

第 1 章 概 论

小波分析 (wavelet analysis) 是近 20 年来发展起来的一门新兴数学分支, 它是 Fourier 分析划时代发展的结果. 小波分析的出现, 无论对数学, 还是对其他学科都产生了深远的影响, 并有广泛的应用领域. 本章主要介绍 Fourier 分析的一些主要内容和小波分析的基本概念.

在本书中, 我们采用如下符号: $\mathbb{Z}$ 表示整数集, $\mathbb{Z}^+$ 表示非负整数集, $\mathbb{R}$ 表示实数集 (实轴), $\mathbb{C}$ 表示复数集.

Fourier 分析的主要内容包括 Fourier 级数和 Fourier 变换两个方面. 下面分别给以介绍.

1.1 Fourier 级数

设 $f(t)$ 是定义在实数集 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的函数, 即 $f(t) = f(t + 2\pi)$, 且在 $(0, 2\pi)$ 上平方可积, 即有

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty,$$

其中 $|f(t)|^2 = f(t)\overline{f(t)}$, 而 $\overline{f(t)}$ 是函数 $f(t)$ 的共轭函数. 一般情况下, 我们考虑复值函数, 实值函数可看作复值函数的特殊情况. 如果 $f(t)$ 是实值函数, 则有 $\overline{f(t)} = f(t)$.

我们用 $L^2(0, 2\pi)$ 表示在实数集 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期且在 $(0, 2\pi)$ 上平方可积函数的全体.

类似地, 我们也可以定义函数空间 $L^1(0, 2\pi)$ 为在实数集 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期且在 $(0, 2\pi)$ 上绝对可积函数的全体. 函数 $f(t)$ 绝对可积是指

$$\int_0^{2\pi} |f(t)| dt < +\infty.$$

可以验证, 函数集合 $L^2(0, 2\pi)$ 是 $L^1(0, 2\pi)$ 的子集, 即 $L^2(0, 2\pi) \subset L^1(0, 2\pi)$. 由于 $L^2(0, 2\pi)$ (实际上它是一个 Hilbert 空间) 具有许多好的性质, 而且在实际应用中遇到的

以 2π 为周期的函数,一般都属于 $L^2(0, \pi)$, 同时一般的周期函数也可以变换为以 2π 为周期的函数, 因此我们只讨论 $L^2(0, 2\pi)$ 空间中的函数.

在 $L^2(0, 2\pi)$ 中定义内积为

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt. \quad (1.1.1)$$

对于 $f, g \in L^2(0, 2\pi)$, 如果 $\langle f, g \rangle = 0$, 则称 f, g 是正交的, 并记作 $f \perp g$.

在 $L^2(0, 2\pi)$ 中定义范数为

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \quad (1.1.2)$$

下面给出 $L^2(0, 2\pi)$ 空间上的一些主要结论.

定理 1.1.1 对于任意 $f, g \in L^2(0, 2\pi)$, 有 Schwarz 不等式

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\| \quad (1.1.3)$$

以及三角不等式

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad (1.1.4)$$

成立.

由于 $e^{it} = \cos t + i \sin t$, 通过计算可知

$$\langle e^{ikt}, e^{int} \rangle = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ 1, & k = n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z},$$

所以函数系 $\{e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是标准正交系. 进一步有下面定理.

定理 1.1.2 函数系 $\{e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 $L^2(0, 2\pi)$ 的标准正交基, 即对任意 $f \in L^2(0, 2\pi)$, 有

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt}, \quad (1.1.5)$$

其中

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt. \quad (1.1.6)$$

我们称 c_k 为 Fourier 系数, 称 (1.1.5) 式的右端是 $f(t)$ 的 Fourier 级数.

需要指出的是, 在公式 (1.1.5) 中, 两端相等是几乎处处相等, 而且级数的收敛是指在 $L^2(0, 2\pi)$ 中按下式收敛

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| f(t) - \sum_{k=-M}^N c_k e^{ikt} \right|^2 dt = 0,$$

即平方平均收敛.

如果对 $L^2(0, 2\pi)$ 中的函数再加上一定的条件, 还可得到其他的收敛形式.

定理 1.1.3 设 $f(t) \in L^2(0, 2\pi)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上分段连续, 并在 t 点的左右导数存在, 则它的 Fourier 级数在 t 点收敛, 即

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2} [f(t+0) + f(t-0)] - \sum_{k=-M}^N c_k e^{ikt} \right| = 0;$$

如果还在 t 点连续, 则有 $f(t+0) = f(t-0) = f(t)$.

定理 1.1.4 设 $f(t) \in L^2(0, 2\pi)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上连续且分段光滑, 则它的 Fourier 级数一致收敛于 $f(t)$.

对于函数及其 Fourier 系数还有一个重要的关系式, 即下面定理成立.

定理 1.1.5 对于公式(1.1.5)中的 $f(t)$ 和 $\{c_k\}$, 有 Parseval 恒等式

$$\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \quad (1.1.7)$$

成立.

在实际应用中, 各种信号可看作时间的函数, 而各种周期信号可用一个周期函数表示. 我们知道, 基函数 e^{ikt} 是一个“正弦波”, 而且 k 越大, 频率就越高, 所以可以将一个周期为 2π 的信号(函数)按公式(1.1.5)分解成各种频率的正弦波(e^{ikt})之和, 然后根据不同的需要进行不同的处理. 另外, 一个信号 f 的范数 $\|f\|$ 常常解释为它的能量. 如果信号 $f \in L^2(0, 2\pi)$, 则 f 是一个周期为 2π 的能量有限的信号. 从(1.1.5)式可以看出, 每个信号的 Fourier 系数的平方可表示对应频率成分的能量. 所以, 对 Parseval 恒等式(1.1.7)的物理解释是, 一个信号的能量等于它所包含的不同频率的能量之和.

1.2 Fourier 变换

我们知道, 如果一个函数是定义在某个有限区间上的, 可将该区间变换到 $[0, 2\pi]$, 并将这个函数周期化延拓, 变成实数集 $\mathbb{R}$ 上的周期函数. 然而, 在各种问题中常出现定义在实数集 $\mathbb{R}$ 上的非周期函数, 例如 $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $g(t) = e^{-t^2}$, $t \in \mathbb{R}$ 等, 这些函数无法周期化延拓, 从而不能展开成前面介绍的 Fourier 级数.

