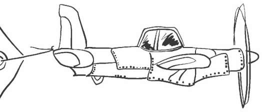
第11章



机械振动

我们生活的世界中，物质运动的形式多种多样，振动是常见的一种运动形式。物体在平衡位置附近作来回往复的运动，称为**机械振动**（**mechanical vibration**），简称**振动**。振动现象非常普遍：拨一下琴弦，可以看到琴弦在平衡位置附近往复运动；一阵微风吹过，能够感觉到树梢在微风中来回摇摆运动；此外，心脏的跳动、海浪的起伏、钟摆的运动、固体晶格点阵中的原子或分子的运动，都是振动。

值得注意的是，振动并不限制在机械运动范围以内。任一物理量（如位移、电流等）在某一数值附近反复变化，称为**广义振动**。虽然各种振动的本质不同，但形式上它们遵循类似的规律，描写它们所需要的数学形式都是相同的。振动作为一种普遍的运动形式，其基本原理是声学、光学、电工学、无线电学等科学技术的理论基础。

为了研究这些复杂振动的特点，引进“**简谐振动**”（**simple harmonic motion**）这个理想模型。这个理想模型的意义在于许多振动接近于简谐振动，如弹簧振子在阻力很小时的振动、单摆在摆角很小时的振动、音叉的振动、弦的振动、轮船在海上的颠簸，等等。而那些复杂的振动往往可以分解成许多简谐振动。这种从简单到复杂，从特殊到一般的研究方法，是我们在学习物理时经常使用的。

11.1 简谐振动

【思考 11-1】

（1）分析下列三类运动的特点，说一说它们是不是振动。想一想生活中你都接触了哪些振动，并分析形成振动有哪些必要因素。

① 拍皮球的运动；

② 荡秋千；

③ 经过敲击后的鼓面。

（2）在中学物理中学过的弹簧振子的运动和单摆的运动有哪些共同点？

简谐振动是最简单、最基本的振动，常见的振动常可近似视为简谐振动，许多复杂振动也都可以看作是许多简谐振动合成的结果。因此，掌握简谐振动的特征和规律非常重要。例如研究一个作直线运动质点的简谐振动时，应结合动力学特征分析：①在怎样的力（或力

矩)的作用下物体作简谐振动;②根据力(或力矩)的运动关系,求出简谐振动的动力学方程。

首先建立线性回复力的概念。质点在某位置所受的力(或沿运动方向所受的力)等于零,则此位置称做**平衡位置**。若作用于质点的力的大小总与质点相对于平衡位置的位移大小成正比,方向指向平衡位置,则此作用力称为**线性回复力**(**restoring force**)。质点在线性回复力作用下围绕平衡位置的运动叫做**简谐振动**。

11.1.1　简谐振动的特征及其表达式

研究简谐振动常用的理想模型是弹簧振子(spring oscillator)。一个质量可以忽略不计且劲度系数为 k 的弹簧一端固定,另一端系一质量为 m 的小球,二者所构成的系统叫做弹簧振子模型。

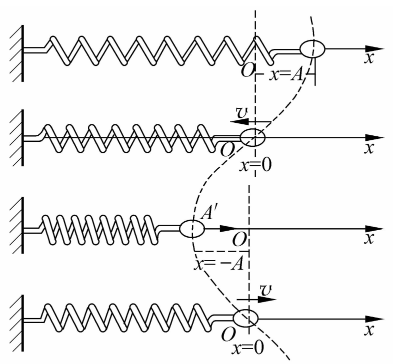


图　11-1-1

图 11-1-1 所示就是一个弹簧振子。弹簧质量与小球相比很小,可以不计;不考虑作用于小球的空气阻力及与支撑面的摩擦。将小球视作质点,弹簧自由伸展时质点位置 O 点为平衡位置。将小球自 O 点移动一小位移至 A 点,然后静止释放。可以观察到小球作变加速运动,由 A 点加速运动到 O 点;通过 O 点后减速到达 A' 点;继而又加速运动回到 O 点后减速回到 A 处,如此往复运动。以 O 点处为坐标原点,水平向右为正,建立如图 11-1-1 所示的坐标系。在弹性限度内运动时,根据胡克定律,有

$$F=-kx \tag{11-1-1a}$$

式中 k 是弹簧的劲度系数,与弹簧的材料、形状、大小有关。负号表示力的方向与位移的方向相反。由牛顿运动定律得

$$a=\frac{F}{m}=-\frac{k}{m}x \tag{11-1-1b}$$

对于给定的弹簧振子,k 和 m 都是正的常量,可令

$$\omega^2=\frac{k}{m} \tag{11-1-2}$$

代入式(11-1-1b)得

$$a=-\omega^2 x \tag{11-1-3}$$

可见,弹簧振子所受的力符合线性回复力的特征,所以作简谐振动。此时,弹簧振子的加速度的大小与位移的大小 x 成正比,而方向相反。凡是加速度的大小与位移的大小成正比而方向相反的振动称为简谐振动,这也可视为简谐振动的另一种定义。因

$$a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

所以式(11-1-3)也可以写成

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0 \tag{11-1-4}$$

这是简谐振动的微分方程,求解该微分方程,得此微分方程的通解为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{11-1-5}$$

式中的 A、φ 是两个积分常数，它们的物理意义将在下面讨论。式(11-1-5)为简谐振动的运动学方程，也称简谐振动的振动方程。

【讨论 11-1-1】

讨论竖直悬挂的弹簧振子与水平放置的弹簧振子的运动特点，并总结简谐振动的特点。

【分析】

设一个劲度系数为 k 的轻质弹簧竖直悬挂，下端挂一质量为 m 的物体(图 11-1-2)。今将物体向下拉一段距离后再放开，物体将开始振动。分析其运动并与水平放置的弹簧振子的运动比较，结果见表 11-1-1。

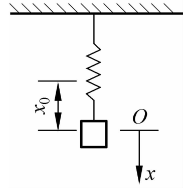


图　11-1-2

表 11-1-1　竖直悬挂的弹簧振子与水平放置的弹簧振子的运动比较

描　　述	水平放置的弹簧振子	竖直悬挂的弹簧振子	物 理 意 义
平衡位置	弹簧的原长处	弹簧伸长为 x_0 处，且满足 $mg=kx_0$	平衡位置指的是系统的合外力为零的位置
坐标系	以系统的平衡位置为坐标原点，水平向右为正，如图 11-1-1 所示	以系统的平衡位置为坐标原点，竖直向下为正，如图 11-1-2 所示	坐标 x 的意义为振动物体离开平衡位置的位移
位移为 x 时的动力学方程	$F=-kx$ $a=\frac{F}{m}=-\frac{k}{m}x$	$F=mg-k(x+x_0)=-kx$ $a=\frac{F}{m}=-\frac{k}{m}x$	振动物体的合外力(或者加速度 a)与位移的大小 x 成正比，而方向相反
位移为 x 时的动力学微分方程	$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ $\omega^2=\frac{k}{m}$	$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ $\omega^2=\frac{k}{m}$	微分方程为一元二阶齐次常微分方程，且系数相同(表明其振动周期相同，分析见 11.1.2 节)
位移为 x 时的运动学方程	$x=A\cos(\omega t+\varphi)$	$x=A\cos(\omega t+\varphi)$	振动物体离开平衡位置的位移满足余弦规律

