\phi_p \neq 0$，这个限制条件保证了模型的最高阶数为 p。

条件二：$E(\varepsilon_t)=0, \mathrm{Var}(\varepsilon_t)=\sigma_\varepsilon^2, E(\varepsilon_t\varepsilon_s)=0, s\neq t$，这个限制条件实际上是要求随机干扰序列$\{\varepsilon_t\}$为零均值白噪声序列。

条件三：$Ex_s\varepsilon_t=0, \forall s<t$，这个限制条件说明当期的随机干扰与过去的序列值无关。

通常会缺省默认 AR(p)模型的限制条件，把 AR(p)模型简记为

$$x = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t \tag{3-2}$$

当 $\phi_0=0$ 时，称 AR(p)模型为中心化模型。非中心化 AR(p)序列可以通过下面的交

换转化为中心化 AR(p)模型。

令 $y_t = x_t - \mu$,其中,$\mu = \dfrac{\phi_0}{1-\phi_1-\cdots-\phi_p}$。

中心化变换实际上就是非中心化的序列整个平移了一个常数单位,这种整体移动对序列的统计特征没有任何影响,因此今后在分析 AR 模型时,都简化为对它的中心化模型进行分析。

引进延迟算子,中心化 AR(p)模型又可以表示为

$$\Phi(B)x_t = \varepsilon_t \tag{3-3}$$

式中,$\Phi(B)=1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-\cdots-\phi_p B^p$,称为 p 阶自回归系数多项式。

2. AR 模型的平稳性

AR 模型是常用的平稳序列的拟合模型之一,但并非所有的 AR 模型都是平稳的。对 AR 模型的平稳性进行检验可以运用特征根法和平稳域法。

1) 特征根法

任一中心化 AR(p)模型 $\Phi(B)x_t=\varepsilon_t$ 都可以视为一个非齐次线性差分方程:

$$x_t - \phi_1 x_{t-1} - \phi_2 x_{t-2} - \cdots - \phi_p x_{t-p} = \varepsilon_t \tag{3-4}$$

方程(3-4)的通解为

$$x_t = x_t' + x_t''$$

式中,x_t'为齐次线性差分方程 $\Phi(B)x_t=0$ 的通解;x_t''为方程(3-4)的一个特解。

(1) 求齐次线性差分方程 $\Phi(B)x_t=0$ 的一个通解 x_t'。假定 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ 是该特征方程的 p 个特征根。为了有代表性,不妨假设这 p 个特征根取值如下:

$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_d$ 为 d 个相等实根。

$\lambda_{d+1},\lambda_{d+2},\cdots,\lambda_{p-2m}$ 为 $p-d-2m$ 个互不等实根。

$\lambda_{j1}=r_j e^{iw_j},\lambda_{j2}=r_j e^{-iw_j}$ ($j=1,\cdots,m$)为 m 对共轭复根。

那么齐次线性差分方程 $\Phi(B)x_t=0$ 的通解为

$$x_t' = \sum_{j=1}^{d} c_j t^{j-1}\lambda_1^t + \sum_{j=d+1}^{p-2m} c_j\lambda_j^t + \sum_{j=1}^{m} r_j^t(c_{1j}e^{itw_j} + c_{2j}e^{-itw_j})$$

式中,$c_1,\cdots,c_{p-2m},c_{1j},c_{2j}$ ($j=1,\cdots,m$)为任意实数。

(2) 求非齐次线性差分方程 $\Phi(B)x_1=\varepsilon_t$ 的一个特解 x_t''。首先,可以证明 AR(p)模型的自归化系数多项式方程 $\Phi(u)=0$ 的根是齐次线性差分方程 $\Phi(B)x_t=0$ 的特征根的倒数。

证明:设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ 为齐次线性差分方程 $\Phi(B)x_t=0$ 的 p 个特征根,任取 λ_i($i\in(1,2,\cdots,p)$)代入特征方程,有

$$\lambda_i^p - \phi_1\lambda_i^{p-1} - \phi_2\lambda_i^{p-2} - \cdots - \phi_p = 0$$