设 $p \geq 1$ 是任何自然数, 令 $L^p(\mathbb{R})$ 是由所有满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p dt < +\infty$$

的函数组成的集合.

在 $L^p(\mathbb{R})$ 中定义范数为

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad f \in L^p(\mathbb{R}).$$

在不产生混淆的情况下, 常将 $\|\cdot\|_p$ 记为 $\|\cdot\|$.

我们主要考虑空间 $L^1(\mathbb{R})$ 和 $L^2(\mathbb{R})$. 注意, 空间 $L^1(\mathbb{R})$ 和 $L^2(\mathbb{R})$ 互不包含. 我们常用的函数一般都属于 $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

由于函数 e^{ix} 不属于 $L^2(\mathbb{R})$, 所以 $L^2(\mathbb{R})$ 中的函数不能写成 (1.1.5) 式的 Fourier 级数那样的离散形式的和式, 但可写成连续形式的和式, 即积分.

设 $f(t)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数, $f(t)$ 的 Fourier 变换定义为

$$\mathcal{F}[f(t)] = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt; \quad (1.2.1)$$

$\hat{f}(\omega)$ 的 Fourier 逆变换定义为

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.2.2)$$

下面给出 Fourier 变换的一些主要结论.

定理 1.2.1 对任意 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 则 $\hat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$, 并且

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.2.3)$$

对于 $f(t), g(t) \in L^2(\mathbb{R})$, 定义内积如下:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g(t)} dt. \quad (1.2.4)$$

那么, 对前面定义的范数, 有

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \langle f, f \rangle^{1/2}.$$

定理 1.2.2 对于任意 $f(t), g(t) \in L^2(\mathbb{R})$, 有 Parseval 恒等式成立:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle. \quad (1.2.5)$$

特别地, $\|f\|_2 = (2\pi)^{-1/2} \|\hat{f}\|_2$.

定理 1.2.3 设 $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, 则有:

- (1) $|\hat{f}(t)| \leq \|f\|_1, t \in \mathbb{R}$;
- (2) $\hat{f}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续;
- (3) 如果 f 的导数 f' 也存在并且属于 $L^1(\mathbb{R})$, 则

$$\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega \hat{f}(\omega);$$

- (4) 如果 $t f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, 则 $\hat{f}(\omega)$ 可微, 并且

$$[\hat{f}(\omega)]' = \mathcal{F}[-it f(t)];$$

- (5) 当 $\omega \rightarrow -\infty$ 或 $\omega \rightarrow +\infty$ 时, $\hat{f}(\omega) \rightarrow 0$.

设 $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, f 与 g 的卷积定义为

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(t-x) dx. \quad (1.2.6)$$

显然有 $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$.

定理 1.2.4 设 $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, 则 $f * g \in L^1(\mathbb{R})$, 并且有

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \quad (1.2.7)$$

以及

$$\mathcal{F}[f(t) * g(t)] = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega). \quad (1.2.8)$$

以上我们介绍了 Fourier 变换的一些主要性质. Fourier 变换能较好地刻画信号的频率特性(ω 的特征),但不能提供信号在时频(t)上的任何局部信息. 利用 Fourier 变换研究信号的频域特性时,必须获得该信号在时域中的全部信息. 给定一个信号 $f(t)$,在许多情况下令人感兴趣的是信号局部范围内的特性,然而如果通过 Fourier 变换,信号的时域信息丢失了,就很难知道事件发生的确切时间. 小波变换解决了 Fourier 变换面临的时域和频域局部化的矛盾.

1.3 小波分析简介

我们知道,函数集 $\{e^{ikt}\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 构成 $L^2(0, 2\pi)$ 的标准正交基,使 $L^2(0, 2\pi)$ 中的任意函数都能展成 Fourier 级数. 基函数 e^{ikt} 可看作是基本“建筑块”,一般的函数可由这些基本建筑块构成,从而给分析问题带来了方便. 另外,正交基 $\{e^{ikt}\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 是由一个简单函数 $w(t) = e^{it}$ 的“膨胀”形成的,即 $w_k(t) = w(kt)$, $k \in \mathbf{Z}$. 由此,我们可以将 $L^2(0, 2\pi)$ 看作是由单个函数 e^{it} 生成的空间. 我们知道, $L^2(\mathbf{R})$ 中的函数就不能写成 Fourier 级数的形式,这是由于 $L^2(\mathbf{R})$ 是和 $L^2(0, 2\pi)$ 完全不同的两个函数空间. 特别是,因为 $L^2(\mathbf{R})$ 中的每个函数(的局部平均值)在 $\pm\infty$ 必须“衰减”到零,显然“正弦波”函数 $w(t) = e^{it}$ 不属于 $L^2(\mathbf{R})$. 实际上,如果我们寻找产生 $L^2(\mathbf{R})$ 的“波”,那么这个波在 $\pm\infty$ 就衰减到零,而且在实际应用中,这个衰减应该是非常快的. 也就是说,我们要寻找小的波或称“小波”这样的函数 $\phi \in L^2(\mathbf{R})$ 来生成 $L^2(\mathbf{R})$. 下面先介绍正交小波的概念(一般小波的概念在本书的 8.4 节介绍). 记

$$\psi_{jn}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - n), \quad j, n \in \mathbf{Z}; \quad (1.3.1)$$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \quad j, k \in \mathbf{Z}. \quad (1.3.2)$$

定义 1.3.1 设一个函数 $\phi(t) \in L^2(\mathbf{R})$, 如果函数族 $\{\psi_{jn}\}_{j,n \in \mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个标准正交基,即

$$\langle \psi_{jn}, \psi_{km} \rangle = \delta_{jk} \cdot \delta_{nm}, \quad j, k, n, m \in \mathbf{Z}, \quad (1.3.3)$$

则称 $\phi(t)$ 为一个正交小波.

