第七章

空间解析几何与向量代数

向量是重要的数学工具之一，中学已经学习了如何利用向量来解决一些简单的几何问题．本章将以向量为工具，来研究空间的平面和直线，以及空间曲线和曲面．

第一节　向量及其线性运算

向量可以用有向线段来表示，本节借助于向量的这种几何表示，介绍向量的基本概念和基本运算．

一、向量概念

在力学、物理学等问题中所遇到的量，可以分为两大类：其中一类完全由数值来决定，如时间、密度、温度、质量，等等，称为**数量**（或**标量**）；另一类既有大小又有方向的量，如力、速度、位移、电场强度等，称为**向量**（或**矢量**），通常记作$\overrightarrow{AB}$或$\boldsymbol{a}$．

向量的大小称为**向量的模**，$\boldsymbol{a}$ 或$\overrightarrow{AB}$的模分别记作$|\boldsymbol{a}|$或$|\overrightarrow{AB}|$（图 7-1）．模为 1 的向量称为**单位向量**．模为 0 的向量称为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$，零向量的方向可看作是任意的．

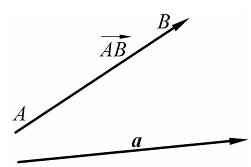

图　7-1

由定义知，一个向量由它的模和方向完全确定，通常称与起点位置无关的向量为**自由向量**．如无特别说明，今后所讨论的向量都是自由向量．

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，方向相同，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$．设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，如果它们同向或反向，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**或**共线**，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$．如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向互相垂直，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **垂直**或**正交**，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$．

二、向量的线性运算

1．向量的加法

在工程技术领域中，经常遇到求位移或力的合成等问题．例如，飞机在飞行过程中由于气流对机翼上下翼面存在压力差，所以产生了升力 $\boldsymbol{L}$，而气流对飞机又存在阻力 $\boldsymbol{D}$，因此，飞机在空中飞行时会有一个作用于飞机的空气总动力 $\boldsymbol{R}$．通常情况下，飞机的空气总动力是向

上并向后倾斜的，如图 7-2 所示. 如何确定总动力 $\boldsymbol{R}$？

由于这类问题的需要，以下给出向量加法的定义.

定义 7.1（**向量加法的平行四边形法则**）　设有两个不平行的向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A 作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB、AD 为邻边作一平行四边形 $ABCD$，连接对角线 AC（图 7-3），则称向量$\overrightarrow{AC}$为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

定义 7.2（**向量加法的三角形法则**）　设有向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC（图 7-4），则向量$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

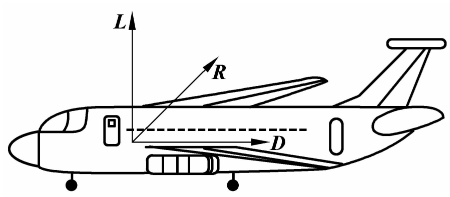

图　7-2

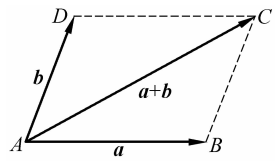

图　7-3

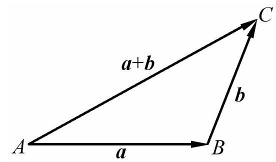

图　7-4

容易验证，上述两种定义是等价的. 此外，向量的加法符合下列运算规律：

（1）**交换律**　　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

（2）**结合律**　　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

向量加法的三角形法则可以推广到任意有限多个向量之和. 如图 7-5 所示作向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_5$，并使前一向量的终点作为下一向量的起点，再以第一个向量的起点为起点，最后一个向量的终点为终点作一个向量 $\boldsymbol{s}$，则

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5.$$

2. 向量的数乘运算

定义 7.3　设 λ 是实数，$\boldsymbol{a}$ 为向量，定义 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的**数乘**是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定：

（1）$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模：$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$；

（2）$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向.

特别地，$\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；$\lambda=-1$ 时，$(-1)\boldsymbol{a}$ 是大小与 $|\boldsymbol{a}|$ 相等，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反的向量，称这个向量为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，用记号 $-\boldsymbol{a}$ 表示（图 7-6）.

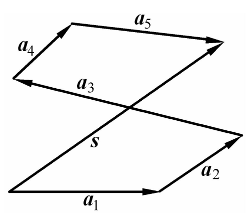

图　7-5

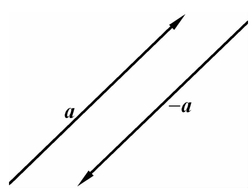

图　7-6

从几何上看，向量 $\boldsymbol{a}$ 与数 λ 的乘积实际上就是将向量 $\boldsymbol{a}$ 沿着它的同向（或反向）伸长（或缩短）到它的模的 $|\lambda|$ 倍所得到的向量.

通常把与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，记作 $\boldsymbol{a}^{\circ}$. 由定义 7.3 知，

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ},$$

从而

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

上式表明，一个非零向量与它的模的倒数相乘的结果是一个与原向量同方向的单位向量. 这个过程又称为将非零向量 $\boldsymbol{a}$ **单位化**.

下面，给出两个向量的差的定义.

定义 7.4　设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的负向量的和称为向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的**差**(图 7-7(a))，记作 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，即 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$.

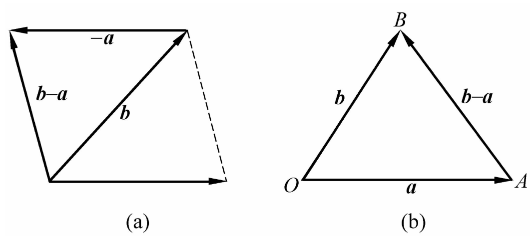

图　7-7

由图 7-7(a)可见，如果将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移至同一起点，将 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(向右)平移，则 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 是由 $\boldsymbol{a}$ 的终点向 $\boldsymbol{b}$ 的终点所引的向量(图 7-7(b)).

由定义，可以验证向量的数乘运算符合下列运算规律：

(1) **结合律**　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) **分配律**　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量的加法和数乘运算统称为向量的线性运算.

下面介绍关于向量模的一个常用不等式：

$$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

此不等式称为**三角不等式**. 它的几何意义是三角形两边长之和大于第三边之长，两边长之差小于第三边之长(图 7-8)，其中等号仅在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向时成立.