把 $u_i=\dfrac{1}{\lambda}$代入 AR(p)模型的自回归系数多项式,有

$$\Phi(u_i) = 1-\phi_1\frac{1}{\lambda_i}-\cdots-\phi_p\frac{1}{\lambda_i^p} = \frac{1}{\lambda_i^p}[\lambda_i^p - \phi_1\lambda_i^{p-1} - \cdots - \phi_p] = 0$$

其次，根据这个性质，$\Phi(B)$可以因子分解成

$$\Phi(B)=\prod_{i=1}^{p}(1-\lambda_i B)$$

由此可以得到非齐次线性差分方程(3-4)的一个特解为

$$x''_t=\frac{\varepsilon_t}{\Phi(B)}=\frac{\varepsilon_t}{\prod_{i=1}^{p}(1-\lambda_i B)}=\sum_{i=1}^{p}\frac{k_i}{1-\lambda_i B}\varepsilon_i$$

式中，$k_i(i=1,2,\cdots,p)$为常数。

(3) 求非齐次线性差分方程(3-4)的通解 x_t。

$$x_t=x'_t+x''_t=\sum_{j=1}^{d}c_j t^{j-1}\lambda_1^t+\sum_{j=d+1}^{p-2m}c_j\lambda_j^t+\sum_{j=1}^{m}r_j^t(c_{1j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\omega_j}+c_{2j}e^{-\mathrm{i}t\omega_j})+\sum_{i=1}^{p}\frac{k_i}{1-\lambda_i B}\varepsilon_t$$

要使得中心化 AR(p)模型平稳，即要求对任意实数 $c_1,\cdots,c_{p-2m},c_{1j},c_{2j}(j=1,\cdots,m)$，有

$$\lim_{t\to\infty}x_t=0 \tag{3-5}$$

式(3-5)成立的充要条件是

$$\begin{array}{ll}|\lambda_i|<1, & i=1,2,\cdots,p-2m\\ |i_j|<1, & i=1,2,\cdots,m\end{array} \tag{3-6}$$

式(3-6)实际上就是要求 AR(p)模型的 p 个特征根都在单位圆内。所以 AR(p)模型平稳的充要条件是它的 p 个特征根都在单位圆内。

根据特征根和自回归化系数多项式的根成倒数的性质，AR 模型平稳的等价判别条件是该 AR 模型的自回归化系数多项式方程 $\Phi(u)=0$ 的根，都在单位圆外。

2) 平稳域法

对于一个 AR(p)模型而言，如果没有平稳性的要求，实际上也就意味着对参数向量$(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_p)'$没有任何限制，它们可以取遍 p 维欧氏空间的任意一点，但是如果加上了平稳性限制，参数向量$(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_p)'$就只能取 p 维欧氏空间的一个子集，使得特征根都在单位圆内的系数集合

$$\{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_p \mid \text{特征根都在单位圆内}\}$$

被称为 AR(p)模型的平稳域。

对于低阶 AR 模型用平稳域的方法判别模型的平稳域通常更为简便。

(1) AR(1)模型的平稳域

AR(1)模型为 $x_t=\phi_1 x_{t-1}+\varepsilon_t$，其特征方程为$\lambda-\phi_1=0$，特征根为$\lambda=\phi_1$。根据 AR 模型平稳的充要条件，容易推出 AR(1)模型平稳的充要条件是

$$|\phi_1|<1$$

因此，AR(1)模型的平稳域为$\{\phi_1 \mid -1<\phi_1<1\}$。

(2) AR(2)模型的平稳域

AR(2)模型为 $x_t=\phi_1 x_{t-1}+\phi_2 x_{t-2}+\varepsilon_t$，其特征方程为 $\lambda^2-\phi_1\lambda-\phi_2=0$，特征根为$\lambda_1=\frac{\phi_1+\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}}{2}$，$\lambda_2=\frac{\phi_1-\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}}{2}$。根据 AR 模型平稳的充要条件，AR(2)模型平稳的