从表 11-1-1 可见，竖直悬挂的弹簧振子与水平放置的弹簧振子具有相同的动力学方程(式(11-1-1))、微分方程(式(11-1-4))和运动学方程(式(11-1-5))，它们都是简谐振动。要证明一个振动物体是否作简谐振动，只要证明上面三个式子中的一个即可，由其中的一个可以推出另外两个。

11.1.2　简谐振动的振幅、周期及频率

式(11-1-5)是有界的、周期性的余弦函数，表明简谐振动的有界性和周期性。为了描述其有界性和周期性，引入振幅、周期和频率等物理量。

在振动的研究中，我们常用振动质点离开平衡位置的位移来表示振动质点的位置。而简谐振动方程(11-1-5)中，A 表示质点离开平衡位置($x=0$)的最大位移的绝对值，称为简谐振动的**振幅(amplitude)**。

又因 $\cos(\omega t+\varphi)$是时间 t 的周期函数，所以简谐振动是周期运动，周期性是简谐振动的基本特征。每隔一固定时间间隔 T，运动重复一次，这个固定时间间隔 T 称为简谐振动的**周期(period)**，则有

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \tag{11-1-6}$$

振动学中常把 2π 秒内的振动周期数称为**角频率**(**angular frequency**)(也叫**圆频率**),以 ω 表示。把单位时间内物体所作完全振动的次数称为振动的**频率**(**frequency**),通常用 ν 表示。根据这个定义,角频率 ω 与频率 ν 以及周期 T 三者之间的关系是

$$\omega=2\pi\nu=\frac{2\pi}{T} \tag{11-1-7}$$

频率 ν 的单位是赫兹,符号为 Hz($1\mathrm{Hz}=1\mathrm{s}^{-1}$);**角频率** ω 单位为弧度每秒,符号 rad/s,也可以用每秒表示,符号为 s^{-1}。对于弹簧振子,由式(11-1-2)得

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{11-1-8}$$

所以振动的周期和频率可写为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{11-1-9}$$

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{11-1-10}$$

对于给定的弹簧振子,k 和 m 都是正的常量,所以简谐振动的周期和频率完全由弹簧振子本身的性质(如弹簧振子,其周期和频率决定于振动系统的弹性和惯性)决定,与初始条件无关,因此这种周期和频率称为**固有周期**和**固有频率**。

11.1.3 简谐振动的 *x-t* 图线

简谐振动也可以用振动曲线来描述,称为谐振曲线,如图 11-1-3 所示。图中振幅 $A=0.02\mathrm{m}$,周期 $T=0.4\mathrm{s}$。

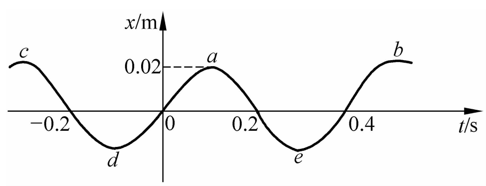


图 11-1-3

11.1.4 简谐振动的速度和加速度

将简谐振动方程式(11-1-5)对时间求导数,即得作简谐振动的质点的速度

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi_0)=\omega A\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right) \tag{11-1-11a}$$

上式也可写成

$$v=v_{\mathrm{m}}\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right) \tag{11-1-11b}$$

式中 $v_{\mathrm{m}}=A\omega$ 是速度的最大值,称为速度振幅。

将式(11-1-11a)对时间再次求导数,即得作简谐振动的质点的加速度

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2A\cos(\omega t+\varphi) \tag{11-1-12}$$

或

$$a=\omega^2A\cos(\omega t+\varphi\pm\pi)=a_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi\pm\pi)$$

加速度的振幅 $a_{\mathrm{m}}=\omega^2A$。

将式(11-1-5)与式(11-1-12)相比，可以得到一个重要的结果

$$a=-\omega^2x \tag{11-1-13}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2x \tag{11-1-14}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0 \tag{11-1-15}$$

式(11-1-13)说明，作简谐振动的质点的加速度大小和位移大小恒成正比而反向。这是简谐振动的运动学特征。

图 11-1-4 给出了简谐振动的 x、v、a 随时间变化的关系曲线。物体在作简谐振动时，不但位移是周期性的，其速度、加速度也都是周期性变化的。

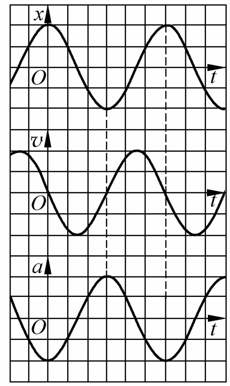


图　11-1-4

11.1.5　简谐振动的相位

在简谐振动方程(11-1-5)中，$\omega t+\varphi$ 称为简谐振动在 t 时刻的**相位**(**phase**)，它是表示振动物体的位置和运动状态的物理量。假设已知简谐振动的振幅 A，又知道简谐振动的相位 $\omega t+\varphi$，由式(11-1-5)即可求出 t 时刻振动物体的位移 x。同样可由式(11-1-11)和式(11-1-12)确定物体的速度和加速度。

简谐振动方程中的 φ 是 $t=0$ 时的相位，称为**初相**或**初相位**(**initial phase**)，可以由振动物体的初始状态来决定。

如果在 $t=0$ 时，振动物体的位移 x_0 和初速度 v_0(即所谓初始条件)为已知，我们就可以完全确定这一简谐振动。将初始条件代入式(11-1-5)和式(11-1-11a)中，就可以得到简谐振动的振幅 A 和初相 φ 分别为

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \tag{11-1-16a}$$

$$\tan\varphi=-\frac{v_0}{\omega x_0} \tag{11-1-16b}$$

在时间从 t_1 到 t_2 的过程中，相位从 $\varphi_1=\omega t_1+\varphi$ 变化到 $\varphi_2=\omega t_2+\varphi$，相位变化 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\omega(t_2-t_1)=\omega\Delta t$。从 t_1 到 t_2 的相位变化称为相位差，等于角频率(相位变化的速率)与变化的时间之积。将上式进一步记作 $\Delta\varphi=\omega\Delta t=\frac{2\pi}{T}\Delta t$。

【讨论 11-1-2】

相位差与时间差的关系还常常用于讨论两个振动的同步。有两个同方向同频率的简谐振动

$$x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

讨论以下问题：

(1) 两个振动的相位及其初相位；

(2) 两者的相位差；

(3) 当 $\varphi_2-\varphi_1=\pm 2k\pi(k=0,1,2,\cdots)$，$\varphi_2-\varphi_1=\pm(2k+1)\pi(k=0,1,2,\cdots)$以及其他值时，两个振动有何特点？

【分析】

第一个振动的相位为 $\omega t+\varphi_1$，其中 φ_1 为其初相位；第二个振动的相位为 $\omega t+\varphi_2$，其中 φ_2 为其初相位。它们之间的相位差(简称相差)为

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1$$

显然，同一时刻，两个同方向、同频率的简谐振动的相位差取决于两者之间的初相差，而与时间无关。

当 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\pm 2k\pi(k=0,1,2,\cdots)$时，这两个振动质点将步调一致，同时到达各自的极大值，同时越过原点并同时到达极小值，称为同相。

当 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\pm(2k+1)\pi(k=0,1,2,\cdots)$时，它们的步调正好相反，一个到达极大值时，另一个将到达极小值，它们同时越过原点但方向相反，并同时到达各自的另一个极值，称为两者反相。

当 $\Delta\varphi$ 为其他值时，我们一般说两者不同相。例如，对于下面两个简谐振动：

$$x_1 = A\cos\omega t$$

$$x_2 = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A\cos\left(\omega t + \frac{T}{4}\right)$$

