

第 3 章 平稳随机过程

平稳随机过程是一类重要的随机过程。在信息处理与通信领域中,有很多随机过程都是平稳的或近近平稳的。本章主要讨论平稳随机过程的概念及相关性质。

3.1 平稳随机过程的基本概念

平稳随机过程一般分为严平稳随机过程和宽平稳随机过程,或者称为狭义平稳随机过程和广义平稳过程两类。

3.1.1 严平稳随机过程

定义 3-1 严平稳随机过程。

一个随机过程 $X(t)$, 如果它的 n 维概率密度不随时间起点的选择不同而改变, 即对于任意的 n 和 τ , $X(t)$ 的 n 维概率密度为

$$\begin{aligned} f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ = f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau) \end{aligned} \quad (3-1)$$

则称 $X(t)$ 是严平稳(狭义)随机过程。上式也表明严平稳随机过程的统计特性不随时间起点不同而改变, 即在任何时刻计算它的统计特性都相同。

在实际问题中, 利用随机过程的概率密度来判断其平稳性是很困难的。一般情况下, 如果产生随机过程的主要物理条件不随时间的推移而改变, 那么此过程就认为是严平稳的。很多非平稳过程, 只要在我们观测的一定时间范围内是平稳的, 就可以认为是严平稳过程。

严平稳随机过程有下面两个性质：

性质 1 严平稳随机过程 $X(t)$ 的一维概率密度与时间无关。这样数学期望和方差都与时间无关，即

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = m_X \\ E[X^2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \Psi_X^2 \\ D[X(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f_X(x) dx = \sigma_X^2 \end{aligned} \quad (3-2)$$

物理意义：严平稳随机过程的所有样本都在水平线 m_X 上下，以 σ_X^2 的离散度比较均匀地摆动。

性质 2 严平稳随机过程 $X(t)$ 的二维概率密度只与两个时刻 t_1, t_2 的间隔有关，与时间起点无关。

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2; t_1 + \lambda, t_2 + \lambda)$$

令 $\lambda = -t_1$ ，则

$$\begin{aligned} f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) &= f_X(x_1, x_2; 0, t_2 - t_1) \\ &= f_X(x_1, x_2; \tau) \end{aligned} \quad (3-3)$$

式中， $\tau = t_2 - t_1$ ，即二维概率密度仅依赖于时间间隔 τ ，而与个别时间值 t_1, t_2 无关。因此平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数只是时间间隔 τ 的函数，即

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 \\ &= R_X(\tau) \end{aligned} \quad (3-4)$$

显然有

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2) = R_X(\tau) - m_X^2$$

由此可得出以下结论： $X(t)$ 的自相关函数和协方差函数只与时间间隔有关。即

$$C_X(\tau) = R_X(\tau) - m_X^2 \quad (3-5)$$

当 $\tau=0$ 时,有

$$C_X(0) = R_X(0) - m_X^2 = \sigma_X^2 \quad (3-6)$$

3.1.2 宽平稳随机过程

要判断一个随机过程是否是严平稳的,就需要知道它的一维、二维甚至多维概率密度函数,而在实际工程应用中,认为这样的定义太“严格”,也很难求出系统的多维概率密度函数,因此,在大多数应用问题中,只限于在相关理论的范围内考虑平稳问题,即只考虑一阶、二阶矩以内的问题。

随机过程的一阶、二阶矩虽然不能像概率密度函数那样全面地描述随机过程的统计特性,但它们在一定程度上相当有效地描述了随机过程的一些重要特性。宽平稳随机过程就是依据一阶、二阶矩来定义的。下面给出宽平稳随机过程的具体定义。

定义 3-2 宽平稳随机过程。

如果随机过程 $X(t)$ 满足

$$\begin{cases} E[X(t)] = m_X(t) = m_X \\ R_X[t_1, t_2] = R_X(\tau) \end{cases} \quad (3-7)$$

