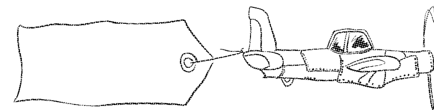

实验理论部分

第1章　测量与误差

实验是在理论思想指导下通过实验者自身的观测去探索一个真实的世界。由于实际条件错综复杂、变化多端，即使在实验室中已作了充分的控制，也难免不受各种因素的影响，所以观测永远不会在理想的条件下进行，测量也不可能是完全精确的。因此，实验除了要测得应有的数据外，还有一个共同的基本问题，即需要对测量结果的可靠性做出评价，也就是对测量结果的误差范围做出合理的估计。若将实验结果与理论预言或公认值比较，以便从中得出它们一致与否的结论时，该问题就尤为重要。为此，本章将介绍测量与误差的基本知识，它将使实验者能用误差分析的方法去估计实验误差的大小，并在必要时帮助实验者设法减小它们的影响。

1.1　物理实验中的测量

1.1.1　测量的定义及分类

1. 量、测量和单位

任何现象和实体都具有一定的形式，所有形式都要通过量来表征。也就是说，任何实体之所以能被觉察其存在，就因为它们具有一定的量。因而可以说量是现象和实体得以定性区别并定量确定的一种属性。物理实验就是将自然界的各种基本运动形态（力、热、电磁等）按人的意志在实验室中再现，然后研究现象和实体的各物理量之间的关系，确定它们的量值大小，找出它们之间的数量关系，从中获取规律性的认识，或验证理论，或发现规律，或作为实际运用的依据。而要得到这种量化的认识，测量就是必不可少的。可以这样讲：没有测量也就没有了科学。

所谓测量，就是人类对自然界中的现象和实体取得数量概念的一种认识过程。在这一过程中，人们借助专门的设备，通过一定的实验方法来得到未知量 x 的数值大小，其单位为设备上所采用的测量单位。简而言之，测量就是对一个量制定一个单位，然后用这个单位与被测对象比较，以确定被测对象的量值的大小。

若测量用的单位为 G，经比较被测对象是该单位的 k 倍，则测量值 x 应表示为：$x=k\mathrm{G}$。但若采用另一单位 G' 对同一对象进行测量，被测对象是该单位的 k' 倍，则测量值又可以表

示为 $x=k'G'$。由于被测对象是与单位选择无关的客观实在，所以应该有：$x=kG=k'G'$。显然，测量数值 k(或 k')的大小与所选用的单位 G(或 G′)有关，单位越大，数值就越小。因此，对于测量而言，单纯一个数值是没有意义的，在表示一个测量值时，必须包含有数值 k 和单位 G 两个部分。

单位的制定虽然具有任意性，但要行之有效，并得到国际承认。1971 年第十四届国际计量大会确定以米(长度)、千克(质量)、秒(时间)、安培(电流)、开尔文(热力学温度)、摩尔(物质的量)和坎德拉(发光强度)为基本单位，称为国际单位制(SI)的基本单位；其他量(如力、能量、电压、磁感应强度等)的单位均可由这些单位导出，称为国际单位制的导出单位。

我国为适应国际交往的需要，制定了以 SI 制为基础的《中华人民共和国法定计量单位》(见附录一)，并已于 1991 年 1 月 1 日开始不允许使用非法定的计量单位。

2. 测量的分类

测量可以按各种方式进行分类。

单纯按测量形式分类，可将测量分为**直接测量**和**间接测量**两大类。直接测量就是在测量时将待测量与作为标准的量直接进行比较，即应用预先定度好的仪器进行测量，从而直接获得待测量的数值大小，如用米尺测量长度，用秒表或计时器测量时间等。间接测量则是在测量中不直接测量待测量(或是没有直接测量该待测量的仪器)；它是基于待测量和其他几个可以直接测量的物理量之间建立的测量关系式，先分别对这些物理量进行直接测量，然后将它们的测量结果代入测量关系式中计算出待测量的数值。例如，欲测量直线运动的物体的平均速度$\bar{v}$，一般可采用直接测量它的运动位移 s 和经过该位移所用的时间 t，然后由平均速度的定义式$\bar{v}=s/t$ 计算出间接测量量$\bar{v}$。这种间接测量的实例在实验中是很多的。

若按实验的内容和方法分类，则可以将测量分为**单一物理量测量**和**函数关系测量**。单一物理量测量就是在相同条件下对某个确定的物理量进行重复测量，以获得该物理量的实验结果。函数关系测量则是通过对几个物理量之间的相互变化关系的测量来研究和获得所需要的实验结果。以单摆实验为例，在摆角很小的条件下，摆长 l 和摆的周期 T 之间有 $g=2\pi\sqrt{l/g}$的关系，其中 g 为重力加速度。如果实验是在固定的摆长情况下通过对周期的测量来测定重力加速度，则直接测量的量 T 是一个有确定大小的物理量，因此可以对它作多次重复测量，并获得 T 的测量结果。这种测量称为单一物理量的测量。重力加速度 g 则是通过将 l 和 T 的测量结果代入上述关系式算得的。若将 T 视为 l 的函数，每改变一次摆长 l_i 测量其相应的摆的周期 T_i，因而获得了许多对(l_i,T_i)测量值，这便有了 l 和 T 的函数关系测量，然后通过一定的数据处理方法也能求得重力加速度 g。由此可见，实验可以采取不同类型的测量，但相应的处理方法就会有所不同，这正是“分类”重要性的关键所在。

不论将测量如何进行分类，直接测量乃是一切测量的基础。唯有牢牢掌握直接测量的基本知识，才可能进一步理解和掌握间接测量与函数关系测量等方面的知识。

3. 测量的目的

不管是哪一类的测量，也不管如何进行测量，其最终的目的总是希望获得待测对象的真值。然而遗憾的是测量必须使用一定的仪器装置，采用一定的实验方法，在一定的环境条件下通过一定的实验人员去完成；由于仪器装置不够准确、实验方法不够完善、环境条件不够

理想以及实验人员水平不够高(包括调整、操作和读数能力)等因素,使每次测量得到的值与客观真值之间总会有差异,这种差异称为误差。若以 x 表示测量值,x_0 表示测量对象的真值,则误差 δ 定义为

$$\delta = x - x_0 \quad (\text{误差} = \text{测量值} - \text{真值})$$

由此可见,测量与误差两者紧密相连,在考虑测量问题时,必须同时考虑误差问题。这正是本章要研究的主题。

1.1.2 测量值的有效数字及其运算规则

1. 测量值的有效数字

当利用测量工具(量具、仪表、仪器)对待测量进行直接测量时,由于测量工具在制造时受到准确程度的限制,所以测量工具的分度值(最小分格值)必定是一个有限的值,测量读数时能够准确地读出最小分格值,并在一般情况下还能在最小分格值下进行估读。一般人眼可以分辨到最小分格的1/10、1/5、1/4或1/2,至于在具体测量中能分辨到最小分格的几分之一,则要视具体情况而定;由于它是人眼能够分辨的极限值,所以任何一个测量读数应该达到这个分辨限,但又不能超过这个分辨限,该分辨限就称为**读数误差**。由此可以得出结论:测量值是有一定位数的,它的末位应是读数误差的所在位。下面举几个例子予以说明。

例 1-1 如图 1-1 所示,用米尺测量铅笔的长度,米尺的分度值为 1mm,由于刻度线较密,笔尖与尺身又不能紧贴,所以认定最多只能估读到最小分格的 1/2,即读数误差定为 0.5mm,笔长的测量值为 37.0mm。