充要条件是$|\lambda_1|<1$且$|\lambda_2|<1$。

根据一元二次方程的性质和AR(2)模型的平稳条件，有

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=\phi_1\\ \lambda_1\lambda_2=-\phi_2\end{cases},\quad 且\ |\lambda_1|<1,\ |\lambda_2|<1$$

可以导出：

① $|\phi_2|=|\lambda_1\lambda_2|<1$；

② $\phi_2+\phi_1=-\lambda_1\lambda_2+\lambda_1+\lambda_2=1-(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)<1$；

③ $\phi_2-\phi_1=-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1-\lambda_2=1-(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)<1$。

根据这三个限制条件可得AR(2)模型的平稳域为

$$\{\phi_1,\phi_2 \mid |\phi_2|<1, 且\ \phi_1\pm\phi_2<1\}$$

【例 3-1】 分别用特征根法和平稳域法判别如下四个AR模型的平稳性。

(1) $x_t=0.8x_{t-1}+\varepsilon_t$； (2) $x_t=-1.8x_{t-1}+\varepsilon_t$；

(3) $x_t=x_{t-1}-x_{t-2}+\varepsilon_t$； (4) $x_t=x_{t-1}+x_{t-2}+\varepsilon_t$。

具体检验过程如表3-1所示。

表 3-1 特征根法和平稳域法检验结果

模型	特征根检验	平稳域检验	结论
(1)	$\lambda=0.8$	$\phi=0.8$	平稳
(2)	$\lambda=-1.8$	$\phi=-1.8$	非平稳
(3)	$\lambda_1=\frac{1+\sqrt{3}i}{2},\lambda_2=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$	$\|\phi_2\|=1,\phi_2+\phi_1=0,\phi_2-\phi_1=-2$	平稳
(4)	$\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\|\phi_2\|=1,\phi_2+\phi_1=2,\phi_2-\phi_1=0$	非平稳

3. AR模型的格林函数

1) 格林函数的定义

针对AR(p)模型，通过线性变换将x_t表示成既往白噪声$\varepsilon_{t-j}(j\geqslant 0)$的加权求和形式：

$$x_t=\sum_{j=0}^{\infty}G_j\varepsilon_{t-j} \tag{3-7}$$

则称之为AR(p)模型的传递形式，G_j称为格林函数。

2) 格林函数的递推公式

记$G(B)=\sum_{j=0}^{\infty}G_jB^j$，式(3-7)可以简记为

$$x_t=G(B)\varepsilon_t \tag{3-8}$$

把式(3-8)代入AR(p)模型$\Phi(B)x_t=\varepsilon_t$，得到

$$\Phi(B)G(B)\varepsilon_t=\varepsilon_t$$

展开上式，得

$$\left(1-\sum_{k=1}^{p}\phi_k B^k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}G_j B^j\right)\varepsilon_t=\varepsilon_t$$

整理得

$$\left[1+\sum_{j=1}^{\infty}\left(G_j-\sum_{k=1}^{j}\phi'_k G_{j-k}\right)B^j\right]\varepsilon_t=\varepsilon_t$$

根据待定系数法，有

$$G_j-\sum_{k=1}^{j}\phi'_k G_{j-k}=0,\quad j=1,2,\cdots$$

由此可以得到 AR(p)模型格林函数递推公式：

$$\begin{cases}G_0=1\\ G_j=\sum_{k=1}^{j}\phi'_k G_{j-k},\quad j=1,2,\cdots\end{cases}\tag{3-9}$$