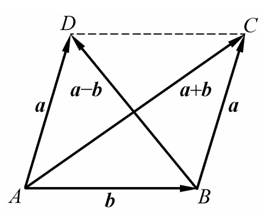

图　7-8

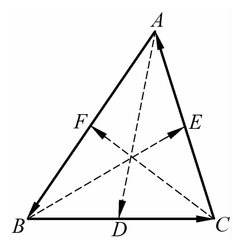

图　7-9

例 1　在△ABC 中，设$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，如图 7-9 所示，三角形的三边中点分别为 D,E,F，求证：$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$.

证　由题意知，

$$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{BE}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{CF}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c},$$

即

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\frac{3}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

又因为

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{0},$$

所以 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{0}$.

根据向量数乘的定义，可得两个向量平行（或共线）的充要条件.

定理 7.1 设有非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证 由向量的数乘定义，条件的充分性是显然的. 下面证明必要性.

当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时，取 $\lambda=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时，取 $\lambda=-\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向. 又

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|,$$

所以 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

再证数 λ 的唯一性. 设另有实数 μ，使得 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，由于 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，两式相减，得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},$$

即 $|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0$. 因为 $|\boldsymbol{a}|\neq0$，所以 $|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$，故 λ 是唯一的. 定理证毕.

习题 7-1

1. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=5\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

2. 在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$，这里 M 是平行四边形对角线的交点.

3. 设 $\triangle ABC$ 的重心为 G，任一点 O 到三角形三顶点的向量为 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{r}_1$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{r}_2$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{r}_3$，求证：$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3)$.

4. 一架波音飞机以 200m/s 的速率向东飞行，遇到以 30m/s 速率、朝向东北方向 60°的气流，请结合图形利用向量加法求出飞机的实际飞行速率和飞行方向.

第二节　空间直角坐标系　向量的坐标

通过建立平面直角坐标系，可以给出平面上的点与二维有序数组之间的一一对应关系，从而可以用代数的方法来研究平面上的几何问题. 为了用代数的方法来研究空间的几何问题，自然想到构建空间直角坐标系，建立空间中的点与三元有序数组之间的一一对应关系. 在引入空间直角坐标系之后，作为几何对象的空间向量可以用坐标来表示，而向量的代数运算也可以通过坐标来进行。

一、空间直角坐标系及向量的坐标表示

1. 空间直角坐标系

所谓空间直角坐标系是指：给定一点 O，引出过该点的三条互相垂直的数轴 Ox，Oy，

Oz(它们通常具有相同的长度单位). 它们构成一个空间直角坐标系,称为 $Oxyz$ **直角坐标系**;其中 O 称为坐标系的**原点**;Ox,Oy,Oz 分别称为 x **轴**(**横轴**)、y **轴**(**纵轴**)、z **轴**(**竖轴**).

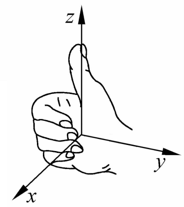

图　7-10

空间直角坐标系有右手系和左手系两种. 通常采用右手系,即以右手握住 z 轴,当右手的四个手指从 x 轴的正向转过 $\frac{\pi}{2}$ 的角度到 y 轴的正向时,大拇指的指向就是 z 轴的正向(图 7-10).

三条坐标轴中的每两条可以确定一张平面,这样的平面称为**坐标面**. 由 x 轴和 y 轴确定的坐标面称为 xOy 面,另外两个坐标面依次为 yOz 面和 zOx 面. 如图 7-11 所示,三张坐标面将空间划分为八个部分,每个部分称为一个**卦限**,分别用罗马数字 Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,Ⅴ,Ⅵ,Ⅶ,Ⅷ表示.

建立了空间直角坐标系后,空间任一点可以用三元有序数组来对应. 设 M 是空间任意一点,过点 M 作三张平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴,三张平面与坐标轴分别交于 P,Q,R(图 7-12). 设 P,Q,R 在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为 x,y,z,则点 M 就唯一确定了一个有序数组 (x,y,z);反之,任意给定一个有序数组 (x,y,z),在 x 轴、y 轴、z 轴上分别取坐标为 x、y、z 的三个点 P、Q、R,然后过 P,Q,R 三点分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的三个平面,这三张平面必然交于空间中的一点. 由此可见,空间中的点 M 与有序数组 (x,y,z) 之间存在着一一对应关系,称有序数组 (x,y,z) 为点 M 的**坐标**,并依次称 x,y,z 为点 M 的**横坐标**、**纵坐标**、**竖坐标**.

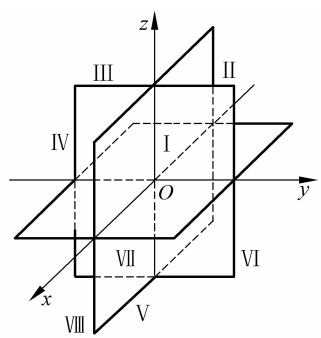

图　7-11

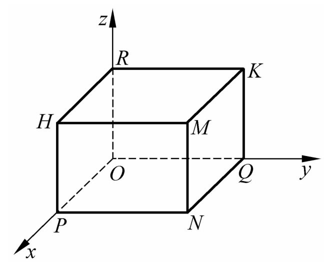

图　7-12

不难看出,在不同卦限中的点对应的坐标 x,y,z 的符号不同,具体变化如下:

第Ⅰ卦限	$x>0,y>0,z>0$;	第Ⅱ卦限	$x<0,y>0,z>0$;
第Ⅲ卦限	$x<0,y<0,z>0$;	第Ⅳ卦限	$x>0,y<0,z>0$;
第Ⅴ卦限	$x>0,y>0,z<0$;	第Ⅵ卦限	$x<0,y>0,z<0$;
第Ⅶ卦限	$x<0,y<0,z<0$;	第Ⅷ卦限	$x>0,y<0,z<0$.

2. 向量的坐标表示

空间直角坐标系中,不仅可以用三元有序数组来表示空间中的点,而且可以用三元数组来表示空间向量,因而向量的运算可以通过坐标来进行,下面先用三元数组来表示一类特殊的空间向量——向径.