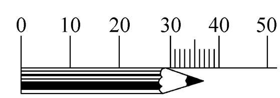

图 1-1

例 1-2 如图 1-2 所示,用量程为 10V 的电压表测量电压,其分度值为 1V,由于刻度线间距离较大,指针指示清晰,故可以估读到最小分格的 1/10,即读数误差定为 0.1V,读得测量值为 7.3V。

例 1-3 如图 1-3 所示,用量程为 100mA 的电流表测量电流,其分度值为 5mA,由于刻度线之间的距离不够大,而指针却有一定宽度,故认定只能估读到最小分格的 1/5,即读数误差定为 1mA。图 1-3 中的测量读数为 87mA。

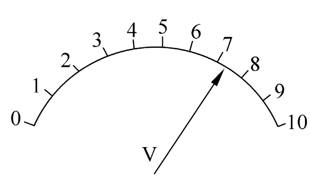

图 1-2

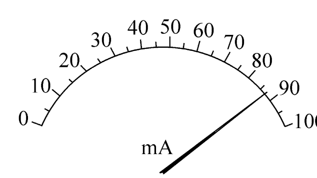

图 1-3

由上列各例可总结出测量读数的规则如下:

(1) 每项测量前,应先记录所用仪器的最小分格值——分度值;

(2) 根据具体情况确定能分辨的估读限——读数误差;

(3) 每个测量值的末位应是读数误差所在位——测量值的末位与读数误差位对齐。

正确地按该规定进行测量读数,才能保证测量值的位数正确无误。(对于数字式仪表,由于它是一种客观读数,其分辨限应是仪表示值的末位,一般与分度值相同。)

一个测量值的有效数字就是包括末位在内的该测量值的全部数字，这些数字的总位数称该测量值的有效数字；前述例中，例 1-1 的测量值有三位有效数字，而例 1-2 和例 1-3 的测量值都只有两位有效数字。由于测量的末位就是读数误差的所在位，它标志着测量值在该位上至少已有读数误差存在，所以测量值的有效数字是测量精度优劣的一种粗略表示，是实验者在每一次测量和记录时都要遇到的基本问题，务必牢牢掌握。

在此再特别强调指出实验者经常容易混淆的两点：

(1) 测量的有效数字和纯数学是有区别的。在纯数学中，7.3＝7.30＝7.300；但对测量值来讲 7.3V≠7.30V≠7.300V，因为它们反映的测量精度是不同的。所以，对测量值不能漏读最后一位的 0（如果正好在刻度线处，估读位是 0 的话），也不能随便在末位后添加 0，而是必须遵照测量读数规则记录测量值。

(2) 测量值的有效数字位数与小数点的位置无关。如例 1-1 中，测得铅笔长度为 37.0mm；若用cm 作单位，则为 3.70cm；小数点位置虽然随所用单位移动，但因测量值的末位取决于所用测量工具的读数误差所在位，所以有效数字位数仍然都是 3 位。由此可见，小数点位置取决于所选的单位，而有效数字反映了测量的精度，两者毫无关系，绝不能将有效数字理解为小数点后取几位。在对不同大小的量用不同的单位表示时，最好采用科学表示法；如上例的 37.0mm，用科学表示法可表示为 3.70×10mm，或 3.70cm，或 3.70×10^{-2} m，这样既能明确表示有效数字，又能明确表示所选用的单位，是科学技术工作者通常使用的表示方法。

2. 有效数字的运算规则

当测量值需要进行运算时，为使运算过程中不引入新的误差，在运算结果中不损失或不增加有效数字而影响运算结果的精度，规定一些有效数字的近似运算规则将有利于简便而合理地进行运算，并能保证运算结果的取位正确。这些规则如下：

1) 加减法的运算规则（数字下加“_”的是误差所在位）

例 1-4 $13.6\underline{5}+1.622\underline{0}$

$$\begin{array}{r} 13.65 \\ +\,1.622\underline{0} \\ \hline 15.2\underline{720} \end{array}$$

在这个结果中，15.2 以后的 720 三位数均属误差影响位，只需像测量值一样保留一位，多余位数可按**四舍六入五凑偶法则**处理（或写成 4 舍 6 入 5 凑偶，5 前面为奇数则入，5 前面为偶数则舍），上列运算结果为 15.27。

例 1-5 $16.\underline{6}-8.3\underline{5}$

$$\begin{array}{r} 16.\underline{6} \\ -\,8.3\underline{5} \\ \hline 8.\underline{25} \end{array}$$

同样的，运算结果中保留一位误差影响，运算结果为 8.2（5 前面是偶数则舍）。

从上得出加减的有效数字近似运算法则：运算结果的有效数字末位的位置和参与运算数中最前面的末位位置相同。

2）乘除法的运算规则

例 1-6 $2432\underline{0}\times 0.34\underline{1}$

$$\begin{array}{r}
2432\underline{0} \\
\times \quad 0.34\underline{1} \\
\hline
\underline{24320} \\
9728\underline{0} \\
7296\underline{0} \\
\hline
829\underline{3.120}
\end{array}$$

运算结果中只保留一位误差影响位，结果应为 8.29×10^{3}，它有三位有效数字。

例 1-7 $8542\underline{5}\div 12\underline{5}$

$$\begin{array}{r}
\underline{683}.4 \\
12\underline{5}\,\overline{)\,8542\underline{5}} \\
75\underline{0} \\
\hline
10\underline{4}2 \\
100\underline{0} \\
\hline
\underline{425} \\
37\underline{5} \\
\hline
\underline{50}0 \\
50\underline{0} \\
\hline
0
\end{array}$$

同理，误差影响位只取一位时，运算结果为 6.83×10^{2}，它为三位有效数字。

由此得出乘除法的有效数字近似运算规则是：在一般情况下运算结果的有效数字位数和参与运算数中有效位数最少的那个数的位数相同。因为这些规则都是近似的，所以只适用于一般情况，在某些特殊情况下可能有违例的现象。如：

例 1-8 $243\underline{2}\times 0.84\underline{1}$

$$\begin{array}{r}
243\underline{2} \\
\times \quad 0.84\underline{1} \\
\hline
\underline{2432} \\
972\underline{8} \\
1945\underline{6} \\
\hline
204\underline{5.312}
\end{array}$$

按规则，参与运算的有效数字位数最少的 0.841 只有三位有效数字，运算结果应取三位，但从误差影响位考虑则可取四位。由上可见，上列的规则只是一种粗略的近似，是不严格的；因而，实际运算时，中间过程的运算结果可多保留一位有效数字，最后结果的取位应根据运算结果的误差影响才能确定。

3）函数运算时的有效数字运算规则

例 1-9 ln543

为确定其有效位数，可认为测量值末位的读数误差为 1，然后计算（用计算器进行的计算）：

$$\ln 543 = 6.297\,109\,32$$

$$\ln 544 = 6.298\,949\,247$$

比较此两计算结果，差异出现在第四位上，则可确定 ln543 应取四位有效数字：

$$\ln 543 = 6.297$$

例 1-10 $\sin 60°16'$

同样认为测量值末位的读数误差为 $1'$，则计算：

$$\sin 60°16' = 0.868\,343\,121$$

$$\sin 60°17' = 0.868\,487\,354$$

两者差异出现在第四位上，故 $\sin 60°16'=0.8683$，为四位有效数字。

由此可见，函数运算结果的有效数字可用测量值末位变化 1 时其结果在哪一位产生差异来确定应取的有效位数。这是一种最为原始而直观的方法。

如果用数学中的微分方法，则立即可定出有效位数末位的位置，仍以上面两例为例：

例 1-11 $\mathrm{d}(\ln x)=\mathrm{d}x/x$，$x=543$，$\mathrm{d}x$ 为 1，则 $\mathrm{d}x/x=0.0018$，ln543 可取到小数点后第三位，$\ln 543=6.297$，为四位有效数字。

