洞穿高考

第一部分

数学解答题核心考点

第一章 三角函数

高考数学中，三角函数的考点有三角函数的定义、终边相同的角与三角函数值的象限符号、化简求值、三角函数的图像和性质与解三角形，其中核心考点是三角函数的图像和性质与解三角形. 为什么说它们是核心考点呢？其一，在高考数学试卷中的三角函数试题（约占 15～18 分）里，这部分约占三分之二的分值（约占 10～12 分）；其二，它们都是研究三角函数的中心内容；其三，它们都与实际生活和其他边缘学科有紧密联系；其四，它们对三角函数的其他考点有较高的覆盖率.

核心考点一 三角函数的图像和性质

思路提示：1. 熟练、准确地作出 $\begin{cases} y=\sin x, x\in[0,2\pi] \\ y=\cos x, x\in[0,2\pi] \\ y=\tan x, x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ 的简图，其中函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的图像要抓住“五点”（三个“零点”，两个“极值点”）.

2. 用公式把已知函数化成有相同角的相同函数（简称同角同函），常见方法有：

(1)用两角和差公式或诱导公式变成“同角”（如 $\dfrac{x}{2}$，x，$2x$）三角函数形式；

(2)用降幂公式或倍角公式（升幂公式）变成“同角”的三角函数形式；

(3)逆用两角和差公式或辅助角公式化 $a\sin x+b\cos x$ 为 $A\sin(\omega x+\varphi)$ 的“同函”三角函数形式；

(4)用同角三角函数基本关系化“切”为“弦”三角函数形式.

【例 1.1】 （2012 山东理 17）已知向量 $\boldsymbol{m}=(\sin x,1)$，$\boldsymbol{n}=\left(\sqrt{3}A\cos x,\dfrac{A}{2}\cos 2x\right)(A>0)$，函数 $f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}$ 的最大值为 6.

(1)求 A；

(2)将函数 $y=f(x)$ 的图像向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位，再将所得图像上各点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$，纵坐标不变，得到函数 $y=g(x)$ 的图像，求 $g(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{5\pi}{24}\right]$ 上的值域.

解析 (1) $f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{3}A\sin x\cos x+\dfrac{A}{2}\cos 2x=A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos 2x\right)=A\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

因为 $A>0$，$f(x)$ 的最大值为 6，知 $A=6$.

(2)由(1)得，$f(x)=6\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，将函数 $f(x)$ 的图像向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位得到

$y=6\sin\left[2\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)+\dfrac{\pi}{6}\right]=6\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图像，

再将得到的图像上各点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$，纵坐标不变，得到 $y=6\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

因为 $x\in\left[0,\dfrac{5\pi}{24}\right]$，所以 $\dfrac{\pi}{3}\leqslant 4x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{7\pi}{6}$，得 $\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{3}\right)\in\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$，

故 $g(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{5\pi}{24}\right]$ 上的值域为 $[-3,6]$.

变式 1　(2012 湖北理 17)已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\omega x-\sin\omega x,\sin\omega x)$,$\boldsymbol{b}=(-\cos\omega x-\sin\omega x,2\sqrt{3}\cos\omega x)$,设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\lambda(x\in\mathbf{R})$ 的图像关于直线 $x=\pi$ 对称,其中 ω,λ 为常数,且 $\omega\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

(1)求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2)若 $y=f(x)$ 的图像经过点 $\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$,求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{3\pi}{5}\right]$ 上的取值范围.

变式 2　(2012 天津理 15)已知函数 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2\cos^2x-1,x\in\mathbf{R}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2)求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

变式 3　(2012 西城二模理 15)已知函数 $f(x)=\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)-\sin^2x$.

(1)求 $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ 的值;

(2)若对于任意的 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,都有 $f(x)\leqslant c$,求实数 c 的取值范围.

【例 1.2】　(2011 浙江文 18)已知函数 $f(x)=A\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x+\varphi\right),x\in\mathbf{R},A>0,0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$,函数 $y=f(x)$ 的部分图像如图 1-1 所示.P,Q 分别为该图像的最高点和最低点,点 P 的坐标为 $(1,A)$.

(1)求函数 $f(x)$ 的最小正周期及 φ 的值;

(2)若点 R 的坐标为 $(1,0)$,$\angle PRQ=\dfrac{2\pi}{3}$,求 A 的值.

解析　(1)由题意得：函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$.