任意给定一个向量 $\boldsymbol{r}$，通过平移使其起点位于坐标原点 O，终点记为 M. 向量$\overrightarrow{OM}$称为点 M 关于原点 O 的**向径**（也称为点 M 的**位置向量**）. 过 M 分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的三个平面，与三坐标轴的交点分别记作 P、Q、R，如图 7-13 所示，由向量加法的三角形法则，有

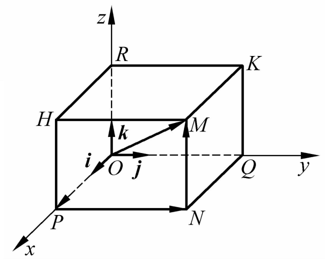

图　7-13

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

在空间直角坐标系中，分别取 x 轴、y 轴、z 轴正向上的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，由向量和数的乘法运算可知

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k},$$

所以

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \tag{7.1}$$

上式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**坐标分解式**，$x\boldsymbol{i},y\boldsymbol{j},z\boldsymbol{k}$ 分别称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿 x 轴、y 轴、z 轴方向的**分向量**. 显然，向量 $\boldsymbol{r}$ 与点 M 以及有序数组 (x,y,z) 是一一对应的，称这样的三元有序数组为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**坐标**，为了与点的坐标有所区别，通常记作

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}.$$

上述关于向量线性运算的定义很直观，便于理解，但计算起来并不方便. 有了向量的坐标表示，就可以用代数的手段进行向量的运算.

设

$$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\quad \boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\},$$

即

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k},$$

利用向量加法的交换律和结合律、向量数乘运算的结合律和分配律，容易得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k},\\ \lambda\boldsymbol{a}&=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}\quad(\lambda\text{ 为实数}),\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\},\\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=\{a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z\},\\ \lambda\boldsymbol{a}&=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}.\end{aligned}$$

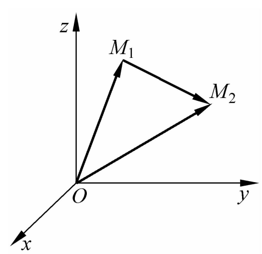

图　7-14

若向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的起点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，如图 7-14 所示，则有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}\\ &=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\ &=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

即

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}. \tag{7.2}$$

也就是说，向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标等于终点 M_2 的坐标减去起点 M_1 的对应坐标.

如前所述，当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，利用向量的坐标表示

式，即

$$\{b_x, b_y, b_z\} = \lambda\{a_x, a_y, a_z\},$$

所以

$$b_x = \lambda a_x, \quad b_y = \lambda a_y, \quad b_z = \lambda a_z,$$

得

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}.$$

这表明，向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行(共线)的充分必要条件是这两个向量的对应坐标成比例.

特别地，运算过程中，如果 a_x, a_y, a_z 中有一个为零，例如 $a_x=0$，而 $a_y a_z \neq 0$，则上式应写成

$$\begin{cases} b_x = 0, \\ \dfrac{b_y}{a_y} = \dfrac{b_z}{a_z}. \end{cases}$$

如果 a_x、a_y、a_z 中有两个为零，例如 $a_x=a_y=0, a_z\neq 0$，则应写成

$$\begin{cases} b_x = 0, \\ b_y = 0. \end{cases}$$

例 1　已知两点 $A(1,2,3)$ 和 $B(-1,2,6)$，在直线 AB 上求一点 M，使得$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$.

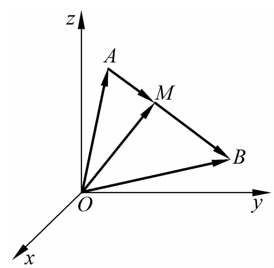

图　7-15

解　如图 7-15 所示，$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$，由于$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$，因此

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}),$$

移项得

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3}(2\{1,2,3\} + \{-1,2,6\}) = \left\{\frac{1}{3}, 2, 4\right\},$$

因此，所求点为 $M\left(\frac{1}{3},2,4\right)$.

类似地，可以在直线 AB 上求一点 M，使得$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$，这样的点 M 称为有向线段$\overrightarrow{AB}$的**定比分点**.

3*. 向量函数的导数及其物理意义

由一元微积分，如果质点作直线运动，其运动方程为 $s=s(t)$，则在时刻 t，质点的速度为 $v(t)=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$. 如果质点在平面上运动，它在时刻 t 的位置向量为 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}$，其中 $x(t), y(t)$是可导函数，通常称 $\boldsymbol{r}(t)$为**向量函数**. 根据物理学，有以下结论：

(1) $\boldsymbol{v}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}$ 是质点的速度向量，并且与曲线相切；

(2) $|\boldsymbol{v}(t)|$表示质点的速率，$\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$表示质点运动的方向；

(3) $\boldsymbol{a}(t)=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}$ 是质点的加速度向量.

例 2 一质点在平面上运动，它的速度向量为(单位：m/s)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{t+1}\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j},\quad t\geqslant 0.$$

若 $t=1$ 时，$\boldsymbol{r}=(\ln 2)\boldsymbol{i}$，求质点的位置向量.

解 $\boldsymbol{r}(t)=\left(\int\frac{\mathrm{d}t}{t+1}\right)\boldsymbol{i}+\left(\int 2t\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{j}=(\ln(t+1))\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{C}$，

将 $t=1$，$\boldsymbol{r}=(\ln 2)\boldsymbol{i}$ 代入上式，得 $\boldsymbol{C}=-\boldsymbol{j}$，所以表示质点位置的向量函数为

$$\boldsymbol{r}(t)=(\ln(t+1))\boldsymbol{i}+(t^2-1)\boldsymbol{j}.$$

二、向量的模、方向余弦、投影

有了向量的坐标表示，下面用向量的坐标来表示向量的模和方向. 因为向量的模和方向都与该向量的起点位置无关，因此可以将向量平移至对应的向径，用向径的模和方向作为向量的模和方向.

1. 向量的模

设向量 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$，如图 7-16 所示，作$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，则$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$. 由勾股定理可得

$$|\boldsymbol{r}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2+|\overrightarrow{OR}|^2},$$

由此得到向量 $\boldsymbol{r}$ 的**模的坐标表达式**：

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{7.3}$$

由于空间两点之间的距离等于以这两点分别为起点和终点的向量的模，所以利用上式和式(7.2)可得空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$的**距离公式**

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{7.4}$$

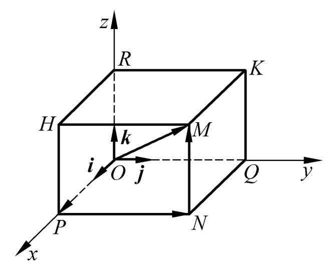

图 7-16

例 3 求证以 $O(0,0,0)$，$A(2,1,-1)$，$B(1,1,3)$三点为顶点的三角形是一个直角三角形.