由定义,如果函数 $\phi(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 是一个正交小波,则函数族 $\{\psi_{jn}\}_{j,n \in \mathbf{Z}}$ 构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个标准正交基,从而对任意函数 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$, 有如下展开式:

$$f(t) = \sum_{j,n=-\infty}^{+\infty} c_{jn} \psi_{jn}(t), \quad (1.3.4)$$

其中(1.3.4)式中的级数是在 $L^2(\mathbf{R})$ 中收敛的,即

$$\lim_{J,K,L,M \rightarrow +\infty} \left\| f - \sum_{j=-J}^K \sum_{n=-L}^M c_{jn} \psi_{jn} \right\|_2 = 0.$$

在(1.3.4)式中的级数称为函数 $f(t)$ 的小波级数, 其中 c_{jn} 称为小波系数. 在(1.3.4)式中, 两边关于 ψ_{jn} 取内积, 注意到正交性条件(1.3.3), 得到小波系数 c_{jn} 为

$$c_{jn} = \langle f, \psi_{jn} \rangle. \quad (1.3.5)$$

正交小波的最简单的例子是 Haar 小波:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq t < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (1.3.6)$$

Haar 小波最初是由数学家 Haar 在 1910 年提出的, 那时还没有小波的概念, 叫做 Haar 函数. 按现在的观点, 它属于正交小波. 在第 2 章将给出关于 Haar 小波的较为详细的讨论, 并由此说明一般小波函数的构造方法.

1.4 MATLAB 简介

MATLAB 是 Matrix Laboratory(矩阵实验室)的简称, 是由美国 MathWorks 公司开发的集数值计算、符号计算和图形可视化三大基本功能于一体的功能强大、简单易学的软件. MATLAB 的命令和数学中的符号、公式非常接近, 可读性强, 容易掌握. 从 20 世纪 80 年代产生到现在, MATLAB 已发展成为适合多学科的大型软件, 除基本部分外, MATLAB 还根据各专门领域中的特殊需要提供了 30 多个工具箱, 如小波分析工具箱(Wavelet Toolbox)、信号处理工具箱(Signal Processing Toolbox), 以及图像处理工具箱(Image Processing Toolbox)等. 每一个工具箱都是为某一类学科专业和应用而定制的, 工具箱使用户能学习和应用专门的技术. 目前, 很多高校将 MATLAB 作为线性代数、数值分析、数理统计、优化方法、自动控制、数字信号处理以及小波分析等课程的基本教学工具.

本书每章最后一节将以 MATLAB 7.0 中的小波分析工具箱为工具, 结合本书内容给出一些 MATLAB 程序. 通过这些程序可以加深对所学知识的理解, 并掌握解决实际问题的方法.

下面介绍 MATLAB 的使用方法. 启动 MATLAB 后, 就进入 MATLAB 的界面. 在命令窗口(Command Window)的第一行中单击“MATLAB Help”或“Demos”, 可打开 MATLAB 帮助文件或演示文件, 了解 MATLAB 各部分的使用方法.

例 1.4.1 求解一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 当 $a=2, b=7, c=3$ 时的根.

1. 交互式方式(命令行方式)

在命令窗口的提示符“>>”后输入表达式或命令, 例如求解例 1.4.1 的命令如下:

```
>>a=2;
>>b=7;
>>c=3;
>>x1=(-b+sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a)
x1 =
    -0.5000
>>x2=(-b-sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a)
x2 =
    -3
```

所求方程的两个根分别是 $x_1 = -0.5$ 和 $x_2 = -3$. 在命令(语句)或表达式后输入分号“;”, 系统不显示结果, 否则显示结果. 函数 `sqrt` 是系统提供的求平方根的函数. MATLAB 提供了大量的函数, 可供用户直接使用. 用户可用 `help` 命令查看函数功能和使用方法, 例如输入

```
help sqrt
```

则系统显示 `sqrt` 的功能.

2. 程序方式

在 MATLAB 语言中, 包含代码的文件称为 M 文件. 用文本编辑器创建 M 文件, 像使用其他的 MATLAB 函数或命令一样使用它们. 有两种 M 文件:

命令文件: 不需要在其中输入参数或返回输出结果. 可以在工作空间运行数据.

函数文件: 需要给定输入参数和返回输出结果. 函数文件内定义的变量仅在函数文件内部起作用.

(1) 求解例 1.4.1 的命令文件如下:

```
a=2;
b=7;
c=3;
x1=(-b+sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a)
x2=(-b-sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a)
```

说明 MATLAB 软件运行后, 在命令窗口输入命令 `edit`, 打开文本编辑器, 将上面程序输入并存盘, 文件名为 `root1.m`. 然后在命令窗口输入 `root1` 后即可输出计算结果.

(2) 求解例 1.4.1 的函数文件如下:

```
function [x1,x2]=roots2(a,b,c)
% 函数 roots2 的功能是计算一元二次方程  $ax^2+bx+c=0$  的根
% a,b,c 是输入参数(方程的系数)
```

```
% x1,x2 是输出参数(方程的两个根)
x1=(-b+sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a);
x2=(-b-sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a);
```

说明 函数文件的基本结构为:

```
function 输出形参表=函数名(输入形参表)
注释说明部分
函数体语句
```

注释说明部分是由%引导的行,对程序进行说明.注释部分可以省略,不影响程序的执行效果.将上面程序输入并存盘,文件名为 roots2.m(要与函数名相同).然后在命令窗口输入 $[r1,r2]=\text{roots2}(2,7,3)$,即可输出计算结果 $r1$ 和 $r2$.

例 1.4.2 用 MATLAB 绘制 Haar 小波图形.

1. 根据(1.3.6)式编写计算 Haar 小波的函数文件 psi.m.

函数文件 psi.m 如下:

```
function y=psi(t)
%y=psi(t) 计算 Haar 小波函数值
n=length(t);
for k=1:n
    if t(k)<0 || t(k)>=1
        y(k)=0;
    elseif t(k)<0.5
        y(k)=1;
    else
        y(k)=-1;
    end
end
```

2. 根据(1.3.1)式编写计算 Haar 正交小波基的几个函数的命令文件 haar.m.