且

$$E[X^2(t)] < \infty \quad (3-8)$$

则称 $X(t)$ 为宽(广义)平稳随机过程,式中 $\tau = t_2 - t_1$ 。

从上面讨论严格平稳过程的矩函数可知,宽平稳过程只是严格平稳过程在平稳性条件放宽要求时的一个特例,因而宽平稳过程不一定是严格平稳的。

比较两种平稳性条件可知,若严平稳,其二阶矩存在,则必然宽平稳;反之,若宽平稳,则不一定严平稳。

在电子信息技术中,一般只研究适于工程应用的宽平稳过程。除非特别声明,下面凡是谈到平稳过程,均指宽平稳随机过程。

当同时考虑两个随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 时,若它们的互相关函数仅是单变量 τ 的函数,即 $R_{XY}(\tau) = E[X(t_1)Y(t_1 + \tau)]$, $\tau = t_2 - t_1$,

则称 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 为联合宽平稳过程。

例 3-1 设随机过程 $X(t) = a \cos(\omega_0 t + \Phi)$, 式中 a, ω_0 为常数, Φ 是在 $[0, 2\pi]$ 内服从均匀分布的随机变量, 这种信号通常称为随相正弦信号, 求证随机过程 $X(t)$ 是宽平稳的。

解: 随机变量 Φ 在 $[0, 2\pi]$ 内服从均匀分布, 其概率密度函数为

$$f_{\Phi}(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$X(t)$ 的均值和自相关函数分别为

$$E[X(t)] = \int_0^{2\pi} a \cos(\omega_0 t + \varphi) \frac{1}{2\pi} d\varphi = 0$$

$$\begin{aligned} R_X(t, t + \tau) &= E[a \cos(\omega_0 t + \varphi) a \cos[\omega_0(t + \tau) + \varphi]] \\ &= \frac{a^2}{2} E[(\cos \omega_0 \tau) + \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\varphi)] \\ &= \frac{a^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) \end{aligned}$$

且满足式 $E[X^2(t)] = \frac{a^2}{2} < \infty$, $X(t)$ 的均值为 0, 自相关函数仅与 τ 有关, 故 $X(t)$ 为宽平稳随机过程。

例 3-2 设随机过程 $X(t)$ 由下述三个样本函数组成, 且等概率分布, $X(\xi_1, t) = 1$, $X(\xi_2, t) = \sin t$, $X(\xi_3, t) = \cos t$, 计算 $X(t)$ 的均值和自相关函数, 并判断 $X(t)$ 是否平稳。

解: 根据均值和自相关函数的公式可得

$$m_X(t) = E[X(t)] = \frac{1}{3}(1 + \sin t + \cos t)$$

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] \\ &= \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \sin t_1 \sin t_2 + \frac{1}{3} \cos t_1 \cos t_2 \\ &= \frac{1}{3}(1 + \cos \tau) \end{aligned}$$

式中, $\tau = t_2 - t_1$, 由于 $m_X(t)$ 与时间 t 有关, 因此 $X(t)$ 不是平稳的系统。

3.1.3 各态历经随机过程

对于平稳随机过程,它的数学期望、方差都是常数,相关函数只与时间间隔有关,这些数字特征都是统计平均的概念,也就是说,如果要得到这些数学特征的准确值,需要对所有样本函数进行统计,这在实际中是很难做到的。如果我们只通过随机过程的一个样本函数,就可以解决随机过程数字特征的估计问题,才是具有实际意义的。各态历经的随机过程就具有这一特征。

辛钦证明:在具备一定的补充条件下,对平稳过程的一个样本函数取时间均值,当观察时间充分长,将在概率意义上趋近它的统计平均,对具有这一特征的随机过程称为各态历经随机过程或遍历过程。

各态历经过程的每个样本都经历了随机过程的各种可能状态,任何一个样本都能充分代表随机过程的统计特性,即其任一样本都可作为有充分代表性的典型样本,对它求得的时间平均,也就在概率意义上等于它的统计平均。

1. 各态历经随机过程的定义

定义 3-3 各态历经随机过程。

对于二阶平稳过程 $X(t)$:

① 若 $\overline{X(t)} = E[X(t)] = m_X$ 以概率 1 成立,则称随机过程 $X(t)$ 的均值具有各态历经性。

$\overline{X(t)}$ 为时间均值,它的定义式为

$$\overline{X(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt \quad (3-9)$$

② $\overline{X(t)X(t+\tau)} = E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$ 以概率 1 成立,则称随机过程 $X(t)$ 的自相关函数具有各态历经性。