解 由公式(7.4)计算可得

$$|\overrightarrow{OA}|^2=(2-0)^2+(1-0)^2+(-1-0)^2=6,$$
$$|\overrightarrow{OB}|^2=(1-0)^2+(1-0)^2+(3-0)^2=11,$$
$$|\overrightarrow{AB}|^2=(1-2)^2+(1-1)^2+(3+1)^2=17.$$

由于$|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2$，所以$\triangle ABC$ 是直角三角形.

2. 方向角与方向余弦

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，任取空间一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，在两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所决定的平面内，规定不超过 π 的角$\angle AOB$ 为向量$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**(图 7-17)，记作$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$或$(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$. 如果

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量,规定它们的夹角可在 0 与 π 之间任意取值.

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与三条坐标轴正向之间的夹角 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**,方向角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**(图 7-18). 设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$,由于 $MP\perp OP$, $MQ\perp OQ$, $MR\perp OR$,故

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

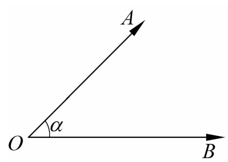

图　7-17

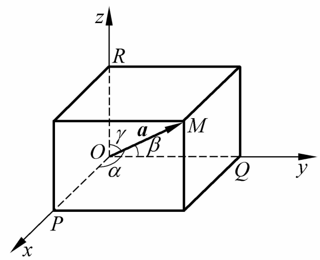

图　7-18

显然,向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦满足关系式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

且

$$\boldsymbol{a}^\circ=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}.$$

上式表明:**与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量就是以 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为坐标的向量.**

3. 向量在轴上的投影

设 u 为一数轴,M 为一已知点,如图 7-19 所示,过点 M 作垂直于 u 轴的平面交 u 轴于点 M'(点 M' 称为点 M 在 u 轴上的**投影点**),称向量 $\overrightarrow{OM'}$ 为向量 $\overrightarrow{OM}$ 在 u 轴上的**分向量**. 设 $\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}$(其中 $\boldsymbol{e}$ 为单位向量),则称数 λ 为向量 $\overrightarrow{OM}$ 在 u 轴上的**投影**,记作 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{OM}$.

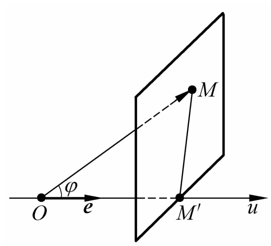

图　7-19

由上述定义可得,向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 在三坐标轴上的投影分别为

$$a_x=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a},\quad a_y=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a},\quad a_z=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}.$$

值得注意的是,向量在坐标轴上的投影与向量在坐标轴上的分向量有本质的区别,如向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 在坐标轴上的投影是三个数 a_x,a_y 和 a_z,而向量在坐标轴上的分向量是三个向量 $a_x\boldsymbol{i},a_y\boldsymbol{j}$ 和 $a_z\boldsymbol{k}$.

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个向量,且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,则称 $\boldsymbol{a}$ 在与 $\boldsymbol{b}$ 同向的数轴上的投影为**向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的**

投影，记作 $\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}$.

向量的投影具有下列性质：

性质 1（**投影定理**）　$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$，其中 φ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角；

性质 2　$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$；

性质 3　$\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$.

例 4　已知两点 $M_1(2,2,0)$ 和 $M_2(1,3,\sqrt{2})$，计算

(1) $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 x 轴上的投影，以及在 z 轴上的分向量；

(2) $|\overrightarrow{M_1M_2}|$；

(3) $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向余弦和方向角；

(4) 与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}$.

解　(1) 因为 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{1-2,3-2,\sqrt{2}-0\}=\{-1,1,\sqrt{2}\}$，所以 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 x 轴上的投影为 -1，在 z 轴上的分向量为 $\sqrt{2}\boldsymbol{k}$；

(2) $|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(\sqrt{2})^2}=2$；

(3) 它的方向余弦为 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$，$\cos\beta=\dfrac{1}{2}$，$\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，方向角为

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\quad \beta=\frac{\pi}{3},\quad \gamma=\frac{\pi}{4};$$

(4) 与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 同方向的单位向量

$$\boldsymbol{e}=\frac{1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}\overrightarrow{M_1M_2}=\frac{1}{2}\{-1,1,\sqrt{2}\}=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

习题 7-2

1. 说明下列各点所在的位置：$A(0,-2,1)$，$B(5,-1,-8)$，$C(3,0,0)$，$D(2,1,-3)$.

2. 求点 $(1,-2,3)$ 关于：(1)各坐标面，(2)各坐标轴，(3)坐标原点的对称点的坐标.

3. 设 $\boldsymbol{a}=\{3,-2,2\}$，求 $\boldsymbol{a}$ 的模及与 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位向量.

4. 求与点 $A(0,-2,3)$、$B(4,1,0)$ 等距离的点的轨迹方程.

5. 求到点 $(3,1,-4)$ 的距离等于到 yOz 面的距离的动点的轨迹方程.

6. 设点 $A(7,1,-4)$，$B(-2,5,3)$，点 M 在 Ox 轴上，且 $|\overrightarrow{AM}|=|\overrightarrow{BM}|$，求点 M 的坐标.

7. 设向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}=\{16,-15,12\}$ 平行，且方向相反，$\boldsymbol{b}$ 的模为 75，求向量 $\boldsymbol{b}$ 的坐标.

8. 设有三点 $A(1,0,-1)$，$B(3,4,5)$ 和 $C(0,-2,-4)$，证明这三点共线.

9. 设 $\boldsymbol{a}=\{1,-1,2\}$，求 $\boldsymbol{a}$ 与三坐标轴的方向余弦.

10. 20N 的力拉一辆小车沿光滑的水平地板行进，力同地板形成 45°角，求使得小车向前的有效力.

11. 一向量的起点为 $A(2,-1,7)$，该向量在三坐标轴上的投影依次为 4，2，-2，求此向量的终点坐标.

12. 设已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$，计算：

(1) 向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模；　　(2) 向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的方向余弦和方向角；

(3) $\overrightarrow{M_1M_2}$在 x 轴上的投影；　　(4) $\overrightarrow{M_1M_2}$在 y 轴上的分向量.

13. 设 $M_1(1,1,1)$和 $M_2(1,2,0)$，求 M_1、M_2 连线上一点 M，使得 $M_1M:MM_2=2:1$.