例 1-12 $\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\cdot\mathrm{d}x$，$x=60°16'$，$\mathrm{d}x=1'$应化为弧度，$\mathrm{d}x=1'=\pi/(180\times 60)$，则 $\cos 60°16'\times\pi/(180\times 60)=0.000\,14$，$\sin 60°16'$可取到小数后第四位，所以 $\sin 60°16'=0.8683$，为四位有效数字。

可以看出直观法和微分法结果一致。

4）运算中常数的取位规则

在测量运算中，经常还会遇到一些常数参与在其中，例如测量了一个球的直径 D，要计算该球的体积 $V=\pi D^3/6$；其中 6 是准确值；$\pi=3.141\,592\,654\cdots$它的取位多少应根据测量值 D 的位数来定。其原则是：参与运算的常数的取位至少应和测量值的位数相同。

测量值的有效数字及其运算是每一个实验都要遇到的问题，实验者必须养成按有效数字及其运算规则进行读数、记录、处理和表示运算结果的习惯，并按此理解他人所表示的数据和结果。特别应该指出的是：在普遍使用电子计算器(机)的时代，计算器(机)可以给出较多位的数字，但实验者应该清晰地知道运算结果该取到哪一位，切莫写出与实际情况不相符的荒谬可笑的结果。

1.2 物理实验中的误差

1.2.1 误差公理及误差分类

1. 误差公理

凡定量实验都需进行测量，凡测量均会有误差，所以一切实验结果都会有误差，误差自始至终存在于一切科学实验的过程中，这已是一条为实践所证实，也为一切从事科学实验的人们所确认的公理。

认识误差公理具有非常重要的意义。由于误差的存在，使真值不能测得，但测量的目的又希望获得真值，这就产生了矛盾，其矛盾的焦点是误差的存在，所以实验不仅仅是简单地测几个数，而是必须用误差分析的思想来指导实验的全过程。误差分析的指导思想在下列几方面实现而易见的。

(1) 为了从有误差的测量中正确认识客观规律，就必须分析测量过程中产生误差的原因和性质，正确地测量数据，尽力消除、抵偿和减小误差的影响，以便能在一定条件下得到更接近真值的最佳结果，并能对结果作出精度的评定。

(2) 围绕对结果的精度要求进行实验设计时，误差分析可以指导实验者合理地选择测量方法、仪器和条件，以便能在成本最低、时间最短的情况下获得恰到好处的预期结果。

(3) 当报道实验(或测量)结果时，仅有结果的数值和单位是不够的，完整的报道应该包括数值(最佳值)、单位(法定的)和误差估计(确切地讲应该是不确定度)三个部分。这是国内外科技实验信息交流的共同语言，三者缺一不可。特别在误差估计方面应给出详细的说明，只有用确切的误差分析资料和数据说明结果、误差范围的来源和实验结果的精度，才能令人信服地显示出实验结果的可信赖度。

误差公理要求实验者用误差分析的方法估计实验误差范围的大小并能将它们减小到可以得出正确结论的程度。

2. 误差分类

误差产生的原因是多方面的(如仪器装置、实验方法、环境条件及实验人员等)，但按其性质可将误差分为两大类。

(1) 系统误差。它是由某个确定因素所产生的，例如由于计时器走慢而使测量的时间都小了，钢卷尺因温升而变长使测得的长度都短了等。在实验条件已经确定后，这种系统误差就取得了一个客观上的恒定值，重复多次测量也无法消除它的影响，所以它的表现特点是：在相同条件下(指仪器、方法、环境和人员)对同一值进行多次测量时，误差的符号与数值(绝对值)总保持不变，或在条件改变时按一定的规律变化。这样的系统误差称为**可定系统误差**。

此外，还有一种数值未知的系统误差，例如仪器出厂时的准确度指标，用符号 Δ 表示，它只给出一个仪器误差的极限范围，但实验者使用该仪器时并不知道其误差的确切大小和正负，只知道它的准确程度不会超过 Δ 的极限指标，所以这种系统误差通常只能定出它的极限范围，称为**未定系统误差**。

(2) 随机误差。它是由许许多多无法确知的因素所产生的，例如环境条件(温度、湿度、风力、振动等)的起伏变化，实验人员的估读能力、情绪、注意力和疲劳度等的随机变化，致使对同一量做多次重复测量时测量值不相同，所以它的表现特点为：在相同条件下对同一量进行多次重复测量时，每次测量的误差时大时小，时正时负，既不可预测，又无法控制，在测量次数很多时，各次测量误差的算术平均值趋近于0。

由于这两类误差的性质不同，所以分析和处理的方法也完全不同。

1.2.2 关于系统误差的处理原则

可定系统误差是由确定因素引起的，原则上可以通过对整个实验的方法原理、所用的仪器装置、周围的环境状态等的分析来找出其原因，进而寻求其规律，然后设法消除它对实验的影响，或将其影响降低到可以忽略的程度。一个经验丰富的实验工作者必须有能力预见到实验中可能存在的系统误差，并将其减小到可以忽略的程度。遗憾的是没有一个简单的理论可以告诉实验者如何去发现和消除系统误差，唯一的原则就是必须识别它们，并将它们降低到比实验所需精度还要小的可忽略程度。所以，对初学者来讲，只能逐步积累这方面的

知识和经验，从方法、仪器、操作乃至读数等各方面去思考分析会不会引入系统误差，如何才能减小它们的影响等。

1. 可定系统误差及其消除方法

系统误差主要来自仪器、方法、环境和人员几个方面，实验者应该在具体的实验中认真地思考和分析这种方法、这台仪器、这样操作、这般读数会不会对测量结果引入系统误差，然后采用适当的方法去消除或减弱它们。消除和减弱可定系统误差的基本方法归纳起来有以下几种。

1）设法消除产生系统误差的根源

当通过分析与识别系统误差产生的根源，并能采取某种方法消除这种根源时，就可用这种方法消除系统误差。

例 1-13 实验采用图 1-4 所示线路测量电阻 R（称伏安法），若用电压表测得电压 V 和电流表测得电流 I 计算电阻 $R=V/I$，则就引入了系统误差；因为流经电流表的电流 I 是流入电阻 R 的电流 I_R 和流经电压表的电流 I_V 之和，即 $I=I_R+I_V$，根据定义 $R=V/I_R$，所以在用这种方法测量时电流有误差 $\delta=I-I_R=I_V$，它是由实验方法引起的系统误差。分析该系统误差的根源在于电压表接入线路两端时它吸取测量电路中的能量，因而改变了原线路中的状态（流经电流表的电流增大），为此可采用图 1-5 所示的补偿线路。它用了一个辅助电源 E、滑线电阻 R 和检流计 G，只要 E 大于 R_H 上的电压降，极性按图 1-5 中所示连接，则在滑线电阻 R_H 上必能找到一点 d 和电阻 b 端的电位相等。此时检流计 G 中无电流通过（指零），$V_{ab}=V_R=V_{cd}$，而电压表量的正是 V_{cd}；因 G 中无电流通过，所以构成了一只内阻无限大的电压表，因而消除了图 1-4 伏安法测电阻时的系统误差根源（但线路和操作都较原有的复杂）。