它们的相差为 $\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}$，即振动 x_2 的相位始终要比振动 x_1 的相位大$\frac{\pi}{2}$，称振动 x_2 比 x_1 超前$\frac{\pi}{2}$。

图 11-1-5 描出了这两个同频率的简谐振动曲线(图中实线表示 x_1 振动，虚线表示 x_2 振动)。从图中可以看出，在 $t=0$ 时，x_1 振动的相位为 0，x_2 振动的相位为$\frac{\pi}{2}$；在 $t=T/4$ 时，x_1 振动的相位变为了$\frac{\pi}{2}$，而 x_2 振动的相位则变为 π。对于这种情况，我们说 x_2 振动在相位上超前 x_1 振动$\frac{\pi}{2}$，或说成是 x_1 振动落后于 x_2 振动$\frac{\pi}{2}$。即两个振动比较，相位大的一个称为超前，相位小的一个称为落后。从时间上看，我们可以说 x_2 振动超前 x_1 振动 $T/4$，即x_1 振动必须要在 $T/4$ 后才能到达 x_2 振动现在的状态。也就是说，两个振动比较，时间因子大的一个称为超前，时间因子小的一个称为落后。两个同频率的简谐振动的相差 $\Delta\varphi$ 和时间差 Δt 的关系仍然可以表示为 $\Delta\varphi=\omega\Delta t=\frac{2\pi}{T}\Delta t$，表示一个振动的时间每超前一个周期，则它的相位超前 2π。

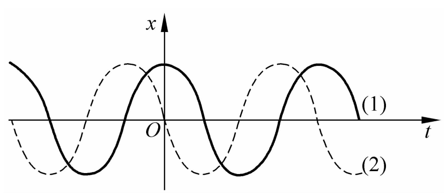


图 11-1-5

例 11-1-1　图 11-1-3 所示为一个简谐振动的振动曲线。求：

（1）该简谐振动的振动方程；

（2）该简谐振动任意时刻的速度和加速度表达式。

解：对于一个简谐振动，我们把振幅 A、角频率 ω 和初相 φ 这三个量叫做描述简谐振动的三个特征量。这三个量一旦确定，简谐振动方程及其运动速度和加速度就确定了。对给定的振动系统，周期由系统本身的性质决定，振幅和初相由初始条件决定。

对本题而言，由图 11-1-3 可知，振幅 $A=0.02\text{m}$，周期 $T=0.4\text{s}$，角频率 $\omega=\frac{2\pi}{T}=5\pi(\text{rad/s})$。

由图 11-1-3 还可知，$t=0$ 时刻，振动质点的位移和初速度为

$$x_0=0$$

$$v_0>0$$

由式(11-1-14b)或者由式(11-1-5)和式(11-1-11)联立，均可求得初相 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$。故该简谐振动的振动方程可写为

$$x=0.02\cos\left(5\pi t-\frac{\pi}{2}\right)\quad(\text{SI})$$

其速度和加速度的表达式为

$$v=-\frac{\pi}{10}\sin\left(5\pi t-\frac{\pi}{2}\right)\quad(\text{SI})$$

$$a=-\frac{\pi^2}{2}\cos\left(5\pi t-\frac{\pi}{2}\right)\quad(\text{SI})$$

【练习 11-1】

11-1-1　下列运动中哪些是机械振动，哪些属于简谐振动，哪些可以近似看成简谐振动？

（1）拍皮球的运动；

（2）荡秋千；

（3）完全弹性球在地面上不断地弹跳；

（4）小球在一个半球形碗底附近来回滚动。

（5）把液体灌入 U 形管内，液柱的振荡。

11-1-2　表 11-1-1 比较了水平方向和竖直方向的弹簧振子的平衡位置、合外力特点、微分方程和运动方程的特点以及它们的角频率 ω。继续讨论以下问题：

（1）把弹簧振子放置在斜面上，弹簧振子振动的平衡位置、合外力、微分方程和运动方程以及其角频率 ω 各是多少？

（2）对于竖直方向或者在斜面上的弹簧振子，能否取弹簧原长处为坐标原点？这时它还是简谐振动吗？

（3）两个轻质弹簧（劲度系数分别为 k_1 和 k_2）串联（如图 11-1-6(a) 所示）或者并联（如图 11-1-6(b) 所示）后可视为一个等效的弹簧振子，这个等效的弹簧振子的周期、频率和角频率如何表示？

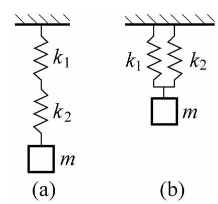


图　11-1-6

11-1-3 轻弹簧上端固定,下系一质量为 m_1 的物体,稳定后在 m_1 的下边又系一质量为 m_2 的物体,于是弹簧又伸长了 Δx 。若将 m_2 移去,并令其振动,试求出该系统的振动周期。

11-1-4 两个质点各自作简谐振动,它们的振幅相同、周期相同,第一个质点的振动方程为 $x_1=A\cos(\omega t+\alpha)$,在 $t=0$ 时第一个质点位于最大位移的一半处且向正 x 方向运动。当第一个质点从相对平衡位置的正位移处回到平衡位置时,第二个质点正在最大位移处。求:

(1) 第二个质点的初相位;

(2) 第二个质点的振动方程;

(3) 振幅为 12.0cm,周期为 2.0s,求 $t=0.5$s 时,两个质点的位置、速度和加速度。

11-1-5 要证明一个振动物体是否作简谐振动,只要证明振动物体满足动力学方程(式(11-1-1))、微分方程(式(11-1-4))和运动学方程(式(11-1-5))三个式子中的一个即可。其中常用的方法是对振动物体进行受力方析,得到物体所受的合外力满足线性回复力的关系(式(11-1-1a))。按照这种方法,解决以下问题:

(1) 单摆(摆球质量为 m,摆长为 l)的小角度的摆动是简谐振动,并求出其系统固有周期;进一步分析单摆大角度摆动,看有什么结论。

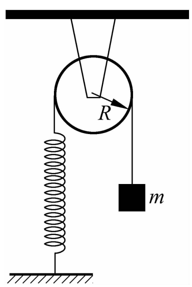


图 11-1-7

(2) 定滑轮半径为 R,转动惯量为 J,轻绳绕过滑轮,一端与固定的轻弹簧连接,弹簧的劲度系数为 k;另一端挂一质量为 m 的物体,如图 11-1-7 所示。现将 m 从平衡位置向下拉一微小距离后放手,试证物体作简谐振动,并求其振动周期。(设绳与滑轮间无滑动,轴的摩擦及空气阻力忽略不计。)

(3) 设想开凿一条贯通地球直径的隧道,将质量为 m 的小球(视为质点)从洞口由静止释放,试证小球在此隧道内的运动为简谐振动,并求小球的振动周期。设地球半径为 R,且地球质量是均匀分布的,其密度为 ρ。(提示:质点 m 所受的万有引力完全来自处于该质点位置以内的这部分球体,而外层球壳对该质点的合力为零。)

11-1-6 【讨论 11-1-2】中比较了两个同方向、同频率的简谐振动的步调,给出了同相、反相以及超前和落后的概念,试画出在同相、反相以及超前(或者落后)时的这两个振动的振动曲线,并比较分析。

11-1-7 定性解释以下现象:

(1) 火车检修工人常常手持榔头敲击火车的车轮等部位,通过听敲击后车轮等部位发出的声音来检测列车的关键部位是否有损伤,他们依据的是什么原理?