因为 $P(1,A)$ 在函数 $y=A\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x+\varphi\right)$ 的图像上，所以 $A\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\varphi\right)=A$，

即 $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\varphi\right)=1$，得 $\varphi+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，

即 $\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$. 又因为 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

(2)设点 Q 的坐标为 $(x_0,-A)$. 过点 Q 作 $QQ'\perp x$ 轴于点 Q'，如图 1-2 所示.

由 $\angle PRQ=\dfrac{2\pi}{3}$，得 $\angle QRQ'=\dfrac{\pi}{6}$，则 $\tan\angle QRQ'=\dfrac{A}{\frac{T}{2}}=\dfrac{A}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故 $A=\sqrt{3}$.

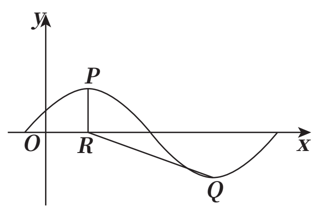

图 1-1

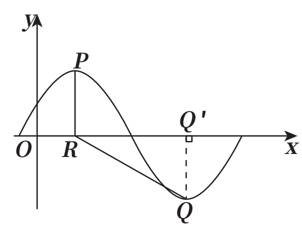

图 1-2

评注　对三角函数问题中的“由图求式(及其性质)”，应重点关注以下方面：

(1)周期(可推出 ω 的值或范围)；

(2)振幅(可推出 $A(A>0)$)；

(3)特值点(可形成三角方程，以求 φ 的值).

变式 1　(2011 海淀一模理 7 改编)已知函数 $f(x)=\cos^2(\omega x+\varphi)(\omega,\varphi$ 为常数)，如果存在正整数 ω 和实数 φ 使得函数 $f(x)$ 的图像经过点 $(1,0)$，如图 1-3 所示，求 ω 的值.

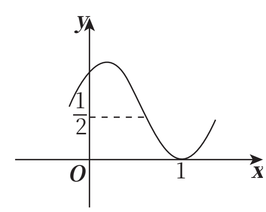

图 1-3

变式 2　(2011 西城二模理 6 改编)函数 $y=\sin(\pi x+\varphi)(\varphi>0)$ 的部分图像如图 1-4 所示，设 P 是图像的最高点，A,B 是图像与 x 轴的交点，求 $\tan\angle APB$ 的值.

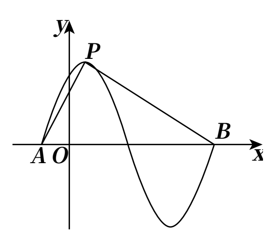

图 1-4

变式 3 （2012 四川理 18）函数 $f(x)=6\cos^2\dfrac{\omega x}{2}+\sqrt{3}\sin\omega x-3(\omega>0)$在一个周期内的图像如图 1-5 所示，$A$ 为图像的最高点，B，C 为图像与 x 轴的交点，且$\triangle ABC$ 为正三角形.

(1)求 ω 的值及函数 $f(x)$的值域；

(2)若 $f(x_0)=\dfrac{8\sqrt{3}}{5}$，且 $x_0\in\left(-\dfrac{10}{3},\dfrac{2}{3}\right)$，求 $f(x_0+1)$的值.

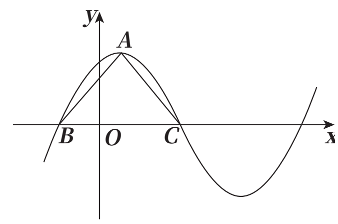

图 1-5

变式 4 （2011 安徽文 15 改编）设函数 $f(x)=a\sin2x+b\cos2x$，其中 $a,b\in\mathbf{R}$，$ab\neq0$，若 $f(x)\leqslant\left|f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right|$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则：

(1)$f\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)=0$；

(2)$\left|f\left(\dfrac{7\pi}{10}\right)\right|<\left|f\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\right|$；

(3)$f(x)$既不是奇函数也不是偶函数；

(4)$f(x)$的单调递增区间是$\left[k\pi+\dfrac{\pi}{6},k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$.

请判断以上说法哪几项正确？

【例 1.3】 已知函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi)$的一段图像如图 1-6 所示，求函数的解析式.