$\overline{X(t)X(t+\tau)}$ 为时间自相关函数,它的定义式为

$$\overline{X(t)X(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t)X(t+\tau) dt \quad (3-10)$$

若 $X(t)$ 的均值和自相关函数都具有各态历经性, 且 $X(t)$ 是宽平稳过程, 则称 $X(t)$ 是宽各态历过程。

2. 各态历经性的实际意义

各态历过程可以用一个样本函数的时间平均代替对整个过程统计平均的研究, 这样可以简化计算或测量, 给解决许多工程上的问题带来极大方便, 实际上, 这也是引入各态历经性概念的重要意义。例如测量接收机的噪声, 用一般的方法, 就需要用很多相同的接收机, 在同一条件下同时进行测量和计算, 再用统计的办法求出所需要的数学期望、自相关函数等; 而如果噪声过程具有各态历经性, 则可以只用一台接收机, 在不变的条件下, 对其输出噪声作长时间的记录, 然后用时间平均的方法即可得到数学期望、相关函数等数字特征, 因此, 研究各态历过程具有重要的实际意义。

例 3-3 讨论随机过程 $X(t) = a \cos(\omega_0 t + \Phi)$ 的各态历经性, 其中 a 为常数, Φ 是在 $[0, 2\pi]$ 上均匀分布的随机变量。

解: $X(t)$ 的时间均值为

$$\begin{aligned}\overline{X(t)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a \cos(\omega_0 t + \varphi) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a}{2T} \int_{-T}^T (\cos \omega_0 t \cos \varphi - \sin \omega_0 t \sin \varphi) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a \cos \varphi}{T} \int_0^T \cos \omega_0 t dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} a \cos \varphi \frac{\sin \omega_0 T}{\omega_0 T} = 0\end{aligned}$$

时间自相关函数为

$$\begin{aligned}\overline{X(t)X(t+\tau)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) \cos[\omega_0(t+\tau) + \varphi] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{4T} \int_{-T}^T [\cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\varphi) + \cos \omega_0 \tau] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{4T} \int_{-T}^T \cos \omega_0 \tau dt\end{aligned}$$

$$= \lim \frac{a^2}{4T} \cdot 2T \cdot \cos \omega_0 \tau = \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau$$

根据例 3-1 的结论,可得

$$\overline{X(t)} = E[X(t)] = 0$$

$$\overline{X(t)X(t+\tau)} = E[X(t)X(t+\tau)] = \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau$$

因此, $X(t)$ 是各态历过程。

3.2 平稳过程相关函数分析

随机过程的基本数字特征是数学期望和相关函数。对平稳随机过程而言,数学期望是常数,所以基本特征就体现在相关函数上。此外,相关函数不仅提供随机过程各随机变量间关联特性的信息,而且可以用来求取随机过程的功率谱密度。

3.2.1 自相关函数性质

性质 1 实平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数为偶函数,即

$$R_X(-\tau) = R_X(\tau) \quad (3-11)$$

证明: $R_X(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = E[X(t+\tau)X(t)] = R_X(-\tau)$

性质 2 平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数的最大点在 $\tau=0$ 处,即

$$R_X(0) \geq |R_X(\tau)| \quad (3-12)$$

证明: 任何正的随机过程的数学期望值恒为非负值,即

$$E[(X(t) \pm X(t+\tau))^2] \geq 0$$

$$E[X^2(t) \pm 2X(t)X(t+\tau) + X^2(t+\tau)] \geq 0$$

对于平稳过程,有 $E[X^2(t)] = E[X^2(t+\tau)] = 0$

代入前式得: $R_X(0) \geq E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$

性质 3 周期平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数是周期函数,且与周期平稳过程的周期相同,即

$$R_X(\tau + T) = R_X(\tau)$$

证明：平稳过程 $X(t)$ 是周期为 T 的函数，即 $X(t+T)=X(t)$ ，所以

$$\begin{aligned} R_X(\tau+T) &= E[X(t)X(t+\tau+T)] \\ &= E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau) \end{aligned} \quad (3-13)$$