(2) 唐朝时,洛阳某寺一僧人房中挂着的一件乐器经常莫名其妙地自动鸣响,僧人因此惊恐成疾。后来他的一个朋友找到一把铁锉,在乐器上锉磨几下,乐器便再也不会自动作响了。

11-1-8 绕不通过质心的水平转轴摆动的刚体称为复摆。当刚体作小角度摆动时也可视为简谐振动。船舶是一个复摆,查阅有关的资料,了解复摆的振动分析,并定性讨论决定船舶的稳定性因素。

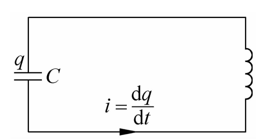


图 11-1-8

11-1-9 图 11-1-8 所示为一电磁振荡电路,试写出电荷对时

间的微分方程，与机械振动的微分方程对比，证明电磁振动电路中电荷和电流的变化都是广义振动，并写出它们的变化周期和频率。

11.2 旋转矢量法

【思考 11-2】

作圆周运动的质点，如果从侧面看，你看到的质点的运动轨迹是怎样的？两者间的关系是什么？

1610 年，伽利略用他新制作的望远镜发现了木星的四颗主要卫星。经过数周的观察，每颗卫星对他来说，似乎都在作相对于木星的来回运动，即现在我们所说的简谐振动。而实际上，卫星是绕木星作匀速圆周运动。这说明简谐振动是从侧面看的匀速圆周运动，更准确地说，简谐振动是匀速圆周运动在所沿圆的直径上的投影。据此，我们引入研究简谐振动的矢量表示法(**The rotating vector representation**)**——旋转矢量法**。

如图 11-2-1，$\boldsymbol{A}$ 为一长度保持不变的矢量，$\boldsymbol{A}$ 的始点在 x 坐标轴的原点处，计时起点 $t=0$ 时，矢量与坐标轴夹角为 φ，矢量 $\boldsymbol{A}$ 以角速度 ω 逆时针匀速转动，角速度等于简谐振动的角频率 ω。经过时间 t 后，旋转矢量 $\boldsymbol{A}$ 转过了角度 ωt。此时，矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 x 坐标轴的夹角为 $\omega t+\varphi$，若用 x 表示矢量在坐标轴上的投影，有

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

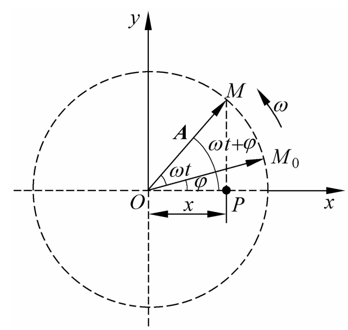


图 11-2-1

由此可见，匀速旋转矢量在坐标轴上的投影即表示一特定的简谐振动。于是我们可以按如下方法来描述简谐振动：旋转矢量的长度等于振幅，故矢量 $\boldsymbol{A}$ 叫做振幅矢量；矢量转动的角速度等于简谐振动的角频率；旋转矢量与 x 轴间的夹角即等于简谐振动的相位。**用旋转矢量在坐标轴上的投影来描述简谐振动的方法叫做简谐振动的矢量表示法(旋转矢量法)。**

用旋转矢量的投影表示简谐振动的方法，可以帮助我们更直观地了解简谐振动的位移和时间的关系以及简谐振动方程中 A、ω 和 φ 三个物理量的意义，而且下面讨论振动合成时，用这种方法求解有关问题十分方便。需要说明的是，旋转矢量法只是为直观地描述简谐振动而引用的一种工具，可以根据解决问题方便与否决定是否采用。

【讨论 11-2-1】

用旋转矢量法表示【讨论 11-1-2】中两个同频率、同方向的简谐振动的步调：(1)同相；(2)反相；(3)x_1 振动落后于 x_2 振动。

【分析】

设 $A_1>A_2$，在旋转矢量图 11-2-2 中，(a)图中两振幅矢量方向相同，在同一直线上以相同的角速度一起匀速旋转，表示两对应的简谐振动同相；(b)图中两振幅矢量方向相反，在同一直线上以相同的角速度一起匀速旋转，表示两对应的简谐振动反相；(c)图中两矢量以相同的角速度匀速旋转，但振幅矢量 $\boldsymbol{A}_2$ 在前，振幅矢量 $\boldsymbol{A}_1$ 在后，表示 x_1 振动落后于 x_2 振动。

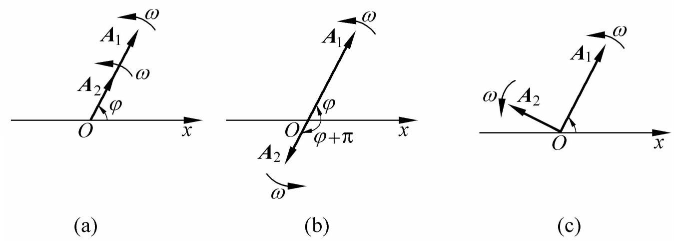


图 11-2-2

例 11-2-1 一质点沿 x 轴作简谐振动,振幅为 A,周期为 T。

(1) 当 $t=0$ 时,质点对平衡位置的位移 $x_0=A/2$,质点向 x 轴正向方运动,求质点振动的初相;

(2) 质点从 $x=0$ 处向 x 轴正向运动到 $x=A/2$ 处最少需要多少时间?

解:(1) 当 $t=0$ 时,质点的位移 $x_0=A/2$,故 $t=0$ 时的矢量图中的旋转矢量应与 x 轴构成 60°角,即与 x 的夹角为 $\varphi=\pi/3$ 或 $\varphi=-\pi/3$,见图 11-2-3(a)。若 $\varphi=\pi/3$,注意到矢量的转动方向是沿逆时针方向的,所以此时矢量端点 M 的投影正向 x 轴负方向运动,这不合题意;若 $\varphi=-\pi/3$,此时矢量端点 M'的投影正向 x 正方向运动,符合题意。故质点振动的初相应为 $\varphi=-\pi/3$。

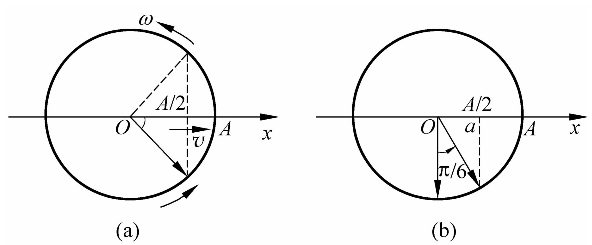


图 11-2-3

(2) 质点从位移为 $x=0$ 向 x 轴正向运动到 $x=A/2$ 处的过程,在图 11-2-3(b)中即为质点从 O 点运动到 a 点的过程。由于质点的运动不是匀速运动,所以运动时间在 x 轴上不能直接判断出来。在矢量图中,质点从 $x=0$ 处运动到 $x=A/2$ 处的过程,旋转矢量是从 $\varphi=-\pi/2$ 处转动到 $\varphi=-\pi/3$ 处,转过了 $\pi/6$ 的角度。由于矢量的转动是匀角速转动,转动一周的时间是 T,故转过 $\pi/6$ 的时间应为 $T/12$,这也就是质点从 $x=0$ 处向 x 轴正向运动到 $x=A/2$ 处所需要的最短时间。

例 11-2-2 一轻弹簧的右端连着一物体,弹簧的劲度系数为 $k=0.72\text{N/m}$,物体的质量 $m=20\text{g}$。

(1) 把物体从平衡位置向右拉到 $x=0.05\text{m}$ 处停下后再释放,求简谐振动方程;