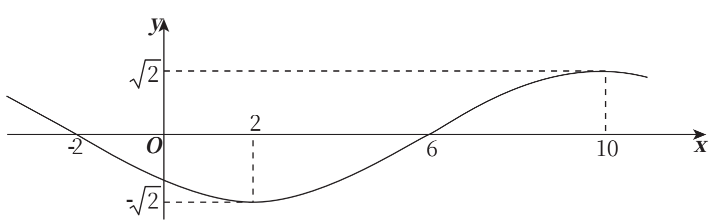

图 1-6

解析 由图 1-6 得 $T=16=\dfrac{2\pi}{\omega}$，$\omega=\dfrac{\pi}{8}$，$A=\sqrt{2}$，

则 $y=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{8}x+\varphi\right)$；代入点$(2,-\sqrt{2})$得$\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\varphi\right)=-\sqrt{2}$，

则$\dfrac{\pi}{4}+\varphi=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $\varphi=2k\pi-\dfrac{3\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$；又 $\varphi\in(-\pi,\pi)$，得 $\varphi=-\dfrac{3\pi}{4}$.

故函数的解析式为 $y=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{8}x-\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

评注 (1)若将点(6,0)代入 $y=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{8}x+\varphi\right)$ 中,求取的结果是否是一致的呢?

$\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}+\varphi\right)=0$,得 $\dfrac{3\pi}{4}+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,即 $\varphi=k\pi-\dfrac{3\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$;又 $-\pi<\varphi<\pi$,则 $\varphi=-\dfrac{3\pi}{4}$ 或 $\dfrac{\pi}{4}$. 而本题中求解得 $\varphi=-\dfrac{3\pi}{4}$,为什么要舍去 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ 呢?大家要注意,点(6,0)位于函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 图像的增区间,据"五点描图法"知 $\dfrac{3\pi}{4}+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得 $\varphi=2k\pi-\dfrac{3\pi}{4}$,又 $-\pi<\varphi<\pi$,则 $\varphi=-\dfrac{3\pi}{4}$. 故函数的解析式为 $y=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{8}x-\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

(2)一般地,我们把函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 图像上从左到右的五个关键点依次称为"第一上零点"、"最大值点"、"下零点"、"最小值点"、"第二上零点(在不同时出现两个上零点的情形下,不区分第一和第二上零点)". 它们所对应的相位值 $\omega x+\varphi$ 分别为 $0+2k\pi,\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\pi+2k\pi,\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi,2\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$. 利用它们解题时应注意这种对应性,故评注(1)说明的点(6,0)应为"第一上零点",其对应的相位值应为 $\dfrac{\pi}{8}\times6+\varphi=0+2k\pi$,而不是 $\dfrac{3\pi}{4}+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,希望读者注意此点!

变式 1 已知函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi)$ 的部分图像如图 1-7 所示,求函数 $f(x)$ 的解析式.

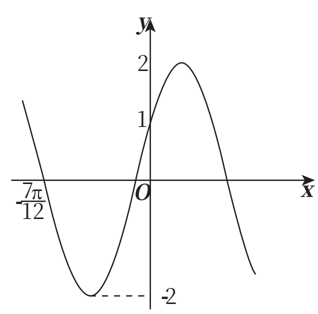

图 1-7

变式 2 (2012 重庆理 18)设 $f(x)=4\cos\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\omega x-\cos(2\omega x+\pi)$,其中 $\omega>0$.

(1)求函数 $f(x)$ 的值域;

(2)若 $y=f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上为增函数,求 ω 的最大值.

核心考点二　解三角形

思路提示：1.解三角形，要具备三个条件，且其中至少有一个与边有关.

正弦定理可用来解决如下问题：

(1)知两角一边求其他；

(2)知两边一对角求另一对角(知小角求大角两解，知大角求小角一解).

余弦定理可用来解决如下问题：

(1)知三边求角；

(2)两边及夹角求第三边；

(3)知两边一对角，求第三边(在三角形内角为特殊角时，还可以使用正弦定理求出第二个角后，利用内角和定理获得第三个角，然后再次使用正弦定理求出第三边).

2.若少于三个条件，只能进行边角互化.

【例 1.4】 (2012 辽宁理 17)在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，角A,B,C成等差数列.

(1)求$\cos B$的值；

(2)边a,b,c成等比数列，求$\sin A\sin C$的值.

解析　(1)由在$\triangle ABC$中，角A,B,C成等差数列，则$2B=A+C=\pi-B$，得$B=\frac{\pi}{3}$，故$\cos B=\frac{1}{2}$.

(2)由a,b,c成等比数列，得$b^2=ac$，据正弦定理，得$\sin^2 B=\sin A\sin C=1-\cos^2 B=\frac{3}{4}$.