性质 4 $R_X(0)=E[X^2(t)]$ ，即 $R_X(0)$ 代表了平稳过程的“总平均功率”。

性质 5 非平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数满足

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_X(\tau) = R_X(\infty) = m_X^2 \quad (3-14)$$

从物理意义上讲，当 τ 增大时 $X(t)$ 与 $X(t+\tau)$ 之间相关性会减弱，在 $\tau \rightarrow \infty$ 的极限情况下，两者互相独立，于是有

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_X(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} E[X(t)X(t+\tau)] = m_X^2$$

故有

$$R_X(\infty) = m_X^2$$

对于中心化自相关函数，则有

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} C_X(\tau) = C_X(\infty) = 0$$

性质 6 若平稳过程含有平均分量(均值)为 m_X ，则自相关函数将含有固定分量 m_X^2 ，即

$$R_X(\tau) = C_X(\tau) + m_X^2 \quad (3-15)$$

在满足性质 5 的条件下有

$$\sigma_X^2 = R_X(0) - R_X(\infty) \quad (3-16)$$

例 3-4 对于两个零均值联合平稳的随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ ，已知 $\sigma_X^2=5$ ， $\sigma_Y^2=10$ ，说明下列函数是否可能为它们的自相关函数，并说明原因。

$$(1) R_Y(\tau) = -\cos(6\tau)e^{-|\tau|} \quad (2) R_X(\tau) = 5 \left[\frac{\sin(3\tau)}{3\tau} \right]^2$$

$$(3) R_Y(\tau) = 6 + 4e^{-3\tau^2} \quad (4) R_X(\tau) = 5\sin(5\tau)$$

$$(5) R_X(\tau) = 5e^{-3\tau} \quad (6) R_X(\tau) = 5e^{-|\tau|}$$

解：(1) 因为 $R_Y(0)=-1$ ，不满足性质 4，所以不可能成为 $Y(t)$

的自相关函数；

(2) 因为 $\sigma_X^2 = R_X(0) - R_X(\infty) = 9$, 不满足性质 6, 所以不可能成为 $X(t)$ 的自相关函数；

(3) $\sigma_Y^2 = R_Y(0) - R_Y(\infty) = 4$, 不满足性质 6, 所以不可能成为 $Y(t)$ 的自相关函数；

(4) 为非偶函数, 不满足性质 1, 所以不可能成为 $X(t)$ 的自相关函数；

(5) 为非偶函数, 不满足性质 1, 所以不可能成为 $X(t)$ 的自相关函数；

(6) $\sigma_X^2 = R_X(0) - R_X(\infty) = 5$, 满足性质 6, 能成为 $X(t)$ 的自相关函数。

例 3-5 非周期平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau) = 16 + \frac{9}{1+3\tau^2}$, 求数学期望和方差。

解：根据自相关函数的性质 5、性质 6 得

$$m_X^2 = R_X(\infty) = 16$$

数学期望为 $m_X = \pm 4$

方差为 $\sigma_X^2 = R_X(0) - R_X(\infty) = 25 - 16 = 9$

因此, 随机过程 $X(t)$ 的数学期望为 ± 4 , 方差为 9。

例 3-6 平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau) = 4e^{-|\tau|} \cos \pi \tau + \cos 3\pi \tau$, 求 $E[X^2(t)]$ 和 σ^2 。

解：因为 $R_X(\tau) = 4e^{-|\tau|} \cos \pi \tau + \cos 3\pi \tau = R_{X_1}(\tau) + R_{X_2}(\tau)$, 其中 $R_{X_2}(\tau)$ 为随相正弦波分量的相关函数, 该分量均值为零。