命令文件 haar.m 如下:

clear;	%清除内存中的变量和函数
t=linspace(-0.5,2.5,1000);	%产生-0.5,2.5之间的 1000 点行向量
psi00=psi(t);	%计算 Haar 小波函数值 psi00
subplot(221);	%将图形窗口分成 2×2 个坐标轴,并选第 1 个输出下面图形
plot(t,psi00);	%画出数据 psi00 的图形

```

axis([-0.5 2.5 -2.2 2.2]); %设置坐标轴
title('函数{\sl\psi_{00}}(t)的图形'); %显示图形标题
%计算并画出 psi01 的图形
psi01=psi(t-1);
subplot(222);
plot(t,psi01);
axis([-0.5 2.5 -2.2 2.2]);
title('函数{\sl\psi_{01}}(t)的图形');
%计算并画出 psi11 的图形
psi10=sqrt(2)*psi(2*t);
subplot(223);
plot(t,psi10);
axis([-0.5 2.5 -2.2 2.2]);
title('函数{\sl\psi_{10}}(t)的图形');
%计算并画出 psi21 的图形
psi21=2*psi(4*t-1);
subplot(224);
plot(t,psi21);
axis([-0.5 2.5 -2.2 2.2]);
title('函数{\sl\psi_{21}}(t)的图形');

```

程序 haar.m 运行输出结果如图 1.4.1 所示.

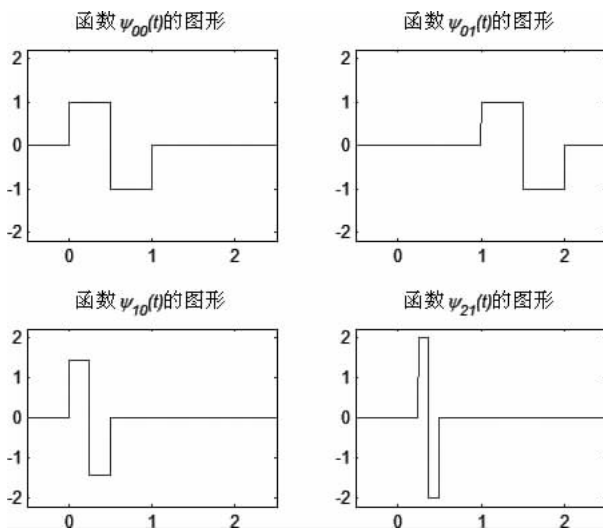


图 1.4.1 Haar 小波基的几个函数图形

第 2 章 Haar 小波分析

在这一章,我们以 Haar 小波为例介绍多分辨分析的基本思想和方法.

2.1 Haar 尺度函数

定义 2.1.1 Haar 尺度函数定义为

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (2.1.1)$$

由于 $\varphi(x)$ 只在区间 $[0, 1)$ 上为 1, 在 $[0, 1)$ 外恒为零, 我们称 $\varphi(x)$ 的支集为 $[0, 1]$.

现在考虑函数 $\varphi(x-k)$, k 为任意整数, 即 $k \in \mathbb{Z}$. 可以看出 $\varphi(x-k)$ 的支集为 $[k, k+1]$, 即 $\varphi(x-k)$ 在 $[k, k+1]$ 外恒为零, 并且 $\varphi(x-k)$ 的图形是 $\varphi(x)$ 的图形向右 ($k > 0$) 或向左 ($k < 0$) 移动 $|k|$ 个单位. 令 l^2 是由所有满足条件 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < +\infty$ 的数列 $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $c_k \in \mathbb{R}$ 组成的空间, 且 V_0 是如下所有函数组成的空间:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(x-k), \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad (2.1.2)$$

其中 $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2$. 为了讨论方便, 我们只要求 k 属于某个有限整数集, 即 (2.1.2) 式中只有有限项求和. 由于 $\varphi(x-k)$ 只在 $x=k$ 和 $x=k+1$ 不连续, 所以 V_0 中的函数是分段常函数, 其不连续点只能是某些整数点. 由于 $\varphi(x-k)$ 的支集为 $[k, k+1]$, 并且 (2.1.2) 式中只有有限项求和, 所以 V_0 中的任意函数在某个有限区间外恒为零. 这样的函数称为具有紧支集的 (即函数值不恒为零的定义域区间是有限的).

下面再考虑函数 $\varphi(2x)$, 其支集为 $[0, 1/2]$, 而函数 $\varphi(2x-k) = \varphi(2(x-k/2))$ 的支集是 $[k/2, (k+1)/2]$, 其图形是 $\varphi(2x)$ 的图形向右 ($k > 0$) 或向左 ($k < 0$) 移动 $|k/2|$ 个单位. 令 V_1 是由如下所有函数组成的空间:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(2x-k), \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad (2.1.3)$$

其中 k 属于某个有限整数集, 即 (2.1.3) 式中只有有限项求和. V_1 是由分段常函数组成的

空间,每个函数都是紧支集的,并且不连续点只可能是某些 $k/2$ 点, $k \in \mathbb{Z}$.

定义 2.1.2 设 j 是任意非负整数,即 $j \in \mathbb{Z}^+$,令 V_j 是由函数集

$$\varphi(2^j x - k), \quad k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$$

所张成的空间,即 V_j 是由所有分段常函数组成的空间,且该空间中的任意函数具有紧支集,其不连续点只能是某些 $k/2^j$ 点, $k \in \mathbb{Z}$.

注意到 V_0 中的任意函数也属于 V_1 ,即有 $V_0 \subset V_1$. 一般地,有

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \cdots,$$

且这种包含关系是严格的. 例如 $\varphi(2x) \in V_1$, 但 $\varphi(2x) \notin V_0$, 因为 $\varphi(2x)$ 在 $x = 1/2$ 不连续.

由上述定义,很容易得到下面结论.

定理 2.1.1 (1) $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j$; (2) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j} x) \in V_0$.

证明 (1) 若 $f(x) \in V_0$, 则 $f(x)$ 可由 $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 的线性组合表示出来(线性表出, 如(2.1.2)式), 从而 $f(2^j x)$ 可由 $\{\varphi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 线性表出. 反之也成立. 结论(2)的证明与(1)的证明类似.