评注　本题主要考查三角形的正弦定理、余弦定理、三角形内角和定理及等差、等比数列的定义，考查考生转化思想和运算求解能力.第(2)问既可以利用正弦定理把边的关系转化为角的关系，也可以利用余弦定理得到边之间的关系，如$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-2ac\times\frac{1}{2}=a^2+c^2-ac$，又$b^2=ac$，则$(a-c)^2=0$，$a=c$，故$A=C=\frac{\pi}{3}$，因此$\sin A\sin C=\frac{3}{4}$.

变式 1　(2011 湖北理 16)设$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，已知$a=1,b=2,\cos C=\frac{1}{4}$.

(1)求$\triangle ABC$的周长；

(2)求$\cos(A-C)$的值.

变式 2　(2011 辽宁文 17)已知$\triangle ABC$的三个内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且$a\sin A\sin B+b\cos^2 A=\sqrt{2}a$.

(1)求$\frac{b}{a}$的值；

(2)若$c^2=b^2+\sqrt{3}a^2$，求角B的大小.

变式 3　(2011 江西理 17)在$\triangle ABC$中,角A,B,C所对的边分别是a,b,c,已知$\sin C+\cos C=1-\sin\dfrac{C}{2}$.

(1)求$\sin C$的值;

(2)若$a^2+b^2=4(a+b)-8$,求边c的值.

【例 1.5】　(2012 江苏 15)在$\triangle ABC$中,已知$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\,\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

(1)求证:$\tan B=3\tan A$;

(2)若$\cos C=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,求$A$的值.

分析　先将$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\,\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$表示成数量积,再根据正弦定理和同角三角关系式证明.

解析　(1)由$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\,\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$得

$|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A=3|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos B$,则

$|\overrightarrow{AC}|\cos A=3|\overrightarrow{BC}|\cos B$;由正弦定理,得

$\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{\sin B}{\sin A}$,则$\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{3\cos B}{\cos A}=\dfrac{\sin B}{\sin A}$,即$\tan A=\dfrac{1}{3}\tan B$,故$\tan B=3\tan A$.

(2)由$\cos C=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,$C\in(0,\pi)$,得$\sin C=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,$\tan C=2$,

则$\tan[\pi-(A+B)]=2$,故$\tan(A+B)=-2$,

即$\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-2$,代入$\tan B=3\tan A$,得

$3\tan^2A-2\tan A-1=0$,得$\tan A=-\dfrac{1}{3}$或$\tan A=1$,

又$A\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,故$\tan A=1$,$A=\dfrac{\pi}{4}$.

变式 1　(2012 浙江理 18)在$\triangle ABC$中,内角A,B,C的对边分别为a,b,c,已知$\cos A=\dfrac{2}{3}$,$\sin B=\sqrt{5}\cos C$.

(1)求$\tan C$的值;

(2)若$a=\sqrt{2}$,求$\triangle ABC$的面积.

变式 2　(2011 山东理 17)在△ABC 中,内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知 $\frac{\cos A-2\cos C}{\cos B}=\frac{2c-a}{b}$.

(1)求 $\frac{\sin C}{\sin A}$ 的值;

(2)若 $\cos B=\frac{1}{4}$,$b=2$,求△ABC 的面积 $S_{\triangle ABC}$.

变式 3　(2011 浙江理 18)在△ABC 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.已知 $\sin A+\sin C=p\sin B$ $(p\in\mathbf{R})$,且 $ac=\frac{1}{4}b^2$.

(1)当 $p=\frac{5}{4}$,$b=1$ 时,求 a,c 的值;

(2)若角 B 为锐角,求 p 的取值范围.

变式 4　(2012 新课标全国理 17)已知 a,b,c 分别为△ABC 三内角 A,B,C 的对边,$a\cos C+\sqrt{3}a\sin C-b-c=0$.

(1)求 A;

(2)若 $a=2$,△ABC 的面积为$\sqrt{3}$,求 b,c.

【例 1.6】　(2011 东城一模理 15)在△ABC 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且满足$\frac{2c-b}{a}=\frac{\cos B}{\cos A}$.

(1)求角 A 的大小;

(2)若 $a=2\sqrt{5}$,求△ABC 面积的最大值.