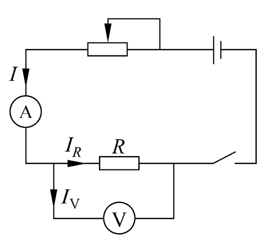

图 1-4

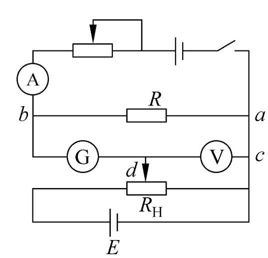

图 1-5

2）用修正值消除可定系统误差

当系统误差的规律可掌握时，就可以用修正值消除测量值中的系统误差。

例 1-14 实验中使用一种 BC9 型饱和式标准电池，在 20℃时的电动势为 $E_{20}=1.01859$V，由于电动势与环境温度有关，在该电池的说明书中已给出电动势与温度的关系为

$$E_t=E_{20}-4.0\times10^{-5}(t-20)-1.0\times10^{-6}(t-20)^2\,(\mathrm{V})$$

若实验中测不到环境温度，或温度不加控制，直接用 20℃时的 E_{20} 作为任意温度下的电动势使用，则将引入系统误差：

$$\delta=E_{20}-E_t=4.0\times10^{-5}(t-20)+1.0\times10^{-6}(t-20)^2\,(\mathrm{V})$$

这是由环境条件引入的系统误差，且说明书中已给出规律，所以只要测定环境温度 t，该系统误差 δ 的值就可确定。在实验中引入修正值 $-\delta$，则 $E_t=E_{20}+$修正值$=E_{20}-\delta$。这就是用修正值消除系统误差的方法。

例 1-15 在用伏安法测电阻的图 1-4 所示线路中，若能确知电压表的内阻 R_V，则流经电压表的电流 $I_V=V/R_V$，因此可对 I 进行修正而得到流经电阻 R 的电流 $I_R=I-V/R_V$，从而消除了该方法引入的系统误差。

3）选择适当的测量方法，使系统误差得以消去而不带入测量值中

通过分析，实验中某系统误差的根源已经找到，但又无法消除它（如仪器制造上的缺陷所引起的系统误差），则可以在测量方法上设法消去该系统误差的影响。

例 1-16 实验中测量质量经常使用等臂天平，但若制造天平时有微小的不等臂存在，如图 1-6(a)所示，m 为待测质量，m'为砝码质量，若天平平衡，则 $ml=m'(l+\delta l)$。显然，用 m'表示待测物的质量 m 就引入了不等臂造成的系统误差，这是由仪器制造缺陷所引起的系统误差。但 δl 又无法知道，所以也无法修正，因而只能采用适当的测量方法消除其影响，方法有两种。

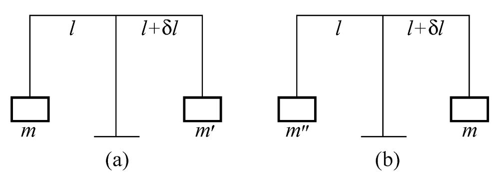

图 1-6

第一种方法：将待测物质量 m 放入右盘再称一次，如图 1-6（b）所示，平衡时有等式 $m''l=m(l+\delta l)$。由左右盘各称一次的两个平衡式中消去 l 和 $l+\delta l$，得 $m\approx\sqrt{m'\times m''}\approx(m'+m'')/2$，这称为交换抵消法。第二种方法：在图 1-6(a)中取下待测质量 m，换上砝码 m_0，当再一次达到平衡时，$m_0 l=m'(l+\delta l)=ml$，所以有 $m=m_0$，这称为替代法。

例 1-17 在测量角度的仪器上，由于转动的读数标线的转轴 C'没有准确地与角度盘的中心 C 重合（如图 1-7 所示），当读数标线向上时，它不指在 0°而偏右，读数值大于 0°，系统误差为 $+\theta$；读数标线转至右水平时，读数值小于 90°，系统误差为 0；读数标线向下时，读数值小于 180°，系统误差为 $-\theta$，当读数标线转至左水平时，读数值准确地为 270°，系统误差又为 0。这是由仪器机构所引起的一种周期性系统误差，称为“偏心差”。消除这种系统误差的方法是在对径方向装一对读数装置，从这两个读数装置上分别测出标线转过的角度 ϕ_1 和 ϕ_2，然后取其平均值 $\phi=(\phi_1+\phi_2)/2$，即可消除偏心系统误差而得到标线转过的真实角度，这种方法称为对径读数法。

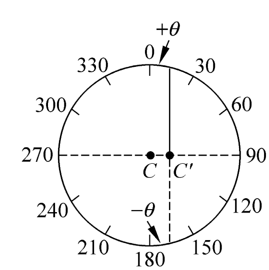

图 1-7

4）选择适当的仪器和方法，使系统误差减弱到可以忽略的程度

实际上很多情况下系统误差并不一定要完全消除，也不可能完全消除，此时需要的是应该尽力设法减弱它们的影响，直至其影响可以被忽略为止。

例 1-18 仍以例 1-13 伏安法测电阻为例，由图 1-4 中 $I=I_R+V/R_V=I_R(1+R/R_V)$ 可知，只要选择内阻 $R_V\gg R$ 的电压表，使误差项 $\delta=I-I_R=(R/R_V)I_R$ 小于电流表上的读数分辨限，则 I 和 I_R 的差异已无法分辨，此时可认为 $I=I_R$，R_V 的影响就减弱到了完全可以忽略的程度。

例 1-19 实验中经常会使用仪表，但其指针和度盘之间有一定间隙；当在不同的方向上观察时，读数就会发生改变，这种效应称为视差。如果实验者不注意这一点，而是习惯于将仪表放在其座位的一侧，然后总是斜着去读数，则就人为地引入了系统误差。减弱这种系统误差的方法就是实验者应该改正自己不正确的习惯，尽量正对着仪表进行测量读数。高精度仪表在盘面上装有一块平面反射镜，就是为了减弱和消除读数时的视差而设置的。

由以上各例可以看到，系统误差需要结合具体实验作具体的分析，同一种系统误差的消除或减弱的方法亦是多种多样的(如例 1-13、例 1-15、例 1-18 都是讨论伏安法测电阻实验中的系统误差消除和减弱问题)，所以实验者只能逐步积累这方面的知识，以提高对系统误差的识别能力。今后，在具体的实验中还会介绍消除和减弱系统误差的具体的方法，实验者应该认真地思考和分析，因为方法并不是唯一的。

2. 未定系统误差的估计——Δ

由于未定系统误差的符号和绝对值未知，所以无法进行修正，而只能通过分析那些会对测量结果产生影响的因素来估计其范围。例如，一个 50g 的四等砝码，国家规定其极限误差不得超过±3mg，虽然每个标称值为 50g 的四个砝码都有其确定的误差值，但若在使用前未经高一级仪器进行校检(在基础教学实验中的量具、仪表几乎肯定不会做这样的校检)，则就无法确知该砝码的误差值是多少，而只知道它肯定不会超过极限范围±3mg，当使用该砝码去称量物体时，显然它将对测量结果的准确性产生影响；就这一个砝码而言，它对结果造成的不准确性极限范围是±3mg，所以砝码的误差极限就是这次称衡中的一项未定系统误差估计限。

实际上，每台量具、仪表、仪器在制造时都有一个反映准确程度的极限指标 Δ，有的由国家规定，有的由部颁规定，有的由制造厂规定，产品说明书中均明文记载着该项指标。例如，配合物理天平使用的四等砝码组中各砝码的极限误差指标 Δ 如表 1-1 所示。