下面讨论 V_j 的基底. 我们先从 V_0 开始. V_0 是由 $\varphi(x)$ 及其平移 $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 张成的空间. 函数 $\varphi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中具有单位范数, 即

$$\|\varphi(x-k)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x-k) dx = \int_k^{k+1} 1 dx = 1.$$

如果 k 和 n 是不同的整数, 则 $\varphi(x-k)$ 和 $\varphi(x-n)$ 的支集不相交, 从而有

$$\langle \varphi(x-k), \varphi(x-n) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-k) \varphi(x-n) dx = 0, \quad k \neq n.$$

所以函数集 $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 V_0 的标准正交基. 同样的讨论可得到一般的结果.

定理 2.1.2 函数集 $\{2^{j/2} \varphi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 V_j 的标准正交基.

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(2^j x - k) dx = 1/2^j$, 所以要将 $\varphi(2^j x - k)$ 乘以系数 $2^{j/2}$, 使其范数为 1.

2.2 Haar 小波

前面讨论了由 Haar 尺度函数 $\varphi(x)$ 所生成的一组嵌套空间 $V_j \subset V_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}^+$. j 越大, 空间 V_j 就越精细, 包含的信息就越多. 空间的精细程度可由分辨率来描述. 就像一幅图像, 如果图像越精细, 它所包含的信息就越多, 分辨率就越高. 空间 V_j 的分辨率为 2^j . 当 j 越大, 分辨率就越高. 在实际应用中, 可用空间 V_j 来逼近空间 $L^2(\mathbb{R})$. 实际存在的各种信号(时间的函数)一般都属于 $L^2(\mathbb{R})$. 如果用某种仪器测量某信号, 由于精度(分辨率)的限制, 得到的信号 $f(x)$ 只是实际信号的一个近似表示, 即可将 $f(x)$ 看作属于某个空间 V_{j+1} . 如果信号 $f(x)$ 含有噪声, 例如某个尖峰信号, 想把噪声滤掉, 由于一般噪声的

频率比有用信号的频率高,就需要把 $f(x)$ 中的属于 V_{j+1} 但不属于 V_j 的部分去掉(滤波),这就产生了小波的概念.我们的目标是把空间 V_{j+1} 分解为 V_j 与另一空间 W_j 的正交和,记为

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad (2.2.1)$$

即对任意函数 $f \in V_{j+1}$, 都有惟一分解 $f = p + g, p \in V_j, g \in W_j$, 并且 $p \perp g$ (即 $\langle p, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)g(x)dx = 0$). W_j 也叫做 V_j 在 V_{j+1} 中的正交补空间.

如何构造 W_j 呢? 先从 $j=0$ 开始. 由于 V_0 是由 $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 张成的空间, 因此希望构造某一函数 ψ , 使 $\{\psi(x-k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 也能张成 V_0 在 V_1 中的正交补空间 W_0 . 在构造 ψ 时要满足以下两个条件:

(1) $\psi \in V_1$, 从而有 $\psi(x) = \sum_n c_n \varphi(2x-n), c_n \in \mathbb{R}$, 且只有有限个 c_n 不为零;

(2) $\psi \perp V_0$, 即 $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\varphi(x-k)dx = 0$, 对任意 $k \in \mathbf{Z}$.

由条件(2), 当 $k=0$ 时有 $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 \psi(x)dx = 0$.

由条件(1), $\psi(x)$ 可由 $\varphi(2x)$ 及其平移线性表出, 而 $\varphi(2x)$ 的支集为 $[0, 1/2]$, 从而可知如下函数

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq x < 1, \end{cases} \quad (2.2.2)$$

即

$$\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x-1) \quad (2.2.3)$$

满足上述要求.

定义 2.2.1 函数 $\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x-1)$ 定义为 Haar 小波函数.

为了说明 W_0 就是由 $\{\psi(x-k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 张成的空间, 先证明如下结论.

引理 2.2.1 对任意 $f_1(x) = \sum_k c_k \varphi(2x-k) \in V_1$, 有 $f_1 \perp V_0$, 即 $f_1(x) \perp \varphi(x-l), l \in \mathbf{Z}$, 当且仅当 $c_{2n} = -c_{2n-1}, n \in \mathbf{Z}$.

证明 先证必要性: 假设 l 为任意整数, 由 $f_1(x) \perp \varphi(x-l)$, 则有

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f_1(x), \varphi(x-l) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \varphi(x-l) dx \\ &= \int_l^{l+1} f_1(x) dx \\ &= \int_l^{l+1} \sum_k c_k \varphi(2x-k) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_l^{l+1/2} c_{2l} \varphi(2x-2l) dx + \int_{l+1/2}^{l+1} c_{2l+1} \varphi(2x-2l-1) dx \\
&= \frac{1}{2} c_{2l} + \frac{1}{2} c_{2l+1},
\end{aligned}$$

由于 l 为任意整数, 所以有 $c_{2n} = -c_{2n-1}, n \in \mathbf{Z}$. 充分性可类似证明.

上述结论可等价叙述为引理 2.2.2.

引理 2.2.2 对任意 $f_1 \in V_1$, 则 f_1 与 V_0 正交(记为 $f_1 \perp V_0$)当且仅当

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \varphi(2x-k) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_{2n} (\varphi(2x-2n) - \varphi(2x-2n-1)) \\
&= \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_{2n} \psi(x-n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} d_n \psi(x-n), \quad d_n = c_{2n}.
\end{aligned}$$

至此, 证明了 W_0 就是由 $\{\psi(x-k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 张成的空间, 即由形如

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} d_k \psi(x-k), \quad d_k \in \mathbb{R}$$

的函数所组成的空间, 其中只有有限个 d_k 非零. 一般地, 有如下结论.

定理 2.2.1 令 W_j 是由如下形式的所有函数

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} d_k \psi(2^j x - k), \quad d_k \in \mathbb{R}$$

所组成的空间, 且只有有限个 d_k 非零, 则 W_j 是 V_j 在 V_{j+1} 中的正交补空间, 即 $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$.