(2) 求物体从初位置运动到第一次经过 $A/2$ 处时的速率;

(3) 如果物体在 $x=0.05\text{m}$ 处时速度不等于零,而是具有向右的初速度 $v_0=0.30\text{m/s}$,求其运动方程。

解:(1) 要求简谐振动方程,需先求角频率 ω、振幅 A、初相位 φ。对给定的振动系统,周期由系统本身的性质决定,即

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{0.72}{0.02}}=6.0(\text{s}^{-1})$$

而振幅和初相由初始状态决定。由题意知，初始状态为 $x_0=0.05\text{m}, v_0=0$。则

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=x_0=0.05(\text{m})$$

$\tan\varphi=\dfrac{-v_0}{\omega x_0}=0$ 则可求得 $\varphi=0$ 或 π；设向右方向为 x 轴正向，由旋转矢量图 11-2-4 知 $\varphi=0$。

图 11-2-4

所以简谐振动的运动方程为

$$x=0.05\cos 6t \quad (\text{SI})$$

(2) 物体在 $A/2$ 处时，由运动方程 $\dfrac{A}{2}=A\cos\omega t$ 知

$$\omega t=\frac{\pi}{3} \quad 或 \quad -\frac{\pi}{3}$$

由于向 x 轴负方向运动，由旋转矢量图 11-2-5 知第一次经过 $A/2$ 时，$\omega t=\dfrac{\pi}{3}$；因此，物体从初位置运动到第一次经过 $A/2$ 处时的速率由式(11-1-11a)得

$$v=-\omega A\sin\omega t=-0.26(\text{m/s})$$

(3) 设所求的运动方程为 $x=A'\cos(6t+\varphi)$。因 $t=0$ 时，$x_0=0.05\text{m}, v_0=0.30\text{m/s}$，故

$$A'=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=0.07(\text{m})$$

由 $x_0=A'\cos\varphi$ 知 $0.05=0.07\cos\varphi$，即

$$\varphi=-\frac{\pi}{4} \quad 或 \quad \frac{3}{4}\pi$$

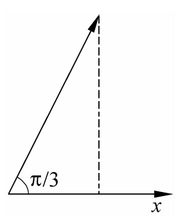


图 11-2-5

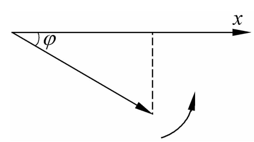


图 11-2-6

又因为 $v_0=-A\omega\sin\varphi>0$，所以 φ 取 $-\pi/4$。旋转矢量图如图 11-2-6 所示。则所求的运动方程为

$$x=0.07\cos\left(6t-\frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{SI})$$

【练习 11-2】

11-2-1 一质点作简谐振动的圆频率为 ω、振幅为 A。以下列各种情况为起始时刻，试画出此振动的旋转矢量图，并确定该振动的初相位。

(1) 质点位于 $x=A/2$ 处且朝 x 轴负方向运动；

(2) 质点位于 $x=-\dfrac{\sqrt{2}A}{2}$ 处且朝 x 轴正方向运动；

(3) 质点过平衡位置向 x 轴正方向运动；

(4) 质点被压缩到最大位移处。

11-2-2 一质点作简谐振动，周期为 T。当它由平衡位置向 x 轴正方向运动时，用旋转矢量法求解：

(1) 由平衡位置到正的最大位移这段路程所需要的最短时间为多少？

(2) 由平衡位置到 $\frac{A}{2}$(A 为最大位移，下同)处这段路程所需要的最短时间为多少？

(3) 由 $\frac{A}{2}$ 处到 A 处这段路程所需要的最短时间为多少？

(4) 由平衡位置到 $\frac{\sqrt{2}A}{2}$ 处这段路程所需要的最短时间为多少？

11-2-3 在一轻弹簧下端悬挂 $m_0=100\text{g}$ 的砝码时，弹簧伸长 8cm。现在这根弹簧下端悬挂 $m=250\text{g}$ 的物体，构成弹簧振子。将物体从平衡位置向下拉动 4cm，并给以向上的 21cm/s 的初速度(这时 $t=0$)，选 x 轴向下，求振动方程的数值式。

11-2-4 作简谐运动的小球，速度最大值为 $v_m=3\text{cm/s}$，振幅 $A=2\text{cm}$，若从速度为正的最大值的某时刻开始计算时间：(1)求振动的周期；(2)求加速度的最大值；(3)写出振动表达式。

11-2-5 已知某简谐振动的振动曲线如图 11-2-7 所示，位移的单位为厘米，时间单位为秒。求此简谐振动的振动方程。

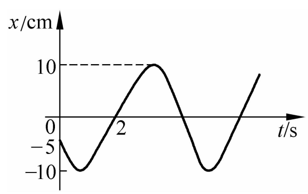


图 11-2-7

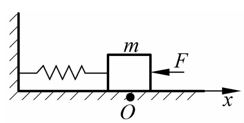


图 11-2-8

11-2-6 如图 11-2-8 所示，有一水平弹簧振子，弹簧的劲度系数 $k=24\text{N/m}$，重物的质量 $m=6\text{kg}$，重物静止在平衡位置上。设以一水平恒力 $F=10\text{N}$ 向左作用于物体(不计摩擦)，使之由平衡位置向左运动了 0.05m 时撤去力 F。当重物运动到左方最远位置时开始计时，求物体的运动方程。

11-2-7 在 11.2 节只讨论了匀速旋转矢量在坐标轴上的投影表示一特定的简谐振动，事实上，匀速旋转矢量末端质点的速度和加速度的投影恰好表示这一特定简谐振动的速度和加速度，试证明。

11.3 简谐振动系统的能量

【思考 11-3】

弹簧振子可视为质点，你能求出振子的动能、势能和总能量吗？它们有什么特点？为什么？

以弹簧振子为例，弹簧振子的线性回复力为弹性力，是保守力，所以简谐振动系统的总

机械能是守恒的。现在讨论弹簧振子振动系统的动能和势能随时间的变化规律，并计算总机械能。

设简谐振动方程及速度表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

可以计算任意时刻一个弹簧振子的动能和弹性势能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \tag{11-3-1}$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi) \tag{11-3-2}$$

因为 $\omega^2 = k/m$，式(11-3-1)可以写成

$$E_k = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

由式(11-3-1)和式(11-3-2)可见，弹簧振子的动能和势能都随时间作周期性变化。当位移最大时，速度为零，动能也为零，而势能达到最大值；当在平衡位置时，势能为零，而速度为最大值，所以动能也达到最大值。

动能与势能之和称为机械能，即有

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$
$$= \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \tag{11-3-3}$$

由式(11-3-3)可见，尽管在振动中弹簧振子的动能和势能都在随时间作周期性变化，但总能量是恒定不变的，并与速度振幅的平方成正比；而在频率一定时，总能量则和振幅的平方成正比。这一结论对于任一谐振动系统都是正确的。

弹簧振子的动能、势能随时间的变化曲线及位移随时间的变化曲线如图 11-3-1 所示。可以发现，动能和势能的变化频率是弹簧振子频率的两倍，总能量则并不改变。且在每一周期内，动能的平均值和势能的平均值应该是相等的，等于总能量的一半。