14. 已知向量$\overrightarrow{OM}$与 Ox 轴夹角为 45°，与 Oy 轴夹角为 60°，向量$\overrightarrow{OM}$的模为 6，且在 Oz 轴的坐标为负值，求 M 点的坐标.

15. 一个质点的位置向量函数为 $\boldsymbol{r}(t)=(\sin t)\boldsymbol{i}+(\cos 2t)\boldsymbol{j}+(\sin t)\boldsymbol{k}$.

(1) 求质点的速度向量和加速度向量；　　(2) $t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$取何值时，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=0$?

第三节　向量的乘法运算

向量的乘法运算应用广泛，下面将通过几个典型的几何和物理问题引入这种运算. 本节主要内容：向量的数量积、向量积、混合积.

一、两个向量的数量积

1. 数量积的概念与性质

引例　常力做功问题

设一物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿直线运动，$\boldsymbol{s}$ 表示位移，那么力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角(图 7-20).

从研究这类实际问题的需要出发，数学上引入了向量的一种乘法运算.

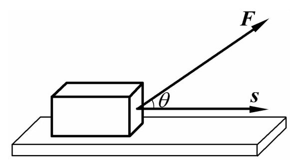

图　7-20

定义 7.5　设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，它们之间的夹角为 θ，乘积$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta. \tag{7.5}$$

向量的数量积也称为**内积**或**点积**.

由上述定义，引例中力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功就等于力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的数量积，即 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$.

根据数量积的定义，不难证明数量积具有以下基本性质：

(1) **非负性** $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；

(2) 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两非零向量，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；

(3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cdot\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}$. 　　(7.6)

即两个向量的数量积等于其中一个向量的模和另一个向量在此向量上投影的乘积. 由此可得

$$\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|},\quad \mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}.$$

数量积具有下列运算规律：

(1) **交换律**　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) (数乘)**结合律**　$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$($\lambda$ 为实数)；

(3) **分配律** $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

以上三个运算规律都可由向量数量积的定义以及式(7.6)导出，下面仅对(3)加以证明.

如果 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，显然成立；如果 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=|\boldsymbol{c}|\operatorname{Prj}_{c}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{c}|(\operatorname{Prj}_{c}\boldsymbol{a}+\operatorname{Prj}_{c}\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{c}|\operatorname{Prj}_{c}\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{c}|\operatorname{Prj}_{c}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

2. 数量积的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})+a_xb_y(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})+a_xb_z(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k})\\&\quad+a_yb_x(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j})+a_yb_z(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k})\\&\quad+a_zb_x(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}),\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 互相垂直，且为单位向量，故由数量积的定义得

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,$$

因此得到两向量**数量积的坐标表达式**

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

即两个向量的数量积等于这两个向量对应坐标的乘积之和.

由于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，故两非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 夹角余弦的坐标表达式为

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

例 1 设 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3\sqrt{2}$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{4}$，计算：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$； (2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$； (3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$； (4) $\operatorname{Prj}_{b}\boldsymbol{a}$.

解 (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{4}=6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=6$；

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=4+18+2\times6=34$；

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=4-18=-14$；

(4) $\operatorname{Prj}_{b}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=|\boldsymbol{a}|\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$.

例 2 已知三点 $A(1,1,1)$，$B(2,2,1)$ 和 $C(3,2,2)$，求(1) $\angle ABC$；(2) $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影.

解 (1) 因为 $\overrightarrow{BA}=\{-1,-1,0\}$，$\overrightarrow{BC}=\{1,0,1\}$，从而

$$\cos\angle ABC=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{-1\times1-1\times0+0\times1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=-\frac{1}{2},$$

所以 $\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$.

(2) 因为 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BC}|\cdot\operatorname{Prj}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA}$，所以 $\operatorname{Prj}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA}=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

例 3 设液体流过平面 S 上面积为 A 的一个区域，流体在这区域上各点处的流速均为(常向量) $\boldsymbol{v}$，设 $\boldsymbol{n}$ 为垂直于 S 的单位向量(如图 7-21(a)所示). 计算单位时间内经过这区域

流向 $\boldsymbol{n}$ 所指一侧的流体的质量 M(流体的密度为 ρ).

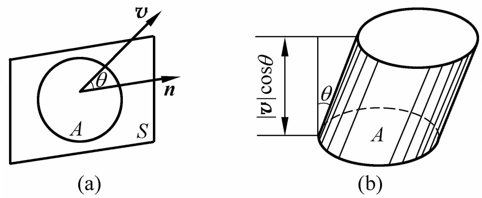

图　7-21

解　单位时间内流过这区域的液体组成一个底面积为 A、斜高为 $|\boldsymbol{v}|$ 的斜柱体(如图 7-21(b)所示),这柱体的斜高与底面垂线的夹角就是流速 $\boldsymbol{v}$ 与向量 $\boldsymbol{n}$ 的夹角 θ,所以这柱体的高为 $|\boldsymbol{v}|\cos\theta$,体积为

$$A|\boldsymbol{v}|\cos\theta = A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n},$$

所以,单位时间内经过这区域流向 $\boldsymbol{n}$ 所指一侧的液体的质量为 $M=\rho A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$.

二、两个向量的向量积

1. 向量积的概念与性质

引例　当用扳手拧螺母时,若扳手沿逆时针方向转动,则其螺母朝外移动.若扳手沿顺时针方向转动,则螺母朝内移动,而其移动的距离,取决于所施外力及扳手的臂的长短.其移动的方向垂直于外力方向与扳手的臂所决定的平面.从力学上看,螺母移动取决于力矩 $\boldsymbol{M}$,而力矩又取决于力臂 $\boldsymbol{L}$ 和力 $\boldsymbol{F}$,且

$$|\boldsymbol{M}|=|\boldsymbol{L}||\boldsymbol{F}|\sin(\widehat{\boldsymbol{L},\boldsymbol{F}})$$

由此,根据这种运算抽象出向量积的概念.

定义 7.6　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个向量,若向量 $\boldsymbol{c}$ 满足

(1) $\boldsymbol{c}$ 的模 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$,其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角;

(2) $\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面,$\boldsymbol{c}$ 的指向按右手法则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定(图 7-22),则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积**,记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

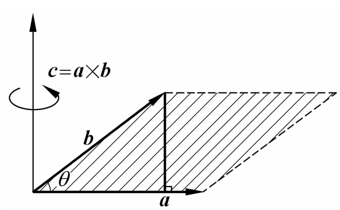

图　7-22

向量的向量积也称为**外积**或**叉积**.