证明 要证明该定理, 只需证明如下两条:

- (1) $W_j \perp V_j$, 即 W_j 中的任意函数与 V_j 中的任意函数正交;
- (2) 若 $f(x) \in V_{j+1}$, 且 $f(x) \perp V_j$, 则有 $f(x) \in W_j$.

先证明(1). 设 $g(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_k \psi(2^j x - k) \in W_j$, 并设 $f(x) \in V_j$. 由 $f(x) \in V_j$, 则有 $f(2^{-j}x) \in V_0$, 从而有

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(2^{-j}x) \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_k \psi(x-k) dx \\
&= 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_k \psi(2^j y - k) dy \\
&= 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(y) dy,
\end{aligned}$$

即 $f(x) \perp g(x)$, (1)得证.

现在证明(2). 由 $f(x) \in V_{j+1}$, 且 $f(x) \perp V_j$, 则有 $f(2^{-j}x) \in V_1$, 且 $f(2^{-j}x) \perp V_0$, 由引理 2.2.2 知, $f(2^{-j}x) \in W_0$, 从而可得 $f(x) \in W_j$. (2)得证.

由定理 2.2.1 可得

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$$

$$\begin{aligned}
&= V_{j-2} \oplus W_{j-2} \oplus W_{j-1} \\
&= \dots \\
&= V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_{j-1}.
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

所以 V_j 中的任意函数 f 可惟一地分解为

$$f = f_0 + w_0 + w_1 + \dots + w_{j-1}, \tag{2.2.5}$$

其中 $f_0 \in V_0, w_l \in W_l, 0 \leq l < j$.

如果 f 表示一信号, 则(2.2.5)式表示对该信号的分解, 并且 w_l 可表示宽度为 $1/2^{l+1}$ 的信号.

当 j 趋于无穷大时, 关于(2.2.4)式有如下结论.

定理 2.2.2 空间 $L^2(\mathbb{R})$ 可分解为无限正交和

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots, \tag{2.2.6}$$

并对任意函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 有惟一分解

$$f = f_0 + \sum_{j=0}^{+\infty} w_j, \tag{2.2.7}$$

其中 $f_0 \in V_0, w_j \in W_j, j \in \mathbb{Z}^+$.

(2.2.7)式中的无限和是如下有限和的极限:

$$f = f_0 + \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^N w_j.$$

上述定理的证明较为复杂, 这里不给出严格的证明, 只给出证明的基本思想:

(1) 空间 $L^2(\mathbb{R})$ 中的任意函数都可用一连续函数逼近.

(2) 空间 $L^2(\mathbb{R})$ 中的任意连续函数都可用一个阶梯函数(即分段常函数)逼近, 而该阶梯函数的不连续点为 $k/2^j, k \in \mathbb{Z}, j$ 为充分大的正整数, 该阶梯函数属于 V_j .

把上述两条结合起来, 就证明了该定理.

2.3 Haar 小波的分解与重构算法

2.3.1 分解算法

在信号处理中, 例如对某信号 f 进行去噪处理(滤波), 我们将首先对 f 用一个阶梯函数 $f_j \in V_j$ (j 取适当大的正整数)来逼近. 由(2.2.5)式, f_j 可分解为各分量之和:

$$f_j = f_0 + w_0 + w_1 + \dots + w_{j-1},$$

其中 $f_0 \in V_0, w_l \in W_l, 0 \leq l < j$, 分量 w_l 表示宽度为 $1/2^{l+1}$ 的信号. 对充分大的 l , 这些信号会变得非常窄, 这样就可表示噪声(噪声的频率很高). 例如, 这些宽度小于 0.01 的信号就表示噪声, 由于 $2^{-7} < 0.01 < 2^{-6}$, 则对于任何分量 w_j ($j \geq 6$)都表示噪声. 为把这些噪声

滤掉,就要将这些表示噪声的分量设为零.此时剩余的分量之和所表示的信号仍然接近于 f ,但已经没有噪声了.

为了实现上述算法,寻找一个有效的方式来实现定理 2.2.2 所给出的分解是非常重要的.首先要对原始信号 f 用下面的阶梯信号逼近:

$$f_j(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \varphi(2^j x - k). \quad (2.3.1)$$

为求系数 $c_k (k \in \mathbf{Z})$,可对原始信号 f 在点 $x = k/2^j (k \in \mathbf{Z})$ 进行采样,例如可取 $c_k = f(k/2^j) (k \in \mathbf{Z})$.这里 j 要取得充分大,以保证采样信号 f_j 充分接近 f (不失真).其中 k 的取值范围决定于信号 f 的定义域.不失一般性,可假设 $0 \leq x \leq 1$,从而 k 的取值范围为 $0 \leq k \leq 2^j - 1$.在一般问题的讨论中,不考虑 k 的取值范围,除非讨论某个具体实例.

为把 (2.3.1) 式中的 $\varphi(2^j x - k)$ 分解为 $W_k (k \leq j)$ 中的分量,需要用到下面的引理.

引理 2.3.1 对任意 $x \in \mathbf{R}$,下面两式成立:

$$\varphi(2^j x) = \frac{\psi(2^{j-1} x) + \varphi(2^{j-1} x)}{2}, \quad (2.3.2)$$

$$\varphi(2^j x - 1) = \frac{\varphi(2^{j-1} x) - \psi(2^{j-1} x)}{2}. \quad (2.3.3)$$

证明 由 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的定义知下面两式成立:

$$\varphi(2x) = \frac{\psi(x) + \varphi(x)}{2},$$

$$\varphi(2x - 1) = \frac{\varphi(x) - \psi(x)}{2}.$$

在上面两式中将 x 用 $2^{j-1} x$ 替换,便得到 (2.3.2) 式和 (2.3.3) 式.