式中，$\phi'_k=\begin{cases}\phi_k, & k\leqslant p\\ 0, & k>p\end{cases}$

3）格林函数的意义

（1）G_j 是前 j 个时间单位以前进入系统的扰动 ε_{t-j} 对系统现在行为影响的权数。

（2）G_j 客观地刻画了系统动态响应衰减的快慢程度。

（3）G_j 是对系统动态的真实描述，系统的动态性就是蕴含在时间序列中的数据依存关系。

【例 3-2】 求 AR(1)模型的格林函数。

AR(1)的延迟算子表达式为

$$(1-\phi_1 B)x_t=\varepsilon_t$$

即 $x_t=\dfrac{\varepsilon_t}{1-\phi_1 B}=\sum_{j=0}^{\infty}(\phi_1 B)^j\varepsilon_t=\sum_{j=0}^{\infty}\phi_1^j\varepsilon_{t-j}=\sum_{j=0}^{\infty}G_j\varepsilon_{t-j}$

因此，AR(1)模型格林函数为：$G_j=\phi_1^j$，$j=0,1,2,\cdots$

4．平稳 AR 模型的统计性质

1）均值

对平稳 AR(p)模型等式两边取期望，得

$$Ex_t=E(\phi_0+\phi_1 x_{t-1}+\phi_2 x_{t-2}+\cdots+\phi_p x_{t-p}+\varepsilon_t)\tag{3-10}$$

根据平稳序列均值为常数的性质，有 $Ex_t=\mu(\forall_t\in T)$，且因为$\{\varepsilon_t\}$为白噪声序列，有 $E\varepsilon_t=0$，因此式(3-10)等价于$(1-\phi_1-\cdots-\phi_p)\mu=\phi_0$。

由此可得 $\mu=\dfrac{\phi_0}{1-\phi_1-\cdots-\phi_p}$

特别地，对于中心化 AR(p)模型，有 $Ex_t=0$。

2）方差

由格林函数表达式可知平稳 AR(p)模型 $x_t=\sum_{j=0}^{\infty}G_j\varepsilon_{t-j}$

对上式两边求方差，有

$$\operatorname{Var}(x_t)=\sum_{j=0}^{\infty}G_j^2\operatorname{Var}(\varepsilon_t)$$

式中，$\{\varepsilon_t\}$为白噪声序列，$\operatorname{Var}(\varepsilon_t)=\sigma_\varepsilon^2$。因此

$$\operatorname{Var}(x_t)=\sum_{j=0}^{\infty}G_j^2\sigma_\varepsilon^2 \tag{3-11}$$

3）协方差函数

在平稳 AR(p)模型等号两边同乘 x_{t-k}，$k\geqslant 1$，再求期望，得

$$E(x_t x_{t-k})=\phi_1 E(x_{t-1}x_{t-k})+\cdots+\phi_p E(x_{t-p}x_{t-k})+E(\varepsilon_t x_{t-k})$$

因为 $E(\varepsilon_t x_{t-k})=0$，$\forall k\geqslant 1$

由此可得到平稳 AR(p)模型自协方差函数的递推公式为

$$\gamma_k=\phi_1\gamma_{k-1}+\phi_2\gamma_{k-2}+\cdots+\phi_p\gamma_{k-p} \tag{3-12}$$

4）自相关系数

（1）自相关系数的计算

在自协方差函数的递推公式(3-12)等号两边同除以方差函数 γ_0，就得到平稳 AR(p)模型自相关系数的递推公式：

$$\rho_k=\phi_1\rho_{k-1}+\phi_2\rho_{k-2}+\cdots+\phi_k\rho_{k-p} \tag{3-13}$$

容易验证平稳 AR(1)模型的自相关系数递推公式为

$$\rho_k=\phi_1^k,\quad k\geqslant 0 \tag{3-14}$$

平稳 AR(2)模型的自相关系数递推公式为

$$\rho_k=\begin{cases}1, & k=0\\ \dfrac{\phi_1}{1-\phi_2}, & k=1\\ \phi_1\rho_{k-1}+\phi_2\rho_{k-2}, & k\geqslant 2\end{cases} \tag{3-15}$$