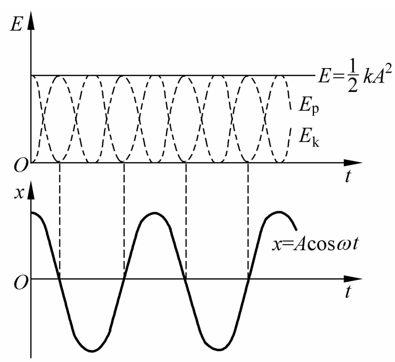


图 11-3-1

例 11-3-1 质量为 0.10kg 的质点作简谐振动，其振动方程为

$$x = 6.0\times10^{-2}\cos\left(10t - \frac{1}{4}\pi\right)\ (\text{SI})$$

(1) 求通过平衡位置的动能；

(2) 求总能量；

(3) 当 x 值为多大时，系统的势能为总能量的一半？

解：(1) 由振动方程知振幅 $A = 6.0\times10^{-2}$m；角频率 $\omega = 10$rad/s；通过平衡位置时动能最大，最大动能为

$$E_{k,max}=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2=1.8\times10^{-2}(\mathrm{J})$$

(2) 总能量等于最大动能,即

$$E=\frac{1}{2}kA^2=1.8\times10^{-2}(\mathrm{J})$$

(3) 因为势能 $E_p=\frac{1}{2}kx^2$,总能量 $E=\frac{1}{2}kA^2$,由题意知

$$\frac{1}{2}kx^2=kA^2/4$$

即 $x=\pm\frac{A}{\sqrt{2}}=\pm4.24\times10^{-2}(\mathrm{m})$时,系统的势能为总能量的一半。

【练习 11-3】

11-3-1 物体作简谐振动时,其动能和势能也作周期性的变化。分析以下问题:

(1) 动能和势能的变化是广义的简谐振动吗?其周期和频率为多少?

(2) 动能和势能随时间作周期性的变化。一个与时间有关的物理量 $F(t)$在时间间隔 T 内的平均值定义为 $\bar{F}=\frac{1}{T}\int_0^T F(t)\mathrm{d}t$,根据这一定义求动能和势能的平均值。

(3) 在二分之一最大位移处的简谐振动系统的动能和势能的关系是怎样的?

(4) 简谐振动系统的动能和势能在哪些位置相等?在哪些位置最大?在哪些位置最小?

11-3-2 作简谐运动的系统机械能守恒,试由

$$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=常量$$

推导出简谐振动的微分方程和运动学方程。

11-3-3 一弹簧振子沿 x 轴作简谐振动(弹簧为原长时振动物体的位置取作 x 轴原点)。已知振动物体最大位移为 $x_m=0.4\mathrm{m}$,最大恢复力为 $F_m=0.8\mathrm{N}$,最大速度为 $v_m=0.8\mathrm{m/s}$。

(1) 求该振动的振幅、角频率以及弹簧的劲度系数;

(2) 求振动系统的总能量;

(3) 若系统在 $t=0$ 的初位移为 0.2m,且初速度与所选 x 轴方向相反,求此振动的表达式。

11-3-4 一物体质量为 0.25kg,在弹性力作用下作简谐振动,弹簧的劲度系数 $k=25\mathrm{N/m}$,如果起始振动时具有势能 0.06J 和动能 0.02J,求:

(1) 振幅;

(2) 动能恰等于势能时的位移;

(3) 经过平衡位置时物体的速度。

11.4 简谐振动的合成

我们听到的琴弦所发出的悠扬悦耳的声波,实际上是琴弦上若干种频率振动的合成。若有两列波同时在空间传播,则在相遇区域内,各体元的振动是这两列波在该处引起振动的

合成，在日常生活中，我们常常遇到两个或更多个**简谐振动合成**（**combination of simple harmonic motions**）的问题。一般的振动合成问题比较复杂，我们只讨论几种简单的情况。

11.4.1 同方向同频率的简谐振动的合成

设质点参与同方向同频率的两个简谐振动

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases} \tag{11-4-1}$$

式中 A_1、A_2 以及 φ_1、φ_2 分别表示两个振动的振幅和初相，ω 表示它们共同的角频率，x_1、x_2 表示在同一直线上距同一平衡位置的位移，此时合振动的位移 x 仍在同一直线上，而且等于上述两分振动位移的代数和，即

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) + A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

我们用旋转矢量法来讨论这两个简谐振动的合成。如图 11-4-1 所示，从 Ox 轴的原点 O 作表征两个简谐振动的旋转矢量 $\overline{OM}_1=\boldsymbol{A}_1$ 与 $\overline{OM}_2=\boldsymbol{A}_2$。在 $t=0$ 时刻，它们与 x 轴的夹角分别为 φ_1 和 φ_2。利用平行四边形法则，$\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_2$ 的合矢量为 $\overline{OM}=\boldsymbol{A}$，它与 x 轴的夹角为 φ。并且矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 Ox 轴上的投影 x 等于 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$ 的投影 x_1、x_2 之和，即

$$x = x_1 + x_2 \tag{11-4-2}$$

式中 x_1、x_2 分别为 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$ 的端点在 x 轴上的投影点距平衡位置的位移，亦即两个分振动的位移。式(11-4-2)表示矢量 $\boldsymbol{A}$ 的端点在 x 轴上的投影点距平衡位置的位移等于两个分振动的位移的代数和。

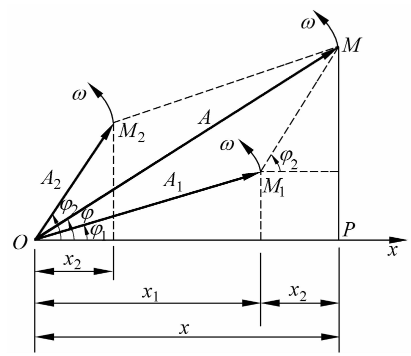


图 11-4-1

由于两矢量均以角速度 ω 绕 O 点匀速转动，因此在任一时刻 t，平行四边形的形状保持不变，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的长度也保持不变，并以相同的角速度 ω 绕 O 点匀速转动。此时，矢量 $\boldsymbol{A}$ 是相应于合振动的旋转矢量，这说明合振动是与分振动同频率的简谐振动，并且合振动的振幅等于矢量 $\boldsymbol{A}$ 的大小，合振动的初相位 φ 等于 $t=0$ 时刻合振动的旋转矢量与 x 轴的夹角。因此，合振动的振动表达式可记为

$$x = A\cos(\omega t+\varphi) \tag{11-4-3}$$

在图 11-4-1 中，由余弦定理可求得合振幅为

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)} \tag{11-4-4}$$

由直角三角形的几何关系求得初相位为

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \tag{11-4-5}$$

【讨论 11-4-1】

对于式(11-4-1)表示的两个同方向、同频率的简谐振动，讨论以下问题：

(1) 合振动的合振幅、频率和初相由哪些因素决定？

(2) 两分振动同相和反相时的振幅和初相有何特点？

【分析】

由前面的分析可知，两个同方向同频率的简谐振动的合振动仍然是简谐振动，角频率与

分振动的角频率相同;振幅 A 以及初相位分别由式(11-4-4)和式(11-4-5)决定。

由式(11-4-4)可知,合振动的振幅不但与两个分振动的振幅有关,而且与分振动的初相位差有关。下面分三种情况讨论。

(1) 若两分振动同相,即 $\varphi_2-\varphi_1=\pm 2k\pi, k=0,1,2,\cdots$,由式(11-4-4)知

$$A = A_1 + A_2$$

此时,合振动的振幅最大,为两分振动的振幅之和,合振动的初相与两个分振动相同,称两分振动相互加强。

(2) 若两分振动反相,即 $\varphi_2-\varphi_1=\pm(2k+1)\pi, k=0,1,2,\cdots$,由式(11-4-4)知

$$A = |A_1 - A_2|$$

此时,合振动的振幅最小,为两分振动的振幅之差的绝对值,合振动的初相与振幅大的分振动的初相相同,称两分振动相互减弱。如果 $A_1=A_2$,则 $A=0$。此情形下,"振动加振动等于不振动",就是说振动合成的结果使质点处于静止状态。