非周期分量 $R_X(\infty) = 0 = m_{X_1}^2$

$$E[X^2(t)] = R_X(0) = 5$$

$$\sigma_X^2 = R_X(0) - R_X(\infty) = R_X(0) - m_X^2 = 5$$

3.2.2 互相关函数性质

性质 1 $R_{XY}(0) = R_{YX}(0)$, $R_{XY}(0)$ 表示随机过程在同一时刻的

相关性。

性质 2 一般情况下,互相关函数为非奇非偶的函数,即

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau) \quad (3-17)$$

性质 3 互相关函数幅度平方满足

$$|R_{XY}(\tau)|^2 \leq R_X(0)R_Y(0) \quad (3-18)$$

互相关函数满足

$$|C_{XY}(\tau)|^2 \leq C_X(0)C_Y(0) = \sigma_X^2\sigma_Y^2 \quad (3-19)$$

性质 4 互相关函数和协方差函数的幅度满足

$$|R_{XY}(\tau)| \leq \frac{1}{2}[R_X(0) + R_Y(0)] \quad (3-20)$$

同理有

$$|C_{XY}(\tau)| \leq \frac{1}{2}[C_X(0) + C_Y(0)] = \frac{1}{2}[\sigma_X^2 + \sigma_Y^2]$$

3.2.3 相关系数和相关时间

1. 相关系数

为了比较随机过程在两个不同时刻状态之间的相关特性,引入了相关系数的概念。相关系数定义为对随机过程的协方差函数归一化处理,即

$$\rho_X(\tau) = \frac{C_X(\tau)}{\sigma_X^2} = \frac{R_X(\tau) - R_X(\infty)}{R_X(0) - R_X(\infty)} \quad (3-21)$$

显然, $|\rho_X(\tau)| \leq 1$ 。

2. 相关时间

根据相关系数的定义,当时间 $\tau \rightarrow \infty$ 时,随机过程 $X(t)$ 和 $X(t+\tau)$ 是不相关的。但实际在工程应用中,当 τ 大到一定程度时,相关系数就已经很小,已经可以把 $X(t)$ 和 $X(t+\tau)$ 看作是不相关的。因此,常定义某个时间 τ_0 ,当 $\tau > \tau_0$ 时,就认为 $X(t)$ 和 $X(t+\tau)$ 是不相关的,定义这个时间 τ_0 为相关时间。

一般相关时间用高为 $\rho_X(0)=1$, 底为 τ_0 的矩形面积等于 $\rho_X(\tau)$ 和 τ 的正轴围成的面积来定义 τ_0 , 如图 3-1 所示。

$$\tau_0 = \int_0^{\infty} \rho_X(\tau) d\tau \quad (3-22)$$

工程上取 $|\rho_X(\tau_0)| = 0.05$ 的这个时间为相关时间。相关时间 τ_0 越大, 说明随机过程的起伏速度越小。

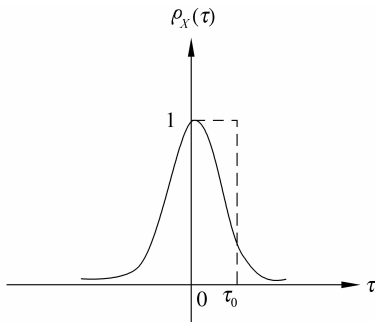


图 3-1 相关系数的典型曲线

3. 互相关系数

定义 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互相关系数为

$$\rho_{XY}(\tau) = \frac{R_{XY}(\tau)}{\sqrt{R_X(0)R_Y(0)}} = \frac{R_{XY}(\tau)}{\sigma_X\sigma_Y} \leqslant 1 \quad (3-23)$$

例 3-7 已知平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau) = 3e^{-\tau^2}$, 求自相关系数和自相关时间。

解: 由自相关系数的定义

$$\begin{aligned} \rho_X(\tau) &= \frac{C_X(\tau)}{C_X(0)} = \frac{R_X(\tau) - R_X(\infty)}{R_X(0) - R_X(\infty)} = \frac{3e^{-\tau^2} - 3e^{-\infty^2}}{3e^{-0^2} - 3e^{-\infty^2}} \\ &= \frac{3e^{-\tau^2}}{3} = e^{-\tau^2} \end{aligned}$$

由自相关时间定义得

$$\tau_0 = \int_0^{\infty} \rho_X(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0.886$$

3.3 平稳随机过程的功率谱密度

3.3.1 功率谱密度的概念

一个确知信号 $s(t)$ 满足狄氏条件, 且绝对可积, 即满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt < \infty, \text{ 等价条件为}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt < \infty \quad (3-24)$$

则 $s(t)$ 的傅里叶变换存在, 或者具有频谱:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3-25)$$