表 1-1

标称值(Δ)/g	500	200	100	50	20	10	5	2	1
Δ/mg	25	10	5	3	2	2	2	2	2

再如，实验室中常用的电气测量仪表，国家规定了仪表的准确度等级，并以相应的数字标明在仪表的表盘上；若所用的仪表为 S 级，仪表的量程为 X_m，则该仪表的示值误差为

$$\Delta = X_m \cdot S\%$$

它表示仪表盘上任何一个刻度 X 处的视值误差不会超过的界限。表 1-2 列示了 C32-mA 型的多量程电流表各量程的 Δ 计算值(在表盘的右下角标示着该表的准确度级别为 0.5 级，由量程和级别再根据上式可算得 Δ 值)。

表 1-2

量程 X_m/mA	100	200	500	1000
Δ/mA	0.5	1	2.5	5

对电表而言，Δ 只决定于级别和量程，在同一级别和量程下，不管电表指针偏转是大还是小（对应测量读数的大小），其示值误差限 Δ 都是相同的。

再以实验室中常用的十进位电阻箱为例，它的示值误差限 Δ 由各十进盘的准确度等级 a_i 和各盘的指示值 R_i 按下式计算：

$$\Delta = \sum_{1}^{m} a_i\% \cdot R_i$$

式中 m 为电阻箱的盘数。例如 ZX36 型四位电阻箱，其调节范围为 9(1＋10＋100＋1000)Ω，$m=4$，各盘的准确度等级列于表 1-3 中。

表 1-3

盘标	×1	×10	×100	×1000
准确度等级 a_i	0.5	0.2	0.1	0.1

若该电阻箱示值为 4832Ω，则按前式计算的 Δ 为

$$\begin{aligned}\Delta &= 4000 \times 0.1\% + 800 \times 0.1\% + 30 \times 0.1\% + 2 \times 0.5\% \\ &= 4 + 0.8 + 0.06 + 0.01 = 4.87(\Omega) \approx 5(\Omega)\end{aligned}$$

显然，电阻箱的 Δ 与使用的电阻值大小密切相关。

由于每一种测量工具（量具、仪表、仪器）Δ 的估计方法不同，故需根据产品说明书（或检定书）确定。本书附录六中收集了实验室常用仪器、仪表、量具的 Δ，以供实验者查阅。

显而易见，所用仪器的 Δ 确定了实验（测量）的准确程度的界限。Δ 越小，仪器的准确度就越高，用它获得的测量结果的准确程度也就越高；反之则低。事实上，在设计一项实验时，就是根据对结果精度要求来选择合适的测量器具的。

因为对每一个直接测量的量都是通过测量工具进行测量的，而每一种测量工具都有它确定的 Δ，可见测量工具的 Δ 与直测量有着直接的关联，它反映了测量工具对该直测量的准确度界限的信息。

当然，未定系统误差的含义更广，它还应包括那些预料会影响测量或使结果偏离的物理效应，但这在很大程度上取决于实验者的经验和判断能力（甚至是凭直觉），所以目前暂且约定只考虑所用仪器的 Δ，而不涉及其他因素。

综上所述，测量中对已认识到的可定系统误差必须设法消除，即测量结果中不应带有可定系统误差；对属于未定系统误差的 Δ 必须记录清楚，以标示测量结果的不确定度。

1.3 物理实验中的数据处理

1.3.1 测量中随机误差的估算及不确定度的计算

假设在实验中已将系统误差减弱到可以忽略的程度，然后在同一条件下对某一物理量进行多次重复测量，若每次测量值出现差异，则这种差异就是由于实验条件不可控的微弱变

化、实验者的测量技能等各种起伏因素引起的随机误差所致。

1. 随机误差的估算方法

1）真值的最佳估计值——最佳值

随机误差有一个极其重要的特性：抵偿性，即在相同条件下对同一量进行多次测量，由于每次测量的随机误差时大时小，时正时负，所以误差的算术平均值随着测量次数的无限增加而趋于零。根据这一特性，可以求得真值的最佳估计值；用 x_0 表示待测量的真值，x_1，x_2，…，x_n代表只具有随机误差的各次测量值，则各次测量值的随机误差 δ 为

$$\delta_1 = x_1 - x_0$$
$$\delta_2 = x_2 - x_0$$
$$\vdots$$
$$\delta_n = x_n - x_n$$

将以上各式相加，则

$$\sum \delta_i = \sum x_i - nx_0$$
$$\frac{\sum \delta_i}{n} = \frac{\sum x_i}{n} - x_0 = \bar{x} - x_0$$

$\bar{x}$是测量列 x_1，x_2，…，x_n 的算式平均数。根据随机误差有抵偿性的特性 $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i = 0\right)$，当 n 很大时$\frac{\sum \delta_i}{n} \to 0$，因而有

$$\bar{x} \to x_0$$

可见，测量次数越多，各次测量的算术平均值就越接近于真值。所以有理由认为：测量列的算式平均值$\bar{x}$是被测量真值 x_0 的一个最佳估计值。需要指出的是这一结论仅适用于等精度测量，对于不等精度的测量其最佳值应是加权平均值（此处略）。

2）随机误差的正态分布规律

（1）概率含义

随机误差服从正态分布，亦称高斯(Gauss)分布，如图 1-8(a)所示。图中横坐标为随机误差 δ，纵坐标为 $f(\delta)$，$f(\delta)$称为随机误差 δ 的概率密度函数：

$$f(\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} \tag{1-1}$$

测量值的随机误差落在$(\delta,\delta+\mathrm{d}\delta)$小区间内的概率为 $f(\delta)\mathrm{d}\delta$，所以测量值的随机误差落在$(a,b)$区间内的概率为

$$p(a \leqslant \delta \leqslant b) = \int_a^b f(\delta)\mathrm{d}\delta$$

概率密度函数中的特征量 σ 为

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum \delta^2}{n}}, \quad n \to \infty \tag{1-2}$$

它是正态分布曲线上的正、负两个拐点。

图 1-8(b)为不同 σ 的正态分布曲线，由于任一正态分布曲线下的面积都表示 100％的

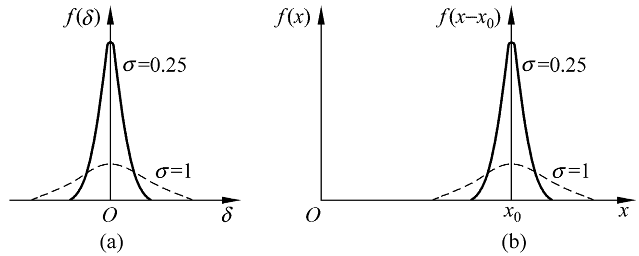

图 1-8

概率(归一化条件),从图中可见,σ 值小,曲线峰值高且陡,说明测量值的分散性小,重复性好,测量的精度高;反之,σ 值大,曲线较平坦,测量值的分散性大,测量的精度就低。所以 σ 表示了测量值的离散性,表示了测量的精度。σ 称为单次测量的标准偏差,σ 的概率含义是,测量值的误差落在$(-\sigma,+\sigma)$范围内的概率是

$$p(-\sigma \leqslant \delta \leqslant \sigma) = \int_{-\sigma}^{\sigma} f(\delta)\mathrm{d}\delta = 0.683$$

它表明,任作一测量时,测量值落在$(x_0-\sigma, x_0+\sigma)$区间的可能性为 68.3%。同理,测量值误差落在$(-\infty,\infty)$区间内的概率为

$$p(-\infty < \delta < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta)\mathrm{d}\delta = 1$$

这曲线下的面积为 1,称为归一化条件。

(2) 标准偏差的计算

由于实验室中测量次数总是有限的,而在有限的 n 次测量后,只能获得一个最佳值 $\bar{x}$,因此在计算时只能用 $v=x_i-\bar{x}$ 来替代 δ,v 称为残差。当用 v 来计算 δ 时,其计算式是