运用格林函数将 AR(p)模型的自相关系数进行表示：

$$\rho_k=\frac{\gamma_k}{\gamma_0}=\frac{\sigma^2\sum_{j=0}^{\infty}G_{j+k}G_j}{\sigma^2\sum_{j=0}^{\infty}G_j^2}=\frac{\sum_{j=0}^{\infty}G_{j+k}G_j}{\sum_{j=0}^{\infty}G_j^2} \tag{3-16}$$

（2）自相关系数的拖尾性

根据式(3-13)容易看出 AR(p)模型的自相关系数的表达式实际上是一个 p 阶齐次差分方程，根据线性差分方程解的有关理论，自相关系数满足：

$$|\rho_k|\leqslant g_1 e^{-g_2 k},\quad k>0$$

其中 $g_1>0$，$g_2>0$ 为常数，由此可知，AR(p)模型的自相关系数是拖尾的。

5）偏自相关系数

（1）偏自相关系数的定义

对于平稳序列$\{x_t\}$，所谓滞后 k 偏自相关系数是指在剔除了中间 $k-1$ 个随机变量 $x_{t-1},x_{t-2},\cdots,x_{t-k+1}$的干扰之后，$x_{t-1}$对 x_t 的影响的相关度量。用数学语言描述就是：

$$\rho_{x_t,x_{t-k}|x_{t-1},\cdots,x_{t-k+1}} = \frac{E[x_t - \hat{E}x_t](x_{t-k} - \hat{E}x_{t-k})}{E[(x_{t-k} - \hat{E}x_{t-k})^2]} \tag{3-17}$$

(2) 偏自相关系数的计算

设$\{x_t\}$为中心化平稳序列，由 $x_{t-1},x_{t-2},\cdots,x_{t-k}$对 x_t 作线性最小二乘估计得到

$$x_t = \phi_{k1}x_{t-1} + \phi_{k2}x_{t-2} + \cdots + \phi_{kk}x_{t-k} + \varepsilon_t \tag{3-18}$$

式中，$E(\varepsilon_t)=0$，$E\varepsilon_t x_s=0(\forall s<t)$。对 $x_{t-1},x_{t-2},\cdots,x_{t-k+1}$取条件，记

$$\hat{E}x_t = E[x_t \mid x_{t-1},\cdots,x_{t-k+1}],\hat{E}x_{t-k} = E[x_{t-k} \mid x_{t-1},\cdots,x_{t-k+1}]$$

$$\hat{E}x_t = \phi_{k1}x_{t-1} + \phi_{k2}x_{t-2} + \cdots + \phi_{kk}\hat{E}x_{t-k} + E(\varepsilon_t \mid x_{t-1},\cdots,x_{t-k+1}) \tag{3-19}$$

已知 $E(\varepsilon_t)=0$，$E\varepsilon_t x_s=0(\forall s<t)$，所以

$$E(\varepsilon_t \mid x_{t-1},\cdots,x_{t-k+1}) = E(\varepsilon_t) = 0$$

式(3-19)等价于

$$\hat{E}x_t = \phi_{k1}x_{t-1} + \phi_{k2}x_{t-2} + \cdots + \phi_{kk}\hat{E}x_{t-k}$$

则

$$x_t - \hat{E}x_t = \phi_{kk}(x_{t-k} - \hat{E}x_{t-k}) + \varepsilon_t \tag{3-20}$$

在式(3-20)等号两边同时乘以 $x_{t-k}-\hat{E}x_{t-k}$，并求期望：

$$E[(x_t - \hat{E}x_t)(x_{t-k} - \hat{E}x_{t-k})] = \phi_{kk}E[(x_{t-k} - \hat{E}x_{t-k})^2] + E[\varepsilon_t(x_{t-k} - \hat{E}x_{t-k})] \tag{3-21}$$