解析　(1)因为 $\frac{2c-b}{a}=\frac{\cos B}{\cos A}$,由正弦定理得 $\frac{2\sin C-\sin B}{\sin A}=\frac{\cos B}{\cos A}$,得 $2\sin C\cos A-\sin B\cos A=\sin A\cos B$,即 $2\sin C\cos A=\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$,在△$ABC$ 中,$\sin C\neq 0$,所以

$\cos A=\frac{1}{2}$，又因为$A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)**解法一：**$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=\sqrt{3}R^2\sin B\sin C$，又 $A=\frac{\pi}{3}$，得 $B+C=\frac{2\pi}{3}$，$C=\frac{2\pi}{3}-B$，

则 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}R^2\sin B\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)=\sqrt{3}R^2\sin B\left(\sin\frac{2\pi}{3}\cos B-\cos\frac{2\pi}{3}\sin B\right)$

$$=\sqrt{3}R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2B+\frac{1-\cos 2B}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2B-\frac{1}{2}\cos 2B+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}R^2\left[\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\right],$$

当 $2B-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$时，即 $B=\frac{\pi}{3}$时，

$S_{\triangle ABC}$取得最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{2\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2\times\frac{1}{4}=5\sqrt{3}$.

解法二：因为 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，且 $a=2\sqrt{5}$，得 $b^2+c^2-20=bc\geqslant 2bc-20$，

则 $bc\leqslant 20$（当且仅当 $b=c$ 时，取“=”）. $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc\leqslant 5\sqrt{3}$.

所以$\triangle ABC$ 面积的最大值为 $5\sqrt{3}$.

变式 1　(2011 西城一模理 15)设$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $\cos B=\frac{4}{5}$，$b=2$.

(1)当 $a=\frac{5}{3}$时，求角 A 的度数；

(2)求$\triangle ABC$ 面积的最大值.

变式 2　(2012 海淀一模理 15)在$\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 A，B，C 成等差数列.

(1)$b=\sqrt{13}$，$a=3$，求 c 的值；

(2)设 $t=\sin A\sin C$，求 t 的最大值.

第二章　立体几何

本章介绍高考数学立体几何核心考点及命题规律与解题策略.

高考数学中,立体几何的考点有空间体的表面积与体积、三视图、空间中点、线面的位置关系判定及性质、空间向量在立体几何中的应用、求解空间角与空间距离.其中核心考点为证明空间中平行与垂直的位置关系及空间角、空间距离的计算.

为什么说它们是核心考点呢?其一,它们在数学高考试卷立体几何试题中占据90%以上的份额;其二,它们是立体几何研究的中心内容;其三,它们对学生的思维能力、空间想象能力及计算能力有较高的要求.下面就来介绍具体的核心考点及突破要诀.

核心考点一　证明空间中平行与垂直的位置关系

思路提示: 证明空间中平行与垂直的位置关系,主要考查线面平行、线线垂直、线面垂直、面面垂直四个方面.

说明:下面的字符 a,b,c,d,l 表示直线;α,β,γ 表示平面.

(1)线面平行:① 线面平行的判定,即线线平行⇒线面平行;

② 面面平行⇒线面平行.

(2)线线垂直:① 如果 $a\perp\alpha$,$b\subset\alpha$,那么 $a\perp b$;

② 如果 $a\parallel b$,$a\perp c$,那么 $b\perp c$;

③ 如果三个平面两两垂直,那么它们的交线两两垂直;

④ 三垂线定理及逆定理.

(3)线面垂直:① 如果 $a\perp b$,$a\perp c$,$b\subset\alpha$,$c\subset\alpha$,$b\cap c=P$,那么 $a\perp\alpha$;

② 如果 $\alpha\perp\beta$,$\alpha\cap\beta=b$,$a\subset\alpha$,$a\perp b$,那么 $a\perp\beta$;

③ 如果 $a\perp\alpha$,$b\parallel a$,那么 $b\perp\alpha$;

④ 如果 $\alpha\perp\gamma$,$\beta\perp\gamma$,$\alpha\cap\beta=l$,那么 $l\perp\gamma$.

(4)面面垂直:① 定义(二面角等于90°);

② 如果 $a\subset\alpha$,$a\perp\beta$,那么 $\alpha\perp\beta$.

如图2-1所示为空间中线面平行、垂直位置关系的有关定理或命题结构图.

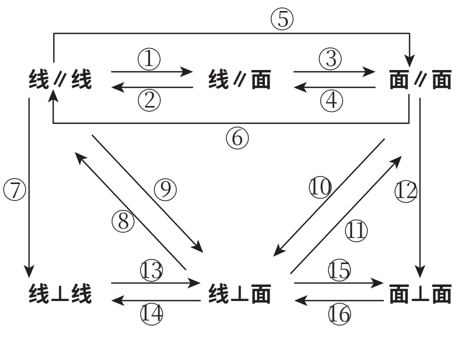

图 2-1

①【线面平行判定定理】平面外的一条直线和平面内的一条直线平行,则这条直线和这个平面平行.