向量积的模的几何意义:向量积的模

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$$

等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

由上述定义,引例中的力矩 $\boldsymbol{M}$ 可以表示为力臂 $\boldsymbol{L}$ 和力 $\boldsymbol{F}$ 的向量积,即

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{F}.$$

根据向量积的定义,不难证明向量积具有以下基本性质:

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;

(2) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行(或共线)的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

向量积具有下列运算规律:

(1) **反交换律**　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

(2)（数乘）**结合律**　$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$（$\lambda$ 为实数）；

(3)（关于加法的）**分配律**　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

2. 向量积的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，由于 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 互相垂直，且为单位向量，所以

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.$$

于是得到两向量的**向量积的坐标表达式**

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

为便于记忆，采用线性代数中三阶行列式按第一行展开的公式，将 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积写成如下的行列式形式：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}.$$

例 4　求同时垂直于向量 $\boldsymbol{a}=\{1,0,2\}$ 与 $\boldsymbol{b}=\{-1,1,0\}$ 的单位向量.

解　$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&2\\-1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&2\\1&0\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}1&2\\-1&0\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}1&0\\-1&1\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=-2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},$$

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+1^2}=3,$$

所以同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的单位向量为 $\pm\frac{1}{3}\{-2,-2,1\}$.

例 5　已知 $\triangle ABC$ 的顶点分别为 $A(1,1,0)$，$B(-2,1,3)$，$C(2,-1,2)$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

解　由于 $\overrightarrow{AB}=\{-3,0,3\}$，$\overrightarrow{AC}=\{1,-2,2\}$，因此

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-3&0&3\\1&-2&2\end{vmatrix}=6\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k},$$

根据向量积的模的几何意义，$\triangle ABC$ 的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+9^2+6^2}=\frac{3}{}$$

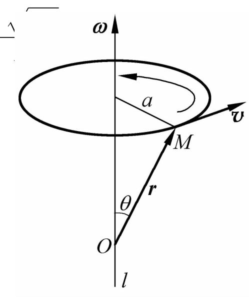

图　7-23

例 6　设刚体以等角速度 ω 绕 l 轴旋转，计算刚体上一点 M 的线速度.

解　刚体绕 l 轴旋转，可以用一个向量 $\boldsymbol{\omega}$ 来表示旋转角速度，该向量的大小表示角速度的大小，它的方向由右手法则定出：即以右手握住 l 轴，当右手的四个手指的弯曲方向与刚体的旋转方向一致时，大拇指的指向就是 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向（图 7-23）.

设点 M 到旋转轴 l 的距离为 a，在 l 轴上任取一点 O 作向量

$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$，以$\theta$表示$\omega$与$\boldsymbol{r}$的夹角，那么$a=|\boldsymbol{r}|\sin\theta$.

设线速度为$\boldsymbol{v}$，由线速度与角速度的关系可知，线速度$\boldsymbol{v}$的大小为

$$|\boldsymbol{v}|=|\omega|a=|\omega||\boldsymbol{r}|\sin\theta,$$

方向垂直于过点M与l轴的平面，即$\boldsymbol{v}$垂直于ω与$\boldsymbol{r}$，又$\boldsymbol{v}$的指向按ω，$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$的顺序符合右手法则，因此$\boldsymbol{v}=\omega\times\boldsymbol{r}$.

*三、三个向量的混合积

如前所述，利用数量积可以计算直线段的长度，而向量积可用来计算平行四边形的面积. 图 7-24 是一个以向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为棱的平行六面体，以下来推导该平行六面体的体积$V$的计算公式.

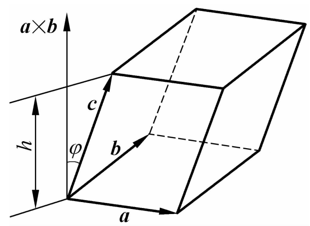

图　7-24

由于平行六面体的底面积为$S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，它的高为

$$h=|\boldsymbol{c}||\cos(\widehat{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}})|,$$

所以

$$V=Sh=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}||\cos(\widehat{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}})|$$
$$=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|.$$

上式中，既有向量的数量积又有向量积，这样的运算就是所谓的向量的混合积.

1. 混合积的概念

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$称为有序的向量组$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$的**混合积**，记作$[\boldsymbol{abc}]$，即

$$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}.$$

混合积的几何意义：如图 7-24 所示，$|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$表示以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为棱的平行六面体的体积，混合积的符号取决于$(\widehat{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}})$是锐角还是钝角，即若设向量$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$的夹角为$\varphi$，当$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$时，$h=|\boldsymbol{c}|\cos\varphi$是平行六面体的高，于是平行六面体的体积为

$$V=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|h=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\varphi=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c},$$

当$\frac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\pi$时，$-|\boldsymbol{c}|\cos\varphi$是平行六面体的高，体积$V=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

所以，混合积$[\boldsymbol{abc}]$的绝对值表示以向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为棱的平行六面体的体积.

特别地，当$[\boldsymbol{abc}]=0$时，平行六面体的体积为零，即向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$共面.

2. 混合积的坐标表示

设$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，$\boldsymbol{c}=\{c_x,c_y,c_z\}$，因为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k},$$

所以

$$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=c_x\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}-c_y\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}+c_z\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}.$$

利用混合积的坐标表示不难证明，混合积具有下列性质：

(1) $[\boldsymbol{abc}]=[\boldsymbol{bca}]=[\boldsymbol{cab}]$；

(2) 三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是 $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$.

例 7 证明四点 $A(1,1,1),B(4,5,6),C(2,3,3),D(10,15,17)$ 共面.

证 因为$\overrightarrow{AB}=\{3,4,5\},\overrightarrow{BC}=\{-2,-2,-3\},\overrightarrow{CD}=\{8,12,14\}$，所以

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}]=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & -2 & -3 \\ 8 & 12 & 14 \end{vmatrix}=0,$$

因此 A,B,C,D 四点共面.

习题 7-3

1. 设 $\boldsymbol{a}=\{2,1,1\},\boldsymbol{b}=\{3,-1,2\}$，求：

(1) $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$； (2) $(\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a})\times(2\boldsymbol{a})$； (3) $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$； (4) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

2. 设向量 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}=\{2,-1,2\}$共线，并且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=18$，求向量 $\boldsymbol{b}$.