下面对 (2.3.1) 式进行分解.首先将 (2.3.1) 式右端的奇偶项分开,有

$$f_j(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{2k} \varphi(2^j x - 2k) + \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{2k+1} \varphi(2^j x - 2k - 1). \quad (2.3.4)$$

将 (2.3.2) 式和 (2.3.3) 式中的 x 用 $x - k2^{1-j}$ 替换,有

$$\varphi(2^j x - 2k) = \frac{\psi(2^{j-1} x - k) + \varphi(2^{j-1} x - k)}{2}, \quad (2.3.5)$$

$$\varphi(2^j x - 2k - 1) = \frac{\varphi(2^{j-1} x - k) - \psi(2^{j-1} x - k)}{2}. \quad (2.3.6)$$

将 (2.3.5) 式和 (2.3.6) 式代入 (2.3.4) 式,有

$$\begin{aligned} f_j(x) &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{2k} \frac{\psi(2^{j-1} x - k) + \varphi(2^{j-1} x - k)}{2} \\ &\quad + \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{2k+1} \frac{\varphi(2^{j-1} x - k) - \psi(2^{j-1} x - k)}{2} \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} \left(\frac{c_{2k} - c_{2k+1}}{2} \psi(2^{j-1} x - k) + \frac{c_{2k} + c_{2k+1}}{2} \varphi(2^{j-1} x - k) \right) \end{aligned}$$

$$= w_{j-1} + f_{j-1},$$

其中 $w_{j-1} \in W_{j-1}, f_{j-1} \in V_{j-1}$. 总结这一算法可得到下面定理.

定理 2.3.1 (Haar 小波分解算法) 设 $f_j(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k^j \varphi(2^j x - k) \in V_j$, 则 f_j 可分解为

$$f_j = w_{j-1} + f_{j-1},$$

其中

$$w_{j-1} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_k^{j-1} \psi(2^{j-1} x - k) \in W_{j-1},$$

$$f_{j-1} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k^{j-1} \varphi(2^{j-1} x - k) \in V_{j-1},$$

$$\text{且 } d_k^{j-1} = \frac{c_{2k}^j - c_{2k+1}^j}{2}, c_k^{j-1} = \frac{c_{2k}^j + c_{2k+1}^j}{2}.$$

由上述定理知, f_{j-1} 还可分解为 w_{j-2} 和 f_{j-2} , 如此继续下去, 可得

$$f_j = w_{j-1} + w_{j-2} + \cdots + w_0 + f_0.$$

综上所述, 对给定的信号 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 首先通过采样, 用 $f_j \in V_j$ 近似表示 f , 再用上述的分解定理把 f_j 分解成各个不同频率的成分之和.

2.3.2 重构算法

对于给定的信号 f , 按照前面的分解算法可以将其分解为 V_0 和 $W_l (0 \leq l < j)$ 中的成分. 如果对信号处理的目的是把噪声去掉, 则需要把 f 中噪声所对应的 W_l 中的成分去掉. 如果对信号处理的目的是压缩数据, 则需要把 W_l 中的那些取值小的成分 (即定理 2.3.1 中绝对值小的那些小波系数 d_k^l) 去掉, 只保留那些取值大的成分 (即绝对值大的 d_k^l). 总之, 无论是对信号 f 进行去噪处理, 还是数据压缩, f 的分解式中的小波系数 (d_k^l) 都要发生变化. 这就需要一个重构算法, 使去噪后或压缩后的信号 $\tilde{f}$ 能用 V_j 中的基底表示出来, 即

$$\tilde{f}(x) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} c_l^j \varphi(2^j x - l).$$

信号 $\tilde{f}(x)$ 的图形是一个阶梯函数的图形, 在区间 $[l/2^j, (l+1)/2^j]$ 上的值为 c_l^j .

下面讨论重构算法. 设

$$f(x) = f_0(x) + w_0(x) + \cdots + w_{j-1}(x),$$

其中 $w_l \in W_l, 0 \leq l < j$, 并且

$$f_0(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k^0 \varphi(x - k) \in V_0, \quad (2.3.7)$$

$$w_l(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_k^l \psi(2^l x - k) \in W_l. \quad (2.3.8)$$

我们的目的是要得到 $f(x) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} c_l^j \varphi(2^j x - l)$, 并找出计算系数 c_l^j 的方法. 需要用到下面几个公式:

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x - 1); \quad (2.3.9)$$

$$\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x - 1). \quad (2.3.10)$$

上面两式可由 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的定义得出. 用 $2^{j-1}x$ 代替上面两式中的 x , 有

$$\varphi(2^{j-1}x) = \varphi(2^j x) + \varphi(2^j x - 1), \quad (2.3.11)$$

$$\psi(2^{j-1}x) = \varphi(2^j x) - \varphi(2^j x - 1). \quad (2.3.12)$$

由(2.3.7)式, 并用 $x-k$ 代替(2.3.9)式中的 x , 得

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k^0 \varphi(x - k) \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} [c_k^0 \varphi(2x - 2k) + c_k^0 \varphi(2x - 2k - 1)], \end{aligned}$$

所以, 有

$$f_0(x) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} \tilde{c}_l^1 \varphi(2x - l), \quad (2.3.13)$$

其中

$$\tilde{c}_l^1 = \begin{cases} c_k^0, & l = 2k, \\ c_k^0, & l = 2k + 1. \end{cases}$$

类似地, $w_0(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_k^0 \psi(x - k)$ 可表示为

$$w_0(x) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} \tilde{d}_l^1 \varphi(2x - l), \quad (2.3.14)$$

其中

$$\tilde{d}_l^1 = \begin{cases} d_k^0, & l = 2k, \\ -d_k^0, & l = 2k + 1. \end{cases}$$

将(2.3.13)式和(2.3.14)式相加, 有

$$f_0(x) + w_0(x) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} c_l^1 \varphi(2x - l), \quad (2.3.15)$$

其中

$$c_l^1 = \tilde{c}_l^1 + \tilde{d}_l^1 = \begin{cases} c_k^0 + d_k^0, & l = 2k, \\ c_k^0 - d_k^0, & l = 2k + 1. \end{cases}$$

同样, 把 $w_1(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_k^1 \psi(2x - k)$ 加到(2.3.15)式中, 由(2.3.9)式和(2.3.10)式, 并用 $2x-k$ 代替 x , 可得

$$f_0(x) + w_0(x) + w_1(x) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} c_l^2 \varphi(2^2 x - l),$$

其中

$$c_l^2 = \begin{cases} c_k^1 + d_k^1, & l = 2k, \\ c_k^1 - d_k^1, & l = 2k + 1. \end{cases}$$

这个过程继续下去,便得到如下的结论.