因为 $E\varepsilon_t x_s=0(\forall s<t)$，所以

$$E[\varepsilon_t(x_{t-k} - \hat{E}x_{t-k})] = 0$$

式(3-21)等价于

$$E[(x_t - \hat{E}x_t)(x_{t-k} - \hat{E}x_{t-k})] = \phi_{kk}E[(x_{t-k} - \hat{E}x_{t-k})^2]$$

由此得出

$$\phi_{kk} = \frac{E[(x_t - \hat{E}x_t)(x_{t-k} - \hat{E}x_{t-k})]}{E[(x_{t-k} - \hat{E}x_{t-k})^2]} \tag{3-22}$$

式(3-22)等号右边的结果正好等于式(3-21)所定义的滞后 k 偏自相关系数。

这说明滞后 k 偏自相关系数实际上就等于 k 阶自回归模型第 k 个自回归系数 ϕ_{kk} 的值。根据这个性质容易计算偏自相关系数的值。

对于式(3-18)，模型参数 $\phi_{kj}(j=1,2,\cdots,k)$是通过极小化

$$\delta = E\left(x_t - \sum_{j=1}^{k}\phi_{kj}x_{t-j}\right)^2 \tag{3-23}$$

而得到。

写成矩阵形式有

$$\boldsymbol{\delta} = E\left(^{x_t} - \sum_{j=1}^{k}\phi_{kj}x_{t-j}\right)^2 = E\left[x_t - (\phi_{k1},\phi_{k2},\cdots,\phi_{kk})\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-k} \end{bmatrix}\right]^2$$

$$= E\left[x_t^2 - 2x_t(\phi_{k1}, \phi_{k2}, \cdots, \phi_{kk})\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-k} \end{bmatrix} + (\phi_{k1}, \phi_{k2}, \cdots, \phi_{kk})\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-k} \end{bmatrix}(x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots, x_{t-k})\begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix}\right]$$

$$= \gamma_0 - 2(\phi_{k1}, \phi_{k2}, \cdots, \phi_{kk})\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_k \end{bmatrix} + (\phi_{k1}, \phi_{k2}, \cdots, \phi_{kk})\begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{k-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{k-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{k-1} & \gamma_{k-2} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix}$$

对$\boldsymbol{\delta}$求偏导，有

$$\frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial \phi_{kj}} = -2\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_k \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{k-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{k-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{k-1} & \gamma_{k-2} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix}$$

令$\dfrac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial \phi_{kj}} = 0$，有

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{k-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{k-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{k-1} & \gamma_{k-2} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_k \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} \gamma_1 = \phi_{k1}\gamma_0 + \phi_{k2}\gamma_1 + \cdots + \phi_{kk}\gamma_{k-1} \\ \gamma_2 = \phi_{k1}\gamma_1 + \phi_{k2}\gamma_0 + \cdots + \phi_{kk}\gamma_{k-2} \\ \qquad\vdots \\ \gamma_k = \phi_{k1}\gamma_{k-1} + \phi_{k2}\gamma_{k-2} + \cdots + \phi_{kk}\gamma_0 \end{cases}$$

对上面方程组两边同时除以 γ_0，得

$$\begin{cases} \rho_1 = \phi_{k1}\rho_0 + \phi_{k2}\rho_1 + \cdots + \phi_{kk}\rho_{k-1} \\ \rho_2 = \phi_{k1}\rho_1 + \phi_{k2}\rho_0 + \cdots + \phi_{kk}\rho_{k-2} \\ \qquad\vdots \\ \rho_k = \phi_{k1}\rho_{k-1} + \phi_{k2}\rho_{k-2} + \cdots + \phi_{kk}\rho_0 \end{cases} \tag{3-24}$$

该方程组称为 Yule-Walker 方程。通过解该方程组，可以得到参数$(\phi_{k1}, \phi_{k2}, \cdots, \phi_{kk})'$的解，参数向量中最后一个参数的解即为滞后 k 偏自相关系数 ϕ_{kk} 的值。