3. 把质量为 100kg 的物体从 $M_1(3,1,8)$沿直线移动到 $M_2(1,4,2)$，求重力所做的功(长度单位为 m).

4. 判断以 $A(1,2,3)$、$B(3,1,5)$和 $C(2,4,3)$为顶点的三角形是否为直角三角形.

5. 已知$|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3},\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角.

6. 已知$|\boldsymbol{a}|=2,|\boldsymbol{b}|=5,(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{2\pi}{3}$，且向量$\alpha=\lambda\boldsymbol{a}+17\boldsymbol{b}$ 与$\beta=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直，求常数 λ.

7. 判断向量 $\boldsymbol{a}=\{-4,2,1\},\boldsymbol{b}=\{2,6,-3\},\boldsymbol{c}=\{1,-4,1\}$是否共面.

8. 设单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

9. 已知三点 $A(1,0,2),B(3,2,2)$和 $C(1,4,-1)$，求：

(1) 同时与$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$垂直的单位向量； (2) $\triangle ABC$ 的面积；

(3) 点 B 到边 AC 的距离.

10. 已知$|\boldsymbol{a}|=2,|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，求$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

11. 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=\lambda\{x,4,1\}$为单位向量且 $\lambda\neq0$，问 λ,x 为何值时，

(1) $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直； (2) $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行.

第四节　曲面及其方程

日常生活中，经常会遇到各种各样的曲面，例如，汽车前灯的反光镜面、建筑物的外表面，等等.本节介绍如何从曲面的几何性质出发建立曲面方程，及如何利用曲面的方程来研究几何性质.本节主要内容包括曲面的方程、柱面、旋转曲面、常见二次曲面.

一、曲面的方程

与平面解析几何中把平面曲线看作是动点的轨迹一样，在空间解析几何，空间曲面也可

以看作是空间动点 $M(x,y,z)$ 按一定规律运动的轨迹.

定义 7.7　在空间直角坐标系中，如果曲面 S 与三元方程 $F(x,y,z)=0$ 有下述关系：

(1) 曲面 S 上任一点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$，

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程 $F(x,y,z)=0$，

则称方程 $F(x,y,z)=0$ 为**曲面 S 的方程**，称曲面 S 为**方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形**(图 7-25).

建立了空间曲面与方程的联系之后，就可以利用方程的解析性质来研究空间曲面的几何特征了. 空间曲面主要有以下两个基本问题：

(1) 已知曲面上点的几何特征，求曲面方程；

(2) 已知曲面方程，研究曲面的几何特征.

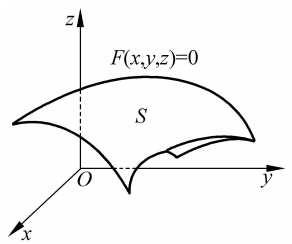

图　7-25

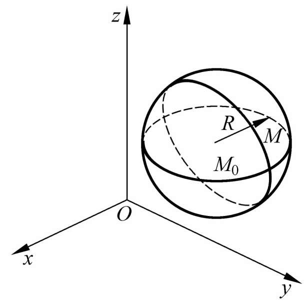

图　7-26

例 1　求球心在点 $M_0(1,-1,0)$，半径为 2 的球面的方程.

解　设 $M(x,y,z)$ 是球面上任一点(图 7-26)，由题意得 $|M_0M|=2$，所以

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+z^2}=2,$$

即

$$(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4. \tag{7.7}$$

显然，球面上点的坐标都满足方程(7.7)，不在球面上的点的坐标不会满足方程(7.7)，所以方程(7.7)就是球心在 $M_0(1,-1,0)$、半径为 2 的球面方程.

反之，若已知

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y=2, \tag{7.8}$$

显然通过配方上式可转化为式(7.7)，因此方程(7.8)表示球心在点 $M_0(1,-1,0)$、半径为 2 的球面.

例 2　在空间直角坐标系内，求半径为 a、中心轴与 z 轴重合的圆柱面方程.

解　在空间直角坐标系内，因圆柱的轴与 z 轴重合，此时圆柱面上任一点 $M(x,y,z)$ 与 z 轴的距离(即 M 到点 $(0,0,z)$ 的距离)为 $\sqrt{x^2+y^2}$，所以方程为

$$x^2+y^2=a^2.$$

方程中不出现 z，表示 z 可以取任何值，几何上表示曲面沿 z 轴的方向无限延伸.

二、柱面

定义 7.8　平行于定直线 L 沿定曲线 C 移动的动直线所形成的曲面称为**柱面**(图 7-27)，定曲线 C 称为柱面的**准线**，动直线称为柱面的**母线**.

下面讨论几种特殊的柱面.

考虑准线 C 为 xOy 面内的曲线 $F(x,y)=0$，沿准线 C 作母线平行于 z 轴的柱面. 若 $M'(x,y,z)$ 是柱面上的任一点，则过点 M' 的母线与 z 轴平行，令其与 C 的交点为 M，显然 M 点的坐标是 $(x,y,0)$，并且有 $F(x,y)=0$，这就是柱面上的点 $M'(x,y,z)$ 的坐标满足的方程.

反过来，若空间一点 $M'(x,y,z)$ 的坐标满足方程 $F(x,y)=0$，则点 $M(x,y,0)$ 必在准线 C 上，即 $M'(x,y,z)$ 在过点 $M(x,y,0)$ 的母线上，所以 $M'(x,y,z)$ 必在柱面上.

综上，不含变量 z 的方程 $F(x,y)=0$ 在空间直角坐标系中表示以 xOy 面上的曲线 $F(x,y)=0$ 为准线、母线平行于 z 轴的柱面. 它是由平行于 z 轴的直线沿曲线 C 移动而形成的（图 7-28）.

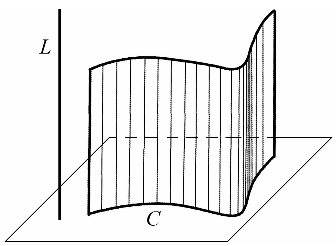

图 7-27

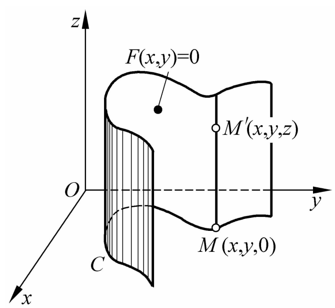

图 7-28

类似地，不含变量 x 的方程 $G(y,z)=0$ 表示以 yOz 面上的曲线 $G(y,z)=0$ 为准线、母线平行于 x 轴的柱面；不含变量 y 的方程 $H(x,z)=0$ 表示以 zOx 面上的曲线 $H(x,z)=0$ 为准线、母线平行于 y 轴的柱面.