上述结果说明,两个分振动的相位差对合振动起着重要的作用。总结如下:

当两个分振动同相时,合振动的振幅最大,等于两个分振动的振幅值和;当两个分振动反相时,合振动的振幅最小,等于两个分振动的振幅之差的绝对值。

(3) $\varphi_2-\varphi_1$ 等于其他值时,合振幅介于最大和最小之间,即 $|A_1-A_2|<A<A_1+A_2$;其初相位由式(11-4-5)决定。

11.4.2 同方向不同频率简谐振动的合成

设两个同方向简谐振动的频率并不相同,并设它们的角频率分别是 ω_1 和 ω_2,则振动方程分别为

$$\begin{cases} x_1 = A\cos(\omega_1 t+\varphi) \\ x_2 = A\cos(\omega_2 t+\varphi) \end{cases} \tag{11-4-6}$$

这里为了突出频率不同的效果,我们取这两个振动有相同的振幅和初位相。在旋转矢量图上,这两个分振动之间的夹角不再保持恒定,从而合振动振幅的大小随时间变化,在 x 轴上的投影不再是简谐振动。用解析方法可求得合振动

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A\cos(\omega_1 t+\varphi) + A\cos(\omega_2 t+\varphi) \\ &= 2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi\right) \end{aligned} \tag{11-4-7}$$

当 $|\omega_2-\omega_1|\ll\omega_2+\omega_1$ 时,式(11-4-7)表示合振动可视为振幅为 $2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)$、角频率为 $\frac{\omega_2+\omega_1}{2}$ 的振动。

当沿同一直线的两个分振动频率之和远大于两者之差(即 $|\omega_2-\omega_1|\ll\omega_2+\omega_1$)时,其合振动具有一些显著的特点。合振动的振幅 $2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)$ 的变化,比角频率为 $\frac{\omega_2+\omega_1}{2}$ 随时间的变化缓慢得多,这时的合振动是振幅被低频调制的高频振动。

假设 $\omega_2>\omega_1$,即频率 $\nu_2>\nu_1$,也就是说,单位时间内第二个振动比第一个振动多振动 $\nu_2-\nu_1$ 次,在旋转矢量图 11-4-2(a)中,单位时间内矢量 $\boldsymbol{A}_2$ 要比 $\boldsymbol{A}_1$ 多转动 $\nu_2-\nu_1$ 圈。因此,单位时间内这两个矢量有 $\nu_2-\nu_1$ 次恰好同方向,此时合振动振幅最大,如图 11-4-2(b)所

示；有 $\nu_2-\nu_1$ 次恰好反方向，此时合振动振幅最小，如图 11-4-2(c)所示。像这样振动时而加强、时而减弱的现象叫做**拍**(**beat**)，如图 11-4-3 所示。合振动在单位时间内加强或减弱的次数称为**拍频**(**beat frequency**)。这两个振动合成的拍频

$$\nu=\nu_2-\nu_1 \tag{11-4-8}$$

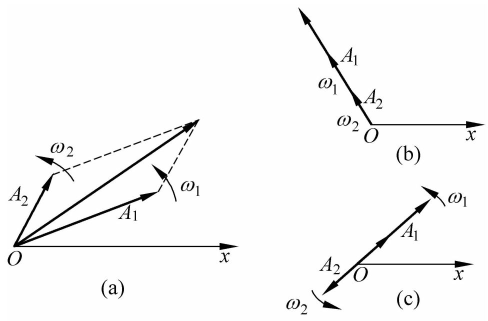


图 11-4-2

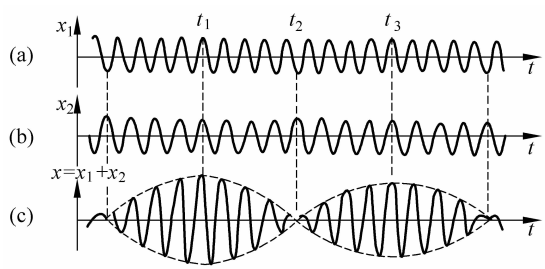


图 11-4-3

拍是一种很重要的现象，可以用于振动频率测量。当两个频率相近的振动合成拍时，若已知其中一个的振动频率，通过实验测得的拍频，利用式(11-4-8)可求出另一个未知的分振动的频率。利用标准音叉校准钢琴以及双簧管的颤音的产生都跟拍现象有关。

关于相互垂直的简谐振动的合成，请读者参考其他有关书籍，以及【练习 11-4】中 11-4-4 题、11-4-5 题。

例 11-4-1 有一个质点参与两个同方向同频率的简谐振动，其中第一个分振动为 $x_1=0.3\cos\omega t$(SI)，合振动为 $x=0.4\sin\omega t$(SI)，求第二个分振动。

解：合振动方程可改写为

$$x=0.4\sin\omega t=0.4\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$$

$t=0$ 时振动合成的矢量图如图 11-4-4 所示。由图中的直角三角形 OPQ 的几何关系可得到第二个分振动的振幅，即它的旋转矢量 $\boldsymbol{A}_2$ 的长度 $A_2=0.5\text{m}$。亦可直接得到第二个分振动的初相位，即旋转矢量 $\boldsymbol{A}_2$ 与 x 轴的夹角 $\varphi_2=-\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{0.3}{0.4}=-\frac{\pi}{2}-0.64=-2.2$，故第二个分振动为

$$x_2=0.5\cos(\omega t-2.2)\quad(\text{SI})$$

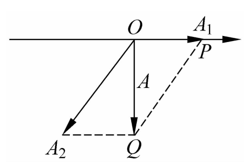


图 11-4-4

【练习 11-4】

11-4-1 一物体同时参与同一直线上的两个(或者三个)简谐振动如下列几种情况,求各个合振动的合振幅、初相以及合振动方程。

(1) $x_1=0.05\cos\left(4\pi t+\dfrac{1}{3}\pi\right)$, $x_2=0.03\cos\left(4\pi t-\dfrac{2}{3}\pi\right)$(SI);

(2) $x_1=0.05\cos\left(3t+\dfrac{1}{3}\pi\right)$, $x_2=0.05\cos\left(3t+\dfrac{7}{3}\pi\right)$(SI);

(3) $x_1=3\times10^{-2}\cos\left(\omega t+\dfrac{1}{3}\pi\right)$, $x_2=4\times10^{-2}\cos\left(\omega t-\dfrac{1}{6}\pi\right)$(SI);

(4) $x_1=A\cos\left(\omega t+\dfrac{1}{3}\pi\right)$, $x_2=A\cos\left(\omega t+\dfrac{5}{3}\pi\right)$, $x_3=A\cos(\omega t+\pi)$(SI);

(5) $x_1=4\times10^{-2}\cos2\left(t+\dfrac{1}{8}\right)$, $x_2=3\times10^{-2}\cos2\left(t+\dfrac{1}{4}\right)$(SI)。

11-4-2 利用公式 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$,用解析法证明:式(11-4-1)代表的两个同方向同频率的简谐振动的合振动是简谐振动,其合振幅和初相满足式(11-4-4)和式(11-4-5)。