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n-1}} \tag{1-3}$$

实验中就是利用该式来计算测量列的标准偏差,它表示测量值的分散性。式(1-3)称为贝塞尔公式。

(3) 平均值的标准偏差

可以证明,平均值 x 的标准偏差为

$$\sigma_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

它表示在 $x-\sigma \sim x+\sigma$ 范围内包含有真值的可能性是 68.3%,σ_x 越小,则结果的可靠性就越大。

2. 测量值的不确定度

不确定度是说明测量结果的一个参数,表征合理赋予被测量值的分散性,它表示由于测量误差的存在而被测量值不能确定的程度,是表征被测量的真值所处的量值范围的评定。不确定度反映了可能存在的误差分布范围,即随机误差分量和未定系统误差分量的联合分布范围。不确定度的数值越小,则表征测量结果的可靠性越高。不确定度一般包含有多个

分量,按其数值的评定方法可归并成两类,一是A类分量,二是B类分量。

A类分量:指对多次重复测量结果用统计方法计算出的分量,记作Δ_A;

B类分量指用非统计分析方法估计出的分量,记作Δ_B。

对A类分量和B类分量的合成按方差合成原理进行。当各分量彼此独立时,则合成不确定度是各分量的方和根,即

$$U = \sqrt{\Delta_A^2 + \Delta_B^2} \tag{1-4}$$

上面讨论的是最简单的情况,实际上A类分量和B类分量又分别由多个分量构成,若A类分量为$\Delta_{A1}, \Delta_{A2}, \cdots, \Delta_{AN}$;B类分量为$\Delta_{B1}, \Delta_{B1}, \cdots, \Delta_{BN}$,且权重均相等,彼此独立,则合成不确定度为

$$U = \sqrt{\sum_{i=1}^{M}\Delta_{Ai}^2 + \sum_{j=1}^{N}\Delta_{Bj}^2}$$

在大学物理实验中,根据国家计量规范取约定概率$p=0.95$,且测量次数通常满足$6 \leqslant n \leqslant 10$时,则可对A类分量和B类分量进行简化:

$$\Delta_A = \sigma_x \quad (\text{单次测量的标准偏差})$$

$$\Delta_B = \Delta \quad (\text{仪器的未定系统误差})$$

所以合成不确定度为

$$U = \sqrt{\sigma^2 + \Delta^2}, \quad p = 0.95 \tag{1-5}$$

要指出的是:单次测量的标准偏差σ_x和不确定A类分量Δ_A是两个不同的概念,取σ_x的值当作Δ_A,是一种最方便的处理方法;同样$\Delta_B=\Delta$也是一种简化的处理方法。当测量次数不满足$6 \leqslant n \leqslant 10$条件如何处理参看附录三。

3. 直接测量量的结果表述

对测量中各种误差的影响做了上述的精心分析之后,测量结果的表述原则应是:

(1) 必须先消除可定系统误差的影响,测量结果中不应含有已经认识到的可定系统误差。

(2) 由于所用到测量器具的Δ是测量的准确程度的界限,是未定的系统误差,所以必须记录清楚。

(3) 在进行多次重复测量后,应算出测量列的算术平均值$\bar{x}$和标准偏差σ_x。

(4) 对不确定度A类分量和B类分量进行简化,取

$$\Delta_A = \sigma_x, \quad \Delta_B = \Delta, \quad 6 \leqslant n \leqslant 10$$

计算出合成不确定度:

$$U = \sqrt{\sigma_x^2 + \Delta^2}$$

(5) 将结果表示为

$$x = \bar{x} \pm U \quad (\text{单位})$$

$$E_x = \frac{U}{\bar{x}} \times 100\%$$

U一般取一位有效数字,最多取两位有效数字。$\bar{x}$的末位与U的末位对齐。E_x称为相对不确定度,它是一个无单位的物理量,用来比较不同测量列之间质量的优劣,表示测量列

的精度，称为精密度。例如，测量 10mm 有 0.1mm 的不确定度，测量 100mm 也有 0.1mm 的不确定度，但其测量精度是大不相同的，精密度要相差一个数量级。

实验中还可能遇到某个量不能重复测量或无须重复测量，因此只测量了一次。则最佳值就是该次测量的测量值，不确定度 U 可用 Δ 代替。

4. 间接测量量的不确定度的传递

1）不确定度的传递公式

实验中常遇到待测的物理量往往需要通过数个直接测量的量，根据一定的理论公式经过计算才能得到其测量结果的情况。如用单摆测量重力加速度 g，其理论公式为

$$g = 4\pi^2 \cdot \frac{l}{T^2}$$

式中 l 是摆长，T 为周期。上式称为 g 的测量关系式。实验者可用米尺直接测量摆长 l，用秒表直接测量摆的周期 T，按后按上式就可算出重力加速度 g。由于各个直接测量量都是有误差的，可以计算出其各自不确定度，因此通过计算求得的待测量也是有误差的。那么它的不确定度是多少呢？如何计算这种间接测量量的不确定度？这就要解决不确定度的传递问题。

对于一般情况，设待测量 ϕ 和直测量 $x, y, \cdots, u$ 有下列的函数关系式：

$$\phi = f(x, y, \cdots, u)$$

其中各直测量 $x, y, \cdots, u$ 彼此相互独立，其测量值有不确定度 $U_x, U_y, \cdots, U_u$，间接测量量 ϕ 的不确定度为 U_ϕ，则：

（1）待测量 ϕ 的最佳值可通过各个直测量最佳值代入函数式中计算出，即

$$\bar{\phi} = f(\bar{x}, \bar{y}, \cdots, \bar{u})$$

（2）ϕ 的不确定度，由各直接测量量的不确定度，通过方和根的合成方法得到：

$$U_\phi = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (U_x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 (U_y)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 (U_u)^2}$$

其中，$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial u}$ 称为不确定度传递系数；$\frac{\partial f}{\partial x}U_x, \frac{\partial f}{\partial y}U_y, \cdots, \frac{\partial f}{\partial u}U_u$ 分别称为 $x, y, \cdots, u$ 的不确定度分量。

（3）ϕ 的相对不确定度计算式为

$$E_\phi = \frac{U_\phi}{\phi} \times 100\%$$

不确定度分量是传递系数和相应直测量的不确定度的乘积，所以不确定度分量不仅决定于直测量的不确定度大小，而且还取决于不确定度传递系数。若直测量本身的不确定度很小，但不确定度的传递系数却很大，则不确定度分量不一定就小；反之，若直测量本身的不确定度较大，但只要不确定度传递系数非常小，则不确定度分量不一定就大。因此，实验者还可以通过对各不确定度分量的比较来分析各测量值对待测量总不确定度的影响大小，从而为改进实验指出了方向；另一方面，实验者可根据对不确定度分量的事先分析来确定实验中哪些量必须测得很准、很精密，而哪些量不必苛求也不致影响最后的结果。在设计实验时，实验者还可据此进行误差分配，为合理地选择各直测量仪器提供依据。所以，不确定度传递式在误差分析中是十分重要的公式。

表 1-4 以 $\phi=f(x,y)$ 为例列出了各项不确定度分量和不确定度 U 的传递公式，使实验者能对传递关系和计算方法有一个清醒的认识。

表 1-4

$\phi=f(x,y)$	x 分量	y 分量	U 传递合成式
U 传递	$\frac{\partial f}{\partial x}U_x$	$\frac{\partial f}{\partial y}U_y$	$U_\phi=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2(U_x)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2(U_y)^2}$