用矩阵形式表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-1} \\ 1 & 1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{pmatrix} \tag{3-25}$$

根据线性方程组求解的 Cramer 法则，有

$$\phi_{kk}=\frac{\boldsymbol{D}_k}{\boldsymbol{D}} \tag{3-26}$$

式中，

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-1}\\ 1 & 1 & \cdots & \rho_{k-2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & 1\end{vmatrix},\quad \boldsymbol{D}_k=\begin{vmatrix}1 & \rho_1 & \cdots & \rho_1\\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \rho_k\end{vmatrix}$$

由此对于一般低阶的 AR 模型，我们可以采用上述方法计算偏自相关系数。但是对于高阶的 AR 模型，直接求偏自相关系数是非常烦琐的，通常也可以采用以下偏自相关系数的递推公式来实现。

$$\begin{cases}\phi_{11}=\rho_1\\ \phi_{(k+1)(k+1)}=\left(\rho_{k+1}-\sum\limits_{j=1}^{k}\rho_{k+1-j}\phi_{kj}\right)\left(1-\sum\limits_{j=1}^{k}\rho_j\phi_{kj}\right)\\ \phi_{(k+1)j}=\phi_{kj}-\phi_{(k+1)(k+1)}\phi_{k(k+1-j)},j=1,2,\cdots,k\end{cases} \tag{3-27}$$

（3）偏自相关系数的截尾性

平稳 AR(p)模型的偏自相关系数具有 p 阶截尾性。所谓 p 阶截尾性，是指 $\phi_{kk}=0$，$\forall\, k>p$。

证明：将平稳 AR(p)模型方程 $x_t=\sum\limits_{j=1}^{p}\phi_j x_{t-j}+\varepsilon_t$ 代入式(3-23)，且令 $k>p$，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}&=E\left(x_t-\sum_{j=1}^{k}\phi_{kj}x_{t-j}\right)^2\\ &=E\left(\sum_{j=1}^{p}\phi_{t-j}+\varepsilon_t-\sum_{j=1}^{p}\phi_{kj}x_{t-j}-\sum_{j=p+1}^{k}\phi_{kj}x_{t-j}\right)^2\\ &=E\left[\varepsilon_t+\sum_{j=1}^{p}(\phi_j-\phi_{kj})x_{t-j}-\sum_{j=p+1}^{k}\phi_{kj}x_{t-j}\right]^2\\ &=\sigma_\varepsilon^2+E\left[\sum_{j=1}^{p}(\phi_j-\phi_{kj})x_{t-j}-\sum_{j=p+1}^{k}\phi_{kj}x_{t-j}\right]^2\geqslant\sigma_\varepsilon^2\end{aligned}$$

为使$\boldsymbol{\delta}$达到最小值，应取

$$\phi_{kj}=\begin{cases}\phi_j, & 1\leqslant j\leqslant p\\ 0, & p+1\leqslant j\leqslant k\quad(k\geqslant p)\end{cases}$$