例如，方程 $y^2=2x$ 表示以 xOy 面上的抛物线 $y^2=2x$ 为准线，母线平行于 z 轴的**抛物柱面**（图 7-29）.

方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 表示以 zOx 面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 为准线，母线平行于 y 轴的**椭圆柱面**（图 7-30）.

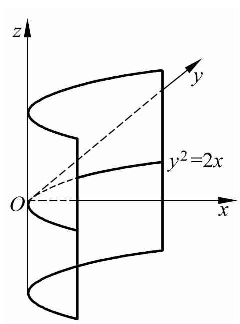

图 7-29

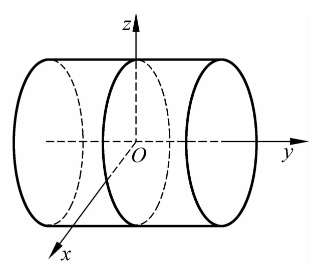

图 7-30

方程 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ 表示以 xOy 面上的双曲线 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ 为准线，母线平行于 z 轴的**双曲**

柱面(图 7-31).

方程 $y+z=1$ 表示以 yOz 面上的直线 $y+z=1$ 为准线，母线平行于 x 轴的柱面，这个柱面是一个平面(图 7-32).

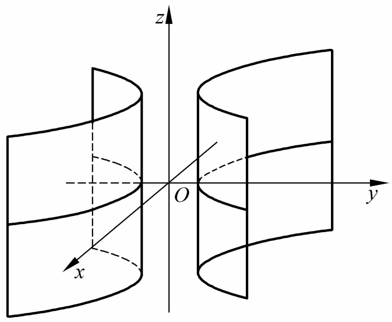

图　7-31

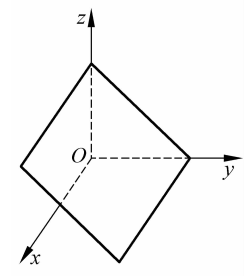

图　7-32

在平面解析几何中，方程 $x^2+y^2=1$ 表示一个圆，但在空间解析几何中，该方程却表示母线平行于 z 轴的圆柱面.

三、旋转曲面

定义 7.9　一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所形成的曲面称为**旋转曲面**，旋转曲线和定直线分别称为**旋转曲面的母线**和**轴**.

假设 C：$\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 为 yOz 面上一给定曲线，以下来建立以 z 轴为旋转轴，将该曲线绕其旋转一周得到的旋转曲面(图 7-33)的方程.

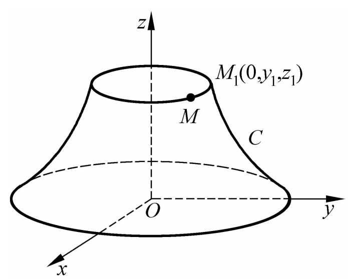

图　7-33

设 $M(x,y,z)$ 是旋转曲面上任意一点，则点 M 应当是曲线 C 上一点 $M_1(0,y_1,z_1)$ 绕 z 轴旋转所得，因此，$z=z_1$，且 M 与 M_1 到 z 轴的距离相同，即 $\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$，因为 $M_1(0,y_1,z_1)$ 是曲线 C 上的点，所以

$$f(y_1,z_1)=0,$$

将 $y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$，$z_1=z$ 代入上式，得

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0,$$

这就是旋转曲面的方程.

所以，平面曲线 C：$\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面是

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

同理，平面曲线 C：$\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面为

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$

一般地，求坐标平面上的曲线绕此坐标平面内的一条坐标轴旋转所成的旋转曲面的方程时，只要保持此平面曲线方程中与旋转轴同名的坐标不变，而以另两个坐标平方和的平方根代替该方程中的另一坐标，立刻得到该旋转曲面的方程.

例如，yOz 面上的椭圆$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面的方程为

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2+z^2}{b^2}=1,$$

这个曲面称为**旋转椭球面**(图 7-34).

zOx 面上的抛物线 $x^2=2pz$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面的方程为

$$x^2+y^2=2pz,$$

这个曲面称为**旋转抛物面**(图 7-35). 常用的旋转抛物面是 $z=x^2+y^2$.

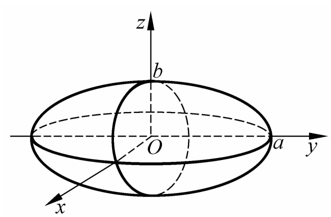

图 7-34

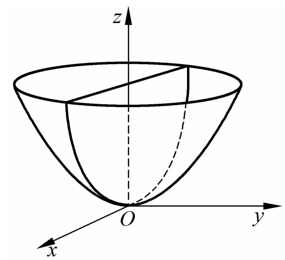

图 7-35

zOx 面上的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 z 轴和 x 轴旋转而成的旋转曲面的方程依次为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad 和 \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1,$$

这两张曲面分别称为**单叶旋转双曲面**(图 7-36)和**双叶旋转双曲面**(图 7-37).

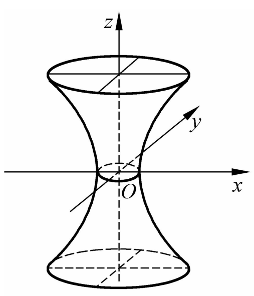

图 7-36

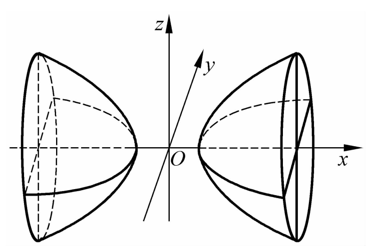

图 7-37

特别地，由一条直线绕另一条与之相交的直线旋转一周所得到的旋转面为**圆锥面**(图 7-38). 两直线的交点称为该圆锥面的**顶点**，两直线间的夹角 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ 称为圆锥面的**半顶角**. 例如，由 xOz 面上的直线 $z=2x$，绕 z 轴旋转一周所得到的圆锥面方程为

$$z^2=4(x^2+y^2).$$

显然，此圆锥面是以原点为顶点，以 z 轴为对称轴的圆锥面.