2）几个简单函数关系的传递公式

（1）和差关系

若测量关系式为 $\phi=x+y$ 或 $\phi=x-y$，其中直测量 x 和 y 的不确定度分别为 U_x 和 U_y，则有

$$U_\phi=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2(U_x)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2(U_y)^2}=\sqrt{(U_x)^2+(U_y)^2}$$

不管关系是求和还是求差，ϕ 的不确定度都是 x 和 y 不确定度的方和根。

（2）倍数关系

若测量的关系式 $\phi=kx$，其中 k 是一个精确数，x 的不确定度为 U_x，则

$$U_\phi=|k|U_x$$

该传递式关系告诉我们，在需要测量某个小量时，可以利用测量它的倍数（如果可能这样做的话）来减小其测量误差。例如，测量单摆 50 个周期的总时间 $t=83.4\pm0.3(\mathrm{s})$，则单摆的周期 T 和 U_T 为

$$T=\frac{1}{50}\times t=1.668(\mathrm{s}),\quad U_T=\frac{1}{50}\times U_t=0.006(\mathrm{s})$$

由此可见，在某些条件下并不需要相当高级的设备就能将测量不确定度明显减小。

（3）乘除关系

若测量关系式为 $\phi=xy$，其中 x 和 y 的不确定度分别为 U_x 和 U_y，根据不确定度传递公式，先计算传递式中各分量：

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}U_x=yU_x,\quad \frac{\partial\phi}{\partial y}U_y=xU_y$$

则 U_ϕ 为

$$U_\phi=\sqrt{y^2U_x^2+x^2U_y^2}$$

显然，该传递式有点繁，但若用 ϕ 的相对不确定度表示，则有

$$E_\phi=\frac{U_\phi}{\phi}=\frac{\sqrt{y^2U_x^2+x^2U_y^2}}{xy}=\sqrt{\left(\frac{U_x}{x}\right)^2+\left(\frac{U_y}{y}\right)^2}=\sqrt{E_x^2+E_y^2}$$

ϕ 的相对不确定度等于 x 的相对不确定度和 y 的相对不确定度的方和根，显然它比直接计算 U_ϕ 要简单得多；在得到了 E_ϕ 之后，由 $\phi\times E_\phi$ 很容易算出 U_ϕ。

若测量关系式为 $\phi=\frac{x}{y}$，按照上面相同的计算得

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}U_x=\frac{1}{y}U_x,\quad \frac{\partial\phi}{\partial y}U_y=-\frac{x}{y^2}U_y$$

$$U_\phi=\sqrt{\left(\frac{1}{y}U_x\right)^2+\left(\frac{x}{y^2}U_y\right)^2}$$

该式更为复杂，但若先计算相对不确定度，则

$$E_\phi=\frac{U_\phi}{\phi}=\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{y}U_x\right)^2+\left(\frac{x}{y^2}U_y\right)^2}}{x/y}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{U_x}{x}\right)^2+\left(\frac{U_y}{y}\right)^2}=\sqrt{E_x^2+E_y^2}$$

它与乘除关系的相对不确定度传递式完全相同。

由此可见，若测量关系式仅是乘除关系时，结果的相对不确定度等于各直接测量相对不确定度的方和根，所以通常均是先用相对不确定度传递式计算出结果的相对不确定度 E_x，然后再由 $U_\phi=\phi\cdot E_\phi$ 来计算 ϕ 的不确定度。

表 1-5 列出了一些常用函数的不确定度传递公式。

表 1-5

测量关系式	不确定度传递公式	测量关系式	不确定度传递公式
$\phi=x\pm y$	$U_\phi=\sqrt{U_x^2+U_y^2}$	$\phi=x^p$	$E_p=\|p\|E_x$
$\phi=kx$	$E_\phi=E_x$	$\phi=\frac{x^p y^q}{z^r}$	$E_\phi=\sqrt{(pE_x)^2+(qE_y)^2+(rE_z)^2}$
$\phi=xy$	$E_\phi=\sqrt{E_x^2+E_y^2}$	$\phi=\sin x$	$U_\phi=\|\cos x\|U_x$
$\phi=x/y$	$E_\phi=\sqrt{E_x^2+E_y^2}$	$\phi=\ln x$	$U_\phi=E_x$

下面以单摆测量重力加速度 g 为例，分析不确定度传递过程，并计算 g 的测量结果。

例 1-20 已知在用单摆测量重力加速度的实验中，测量关系式为 $g=4\pi^2 l/T^2$，实验中已计算出：

(1) 对于 l：$\bar{l}=69.0\text{cm}$，$\sigma_1=0.2\text{cm}$，$\Delta_1=0.1\text{cm}$，则 $U_T=\sqrt{\sigma_1^2+\Delta_1^2}=0.2\text{cm}$，结果表示为 $l=(69.0\pm0.2)\text{cm}$，$E_1=0.3\%$。

(2) 对于 T：$\bar{T}=1.668\text{s}$，$\sigma_T=0.006\text{s}$，$\Delta_T=0.004\text{s}$，则 $U_T=\sqrt{\sigma_T^2+\Delta_T^2}=0.007\text{s}$，结果表示为 $T=(1.668\pm0.007)\text{s}$，$E_T=0.42\%$。

然后求重力加速度 g。

方法一：通过计算各不确定度分量来求。

$$\frac{\partial g}{\partial T}=\frac{-8\pi^2 l}{T^3}=-1.17\times10^3(\text{cm/s}^3),\quad \frac{\partial g}{\partial l}=\frac{4\pi^2}{T^2}=14.19(\text{cm/s}^2)$$

$$U_{gT}=\left|\frac{\partial g}{\partial T}\right|U_T=8.2(\text{cm/s}^2),\quad U_{gl}=\left|\frac{\partial g}{\partial l}\right|U_l=2.8(\text{cm/s}^2)$$

$$U_g=\sqrt{U_{gT}^2+U_{gl}^2}=8.7(\text{cm/s}^2)$$

所以 g 的测量结果为：$g=(979.1\pm8.7)\text{cm/s}^2$，$E_g=0.89\%$。

方法二：因测量关系式为乘除关系，故可用相对不确定度传递公式求结果。

$$E_g=\sqrt{(2E_T)^2+E_l^2}=0.89\%$$

$$g=4\pi^2 l/T^2=979.1(\text{cm/s}^2),\quad U_g=g\cdot E_g=8.7(\text{cm/s}^2)$$

所以 g 的测量结果为：$g=(979.1\pm8.7)\mathrm{cm/s^2}$，$E_g=0.89\%$。

两种计算方法的结果相同，但用的相对不确定度传递省去求偏导数和许多数学运算，计算要简单得多，所以在测量关系纯属乘除关系时，建议采用相对不确定度传递。

5．间接测量结果的表示和间接测量的计算流程图

间接测量结果的表示方式和直接测量量的结果表示完全相同。对于一个间接测量量，在对其测量关系中各直接测量完成测量之后，可按图 1-9 所示的流程图进行计算，最后表示出测量结果。