由此可见，AR(p)模型的偏自相关系数 ϕ_{kk} 在 $k>p$ 以后都等于 0，即 AR(p)模型的偏自相关系数具有截尾性。

由此证明了 AR(p)模型偏自相关系数的 p 阶截尾性，这个性质连同前面介绍的自相关系数拖尾性是 AR(p)模型重要的识别依据。

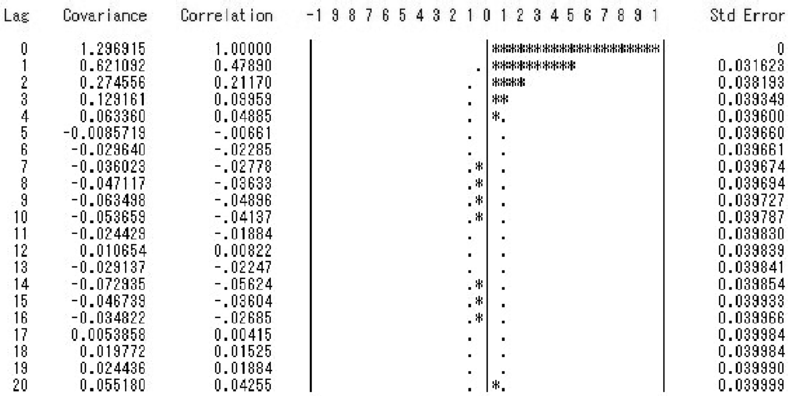
【例 3-3】 考察下面两个平稳 AR 模型的自相关系数和偏自相关系数。

（1）$x_t=0.5x_{t-1}+\varepsilon_t$；　　（2）$x_t=x_{t-1}-0.5x_{t-2}+\varepsilon_t$。

① 由式(3-14)可以得到模型(1)自相关系数为

$$\rho_k = 0.5^k, \quad k = 0,1,2\cdots$$

可以看出,模型(1)自相关系数按负指数方式快速衰减到0,呈现拖尾性,其样本自相关图如图3-1所示。



Autocorrelations

Lag	Covariance	Correlation	Std Error
0	1.296915	1.00000	0
1	0.621092	0.47890	0.031623
2	0.274556	0.21170	0.038193
3	0.129161	0.09959	0.039349
4	0.063360	0.04885	0.039600
5	-0.0085719	-.00661	0.039660
6	-0.029640	-.02285	0.039661
7	-0.036023	-.02778	0.039674
8	-0.047117	-.03633	0.039694
9	-0.063498	-.04896	0.039727
10	-0.053659	-.04137	0.039787
11	-0.024429	-.01884	0.039830
12	0.010654	0.00822	0.039839
13	-0.029137	-.02247	0.039841
14	-0.072935	-.05624	0.039854
15	-0.046739	-.03604	0.039933
16	-0.034822	-.02685	0.039966
17	0.0053858	0.00415	0.039984
18	0.019772	0.01525	0.039984
19	0.024436	0.01884	0.039990
20	0.055180	0.04255	0.039999

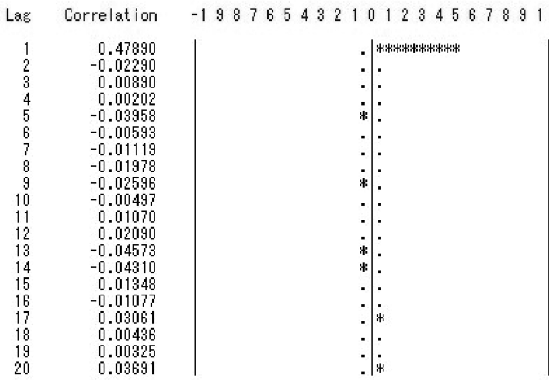
"." marks two standard errors

图 3-1　模型(1)的样本自相关图

由 Yule-Walker 方程可知,理论偏自相关系数为:

$$\phi_{kk} = \begin{cases} 0.3, & k = 1 \\ 0, & k \geqslant 2 \end{cases}$$

可以看出模型(1)偏自相关系数1阶截尾,其样本偏自相关图如图3-2所示。



Partial Autocorrelations

Lag	Correlation
1	0.47890
2	-0.02290
3	0.00890
4	0.00202
5	-0.03958
6	-0.00593
7	-0.01119
8	-0.01978
9	-0.02596
10	-0.00497
11	0.01070
12	0.02090
13	-0.04573
14	-0.04310
15	0.01348
16	-0.01077
17	0.03061
18	0.00436
19	0.00325
20	0.03691

图 3-2　模型(1)的样本偏自相关图

由于样本的随机性,样本偏自相关系数不会和理论相关系数一样严格截尾,从图3-2可以看出模型(1)的样本偏自相关系数1阶显著不为零,1阶之后都近似为零,样本偏自相关图可以直观地验证AR模型偏自相关系数截尾性。