定理 2.3.2(Haar 小波重构算法) 设

$$f = f_0 + w_0 + w_1 + \cdots + w_{j-1},$$

其中

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k^0 \varphi(x - k) \in V_0, \\ w_n(x) &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_k^n \psi(2^n x - k) \in W_n, \quad 0 \leq n < j. \end{aligned}$$

则

$$f(x) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} c_l^j \varphi(2^j x - l) \in V_j,$$

其中

$$c_l^n = \begin{cases} c_k^{n-1} + d_k^{n-1}, & l = 2k, \\ c_k^{n-1} - d_k^{n-1}, & l = 2k + 1, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, j.$$

即先由 c_k^0 和 d_k^0 求得 c_l^1 ,再由 c_k^1 和 d_k^1 求得 $c_l^2, \dots$,直到最后由 c_k^{j-1} 和 d_k^{j-1} 求得 c_l^j .

2.4 有关 MATLAB 程序

MATLAB 小波工具箱中提供了许多函数,我们将根据需要在不同的章节选择一些常用函数简要介绍并举例说明使用方法.读者可通过上机运行相关程序,加深对所学知识的理解,并用于解决实际问题.

1. waveinfo

waveinfo 函数用于查询小波工具箱中的所有小波函数,其调用格式如下:

```
waveinfo('wname')
```

其中 wname 为所要查询的小波函数的名字.例如可输入命令 waveinfo('haar'),获得 Haar 函数的一些主要性质.其他小波的名字可用命令 help waveinfo 查询.

2. dwt

dwt 函数实现单层一维离散小波变换(single-level discrete 1-D wavelet transform),其调用格式为

```
[CA,CD] = dwt(X, 'wname')
```

其中,X 是被分解的信号,wname 为所调用的小波函数,CA 和 CD 分别为返回的低频系

数和高频系数向量.

3. idwt

idwt 函数实现单层一维离散小波变换的逆变换(single-level inverse discrete 1-D wavelet transform),其调用格式为

```
X=idwt(CA,CD,'wname')
```

其中,X 是重构信号,wname 为所调用的小波函数,CA 和 CD 分别为低频系数和低频系数向量.

4. wavedec

wavedec 函数实现多层一维小波分解(multi-level 1-D wavelet decomposition),其调用格式为

```
[C,L]=wavedec(X,N,'wname')
```

其中,X 为信号,N 为层数,wname 为小波名称,C 由 $[C_n, D_n, D_{n-1}, \dots, D_1]$ 组成,L 由 $[C_n \text{ 的长度}, D_n \text{ 的长度}, D_{n-1} \text{ 的长度}, \dots, D_1 \text{ 的长度}, X \text{ 的长度}]$ 组成. 例如,一个 3 层($N=3$)的分解结构的组织形式如图 2.4.1 所示.

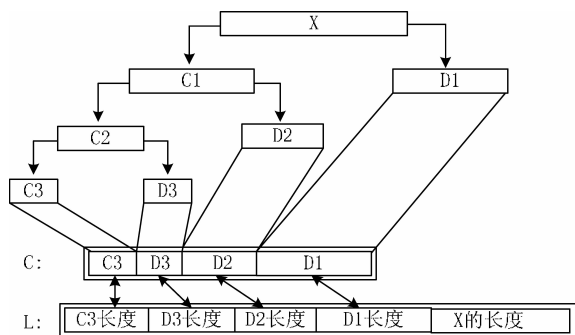


图 2.4.1 3 层分解的组织形式

5. waverec

waverec 函数实现多层一维小波重构(multilevel 1-D wavelet reconstruction),其调用格式为

```
X=waverec(C,L,'wname')
```

下面举例说明 Haar 小波的分解与重构算法的应用.

例 2.4.1 调用 MATLAB 中的数据 `sumsin.dat`, 对其用 Haar 小波进行分解与重构.

程序 1 如下:

```
% 用 Haar 小波对信号进行 1 层分解与重构
clear;                                %清除内存中的变量和函数
load sumsin;                          %装入数据文件 sumsin.dat
X=sumsin;
subplot(411);                          %将图形窗口分成 4×1 个坐标轴,并选第 1 个输出下面图形
plot(X);                              %画出数据 x 的图形
title('sumsin 原始信号');             %显示图形标题
[CA,CD] =dwt(X,'haar');               %用 Haar 小波对数据 x 进行分解
subplot(412);                          %在第 2 个坐标轴中输出下面的图形
plot(CA);
title('低频系数');
subplot(413);
plot(CD);
title('高频系数');
RX=idwt(CA,[],'haar');                %用 Haar 小波对数据 x 进行重构,高频部分置零
subplot(414);
plot(RX);
title('重构信号');
```

程序运行结果如图 2.4.2 所示.

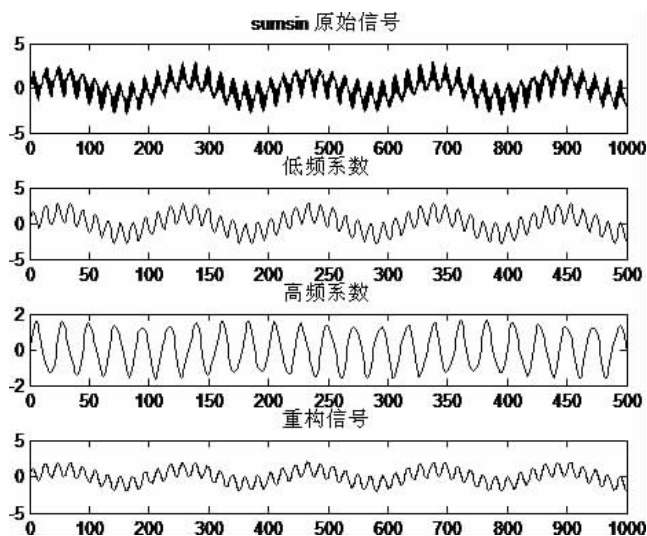


图 2.4.2 Haar 小波单层分解与重构