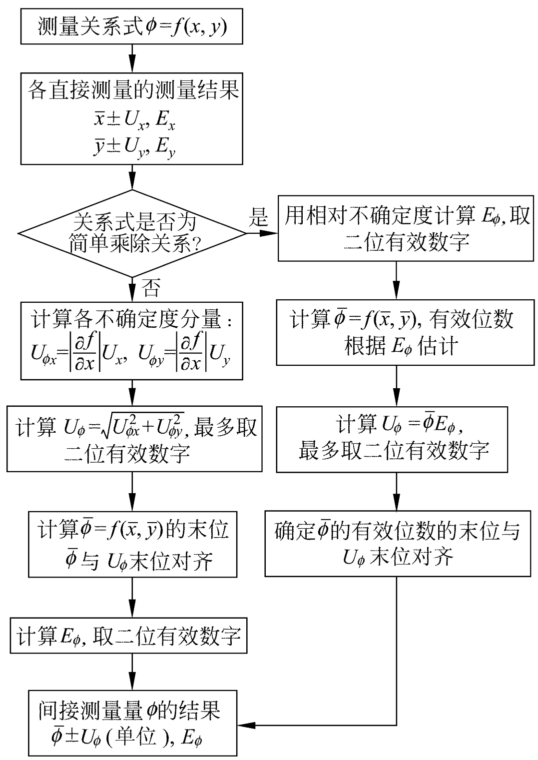

图 1-9

1.3.2 数据处理的基本方法

实验研究不总是单纯地对某一物理量进行测量，大量的实际问题还是要研究几个物理量之间的相互关系、变化规律，以便从中找出它们的内在联系和确定关系。因此，在函数关系测量中，至少应包含两个物理量，一个是“自变量”，另一个是“因变量”，它是“自变量”对应的函数值。数据处理的方法有：列表法、图解法和解析法三种。其中尤以列表法和图表法最为简单明了，本节将介绍这两种方法的一般原则。对于解析法，只局限于讨论线性函数的情况。

1．列表法

数据列表记录和处理时，应遵循下列原则：

(1) 各栏目(纵或横)均应标注名称和单位;若名称用自定义的符号,则需加以说明。

(2) 列入表中的数据主要应是原始数据,处理过程中的一些重要中间结果也应列入表中。

(3) 栏目的顺序应充分注意数据之间的联系和计算的程序,力求条理、齐备和简明。

(4) 若是函数关系测量的数据表,则应按自变量由小到大或由大到小的顺序排列。

下面以千分尺测量钢丝直径 d 为例,将数据列于表 1-6 中(千分尺的 $\Delta=0.004\text{mm}$)。

表 1-6

测量次数 n	零位读数/mm	测量读数/mm	d_i/mm	$\bar{d}$/mm	$v_i(v_i=d_i-\bar{d})$/mm	$v_i^2/10^{-7}\text{mm}^2$
1	−0.003	0.498	0.501	0.5042	−0.0032	102
2		0.502	0.505		0.0008	6
3		0.504	0.507		0.0028	78
4		0.500	0.503		−0.0012	14
5		0.502	0.505		0.0008	6
6		0.501	0.504		−0.0002	0
$\sum$					−0.0002	206
$\sigma=\sqrt{\sum v^2/(n-1)}=0.0020(\text{mm}),\Delta=0.004\text{mm},U=\sqrt{\sigma^2+\Delta^2}=0.004(\text{mm})$ $d=(0.504\pm0.004)\text{mm},E=0,8\%$						

特别应该指出的是:在记录和处理数据时,应将数据列为表格的形式,既可有条不紊,又能简明醒目;既有助于表示出物理量之间的对应关系,又有助于检查和发现实验中的问题。这应成为科学工作者的一种习惯,它不仅适用于函数关系测量,也适用于单一物理量的重复测量,所以有普遍性,今后每个实验的数据均应列表处理。

2. 图表法

在自然科学和工程技术问题中,将具有函数关系的测量结果绘制成图表,是一种普遍实用的方法。它的优点是直观简明,应用方便,能以最醒目的方式显示出测量量之间的变化规律。特别是对于那些尚未找到适当解析表达式的实验结果,用图线来表示实验结果的函数关系就更为重要。

制作一副完整而精确的图线应该注意以下几个内容:图纸的选择、坐标的分度和标记、标点和连线、注释和说明等。

1) 图纸的选择

图纸通常有线性直角坐标纸(毫米方格纸)、对数坐标纸、半对数坐标纸、极坐标纸等。实验者应根据具体实验情况选取合适的坐标纸。

因为图线中直线最易绘制,也便于使用,所以在绘制图线时最好通过变量变换将某种函数关系曲线改画成直线,例如:

(1) $y=a+bx$,无须作变量变换,y 与 x 是线性关系。

(2) $y=a+b/x$,则令 $u=1/x$,得 $y=a+bu$,y 与 u 为线性关系。

(3) $y=ax^2$，两边取对数，得 $\lg y=\lg a+b\lg x$，$\lg y$ 与 $\lg x$ 为线性关系。

(4) $y=ae^{bx}$，取自然对数，得 $\ln y=\ln a+bx$，$\ln y$ 与 x 为线性关系（亦可取对数得 $\lg y=\lg a+b'x$，$\lg y$ 与 x 为线性关系，但是系数 b 有异于 b'）。

对于(1)，选用线性直角坐标纸就可得直线；对于(2)，若用 u 作坐标，则在线性直角坐标纸上也是一条直线；对于(3)，在选用了对数坐标纸后，无须对 x、y 作对数计算就能将 $y=ax^b$ 的关系曲线变换成直线；对于(4)，则应选择半对数坐标纸作图。如果手头只有线性直角坐标纸而要作(3)、(4)图线时，则应先将相应的测量值进行对数运算并列成表格后再作图。

2）坐标的分度和标记

绘制图线时，总是以自变量作为横坐标，以因变量作纵坐标，并应标明各坐标轴所代表的物理量，即轴名（可用符号表示）及其单位。

坐标的分度要根据实验数据的有效数字和对结果的要求来定。原则上，数据误差位正好对应图中一小格内的估读位，即数据中的可靠位在图中也应是可靠的。但这并非一条严格的定则，特别是当两个量的有效数字位数相差悬殊的时候，往往以它们中位数较少的为准，适当扩大它的坐标比例（例如扩大 2 倍等），以使图线有近于 1 的斜率为宜。

在坐标轴上每隔一定间距应均匀地标出坐标值；坐标的分度应以不用计算便能确定点的坐标为原则，通常只采用 1、2、5 进行分度，禁忌用 3、7 等进行分度。

3）标点和连线

根据测量数据，用“＋”记号标出各测点在坐标纸上的位置，记号的交点应是测量点的坐标位置，横、竖线段可以表示测量点的误差范围。

连线必须使用工具（直尺、曲线尺、曲线板等），所作图线必须光滑匀整。

在作一条平滑曲线（包括直线）时，应尽可能地通过较多的测点，但这应该是自然地而不是牵强地通过；还应使不在线上的点较均匀地分布在所画图线的两侧，而不一定必须通过两端测点的任一点。（仪器仪表的校正曲线除外，它必须将相邻两点连成直线，整个校正曲线呈折线形式。）

4）注释和说明

在图线的明显位置处应写清图的名称，在图名下方可写上必不可少的实验条件和图注。当需要从图线上读取点值时，应在图线上用特殊的记号标明该点的位置，并在其旁标明它的坐标值(x,y)。

下面以测量弹簧受力与伸长关系为例进行列表和图解。

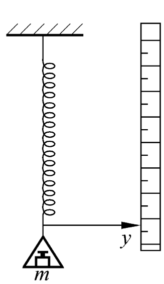

图 1-10

例 1-21 用图 1-10 所示的实验装置测量弹簧受力与伸长的关系，以获得弹簧的劲度系数 k。作用于弹簧的拉力是砝码 m 的重力，在弹簧的弹性范围内，其伸长与所受的拉力成正比；所以，弹簧指标线处的读数 y 与砝码盘中的质量 m 有下列关系：

$$y=y_0+F/k=y_0+(g/k)m$$

式中，k 是弹簧的劲度系数；y_0 是未加砝码时弹簧指标线在米尺上的位置（称初始位置）；g 为重力加速度（上海地区 $g=9.794\mathrm{m/s^2}$）。实验测得的数据列于表 1-7 中。