11-4-3 N 个同方向同频率的简谐振动,可以用本节的方法合成,首先合成第 1、2 两个振动得到它们的合振动,然后再把这个合振动和第 3 个振动合成,……,最后可得到这 N 个振动的合振动。可以证明这 N 个同方向同频率的简谐振动的合振动仍是简谐振动,合振动的频率仍等于分振动的频率,合振动的振幅和初相可以应用式(11-4-4)和式(11-4-5)求得。已知有 N 个同方向同频率的简谐振动的振动方程如下:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_0\cos(\omega t) \\ x_2 &= A_0\cos(\omega t+\Delta\varphi) \\ x_3 &= A_0\cos(\omega t+2\Delta\varphi) \\ &\vdots \\ x_N &= A_0\cos[\omega t+(N-1)\Delta\varphi] \end{aligned}$$

(1) 试用旋转矢量及其矢量合成法则求解这 N 个同方向同频率的简谐振动的合振动的合振幅为 $A=A_0\dfrac{\sin\dfrac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}}$ 和初相为 $\varphi=\dfrac{N-1}{2}\Delta\varphi$。

(2) 讨论当 $\Delta\varphi=2k\pi(k=0,\pm1,\cdots)$ 和 $N\Delta\varphi=2k'\pi(k'=0,\pm1,\cdots)$ 两种特殊情况下的合振幅。

11-4-4 两个同频率的相互垂直的简谐振动为

$$x=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$$
$$y=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

利用 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ 可写成

$$\frac{x}{A_1}=\cos\omega t\cos\varphi_1-\sin\omega t\sin\varphi_1$$

$$\frac{y}{A_2}=\cos\omega t\cos\varphi_2-\sin\omega t\sin\varphi_2$$

（1）证明两个同频率的相互垂直的简谐振动的合运动的轨迹方程满足

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

（2）分别讨论 $\varphi_2-\varphi_1=2k\pi$，$\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi$，$\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}$ 和 $\varphi_2-\varphi_1=-\frac{\pi}{2}$ 四种情况下的合运动。

11-4-5　两个不同频率的相互垂直的简谐振动的合成运动比较复杂。一般情况下，合成运动的轨迹是不稳定的。但是当两个分振动的频率成简单的整数比时，合成运动将沿一稳定的闭合曲线进行，曲线的形状由两个分振动的振幅、频率及相位差决定。图 11-4-5 给出了对应不同频率比和不同相位差时的合成运动的轨迹，称为李萨如图形（Lissajou figure）。利用这些图形，可由一已知频率的振动求得另一振动的未知频率。若已知两个频率之比，也可求得两分振动的相位关系，这在无线电技术中非常有用。这些图形可以在示波器上观察到，也可以利用旋转矢量法作出。

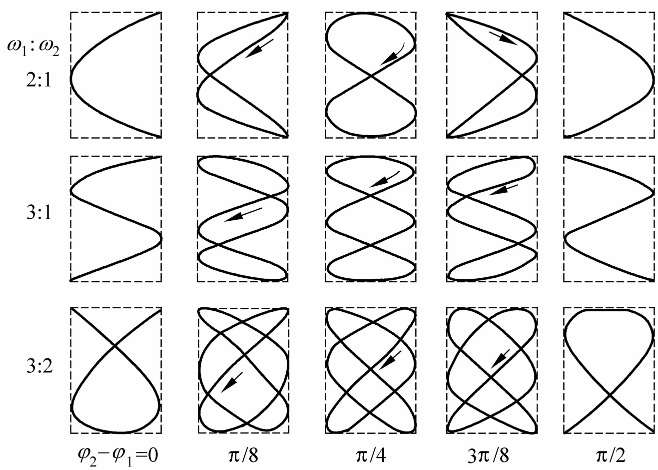


图　11-4-5

（1）利用旋转矢量法作出这些图形；

（2）找出频率之比与图形的切点间的关系

$$\frac{\omega_x}{\omega_y}=\frac{\nu_x}{\nu_y}=\frac{x\text{ 达到最大的次数}}{y\text{ 达到最大的次数}}$$

11.5　阻尼振动　受迫振动

前面我们讨论的无阻尼振动是一种理想的情况。事实上，阻尼的作用是难以避免的，如果实际的振动物体没有能量的不断补充，振动最后将趋于停止。在实践中，常常为了克服阻尼的作用，而对振动系统作用一周期性的外力，来获得稳定的振动。本节将讨论阻尼振动的情况以及受迫振动的情况。

11.5.1 阻尼振动

任何振动系统所具有的能量，由于受到各种阻力的作用，使得其机械能不断地转化为其他形式的能量，结果使振动系统的振幅不断减小。振动系统因受阻力作用作振幅减少的运动，叫作**阻尼振动**(**damped vibration**)。

由于振动系统接触面之间的摩擦以及周围介质的振动导致振动能量向四周辐射形成的阻力作用统称为阻尼或阻尼力。**阻尼可分为摩擦阻尼、辐射阻尼和电磁阻尼**。摩擦阻力以粘滞阻力为主，辐射引起的阻力作用性质与粘滞阻力相似。为简单起见，下面只考虑粘滞阻力的作用，并只讨论运动微分方程为线性微分方程的阻尼问题。运动微分方程为非线性微分方程的振动称为非线性振动。

实验证明，当运动速度不大时，在空气或液体中运动的物体所受到的流体粘滞阻力的大小，可近似地认为与速度一次方成正比，即

$$F_r = -\gamma v = -\gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

其中 γ 为常数，称为**阻力系数**(**coefficient of resistance**)。考虑了这种粘滞阻力后，水平弹簧振子系统中物体所受的合力等于上述阻尼力和弹性力之和，由牛顿第二定律得物体的运动微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - kx \tag{11-5-1}$$

为求解方便，两边同时除以 m 得

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{\gamma}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{11-5-2}$$

并令 $\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$，$\beta=\dfrac{\gamma}{2m}$，ω_0 即振动系统的固有频率；β 称为**阻尼系数**(**damping coefficient**)，它和振动系统的性质以及媒质的性质有关。于是，式(11-5-2)可写为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2x = 0 \tag{11-5-3}$$

根据微分方程理论，对于一定的振动系统，可根据阻尼系数 β 大小之不同，解出三种可能的运动状态。

(1) 弱阻尼状态

当阻力很小时，以致 $\beta<\omega_0$。由式(11-5-3)可求出质点的运动学方程

$$x = A\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega' t + \alpha) \tag{11-5-4}$$

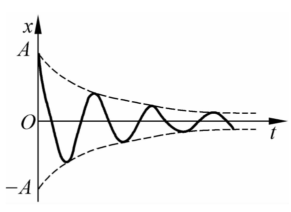


图 11-5-1

其中 $\omega' = \sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$；$A$ 与 α 为待定常数，由初始条件决定。式(11-5-4)中包含两因子，$A\mathrm{e}^{-\beta t}$ 表示不断随时间而衰减的振幅，$\cos(\omega' t+\alpha)$则以 ω' 为角频率作周期性变化。式(11-5-4)表示质点作运动范围不断缩小的往复运动，这种振动状态称弱阻尼状态。图 11-5-1 画出了弱阻尼的振动曲线。

我们把函数 $\cos(\omega' t+\alpha)$的周期，即振动物体相继两次通过极大位置(或者极小位置)所经历的时间叫做阻尼振动的周期，并用 T'表示，即有