若以 $s(t)$ 代表电流或电压, 式(3-24)表明, 要求 $s(t)$ 总能量必须有限。 $S(\omega)$ 一般是复函数, 在 $S(\omega)$ 和 $s(t)$ 之间一般满足帕赛瓦尔定理:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |s(\omega)|^2 d\omega \quad (3-26)$$

信号功率谱密度存在的条件是它具有有限的能量。一个随机过程的样本函数, 尽管它的总能量是无限的, 但只要它的平均功率是有限的, 即

$$W_{\xi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt < \infty \quad (3-27)$$

我们就可以利用傅里叶变换这一工具。对于随机过程的样本函数而言, 研究它的频谱没有意义, 研究其平均功率随频率的分布有意义。

为了将傅里叶方法应用于研究随机过程, 我们将随机过程的一个样本函数 $x(t)$ 截取 $-T$ 到 T 的一段, 记为 $x_T(t)$

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases} \quad (3-28)$$

式中 T 为任意有限值。由于截取的样本函数 $x_T(t)$ 满足频谱密度存在的条件,它的傅里叶变换是存在的,即

$$X_T(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T x_T(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3-29)$$

$$x_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_T(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3-30)$$

将式(3-30)代入到式(3-27)中,并利用帕赛瓦尔定理得

$$\begin{aligned} W_\xi &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x_T(t, \xi)|^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_T(t, \xi) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_T(\omega, \xi) e^{j\omega t} d\omega \right] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{1}{2\pi} X_T(\omega, \xi) \left[\int_{-T}^T x_T(t, \xi) e^{j\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} |X_T(\omega, \xi)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(\omega, \xi)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (3-31)$$

式中 W_ξ 为某个样本函数的平均功率。

式(3-31)的被积函数 $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(\omega, \xi)|^2$ 描述了在整个频率范围内对它积分,可得到信号的总功率,它被称为是样本的功率谱密度。如果对所有样本取统计平均就得到了随机过程的功率谱密度:

$$S_X(\omega) = E\left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(\omega, \xi)|^2\right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[|X_T(\omega, \xi)|^2]$$

将式(3-31)对所有样本取统计平均,则有

$$\begin{aligned} W &= E[W_\xi] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[|X(t)|^2] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[|X_T(\omega, \xi)|^2] d\omega \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega \quad (3-32)$$

这里 W 是随机过程 $X(t)$ 的平均功率。由此可见,随机过程的平均功率可以由其均方值的时间平均得到,也可以由它的功率谱密度在整个频域上的积分得到。

如果 $X(t)$ 为平稳过程,均方值必为常数,则

$$W = E[X^2(t)] = R_X(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega \quad (3-33)$$

如果 $X(t)$ 是各态历过程,则有

$$S_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(\omega, \xi)|^2 \quad (3-34)$$

此时,样本函数的功率谱密度和随机过程的功率谱密度以概率 1 相等。

3.3.2 功率谱密度与自相关函数之间的关系

自相关函数和功率谱密度分别从时域和频域两个方面描述随机过程的统计特性,它们之间有着密切的关系。根据维纳-辛钦定理,平稳随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度为它的自相关函数 $R_X(\tau)$ 的傅里叶变换,即

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3-35)$$

根据傅里叶反变换公式可得

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3-36)$$

也就是说,功率谱密度沿频率轴的总和是信号的平均功率,这也是功率谱密度的物理意义。

由于平稳随机过程的自相关函数是偶函数, $S_X(\omega)$ 也为偶函数,因此上式可写为

$$S_X(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_X(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (3-37)$$

$$R_X(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega \quad (3-38)$$

下面简单给出只有正频率的单边功率谱密度 $F_X(\omega)$ 和双边功率谱密度 $S_X(\omega)$ 的关系 (见图 3-2):

$$\begin{cases} F_X(\omega) = 4 \int_0^{\infty} R_X(\tau) \cos(\omega \tau) d\tau \\ R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F_X(\omega) \cos(\omega \tau) d\omega \end{cases} \quad (3-39)$$

式中

$$F_X(\omega) = \begin{cases} 2S_X(\omega), & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}$$

此时, 平均功率可写成

$$\begin{aligned} W = R_X(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2S_X(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F_X(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (3-40)$$

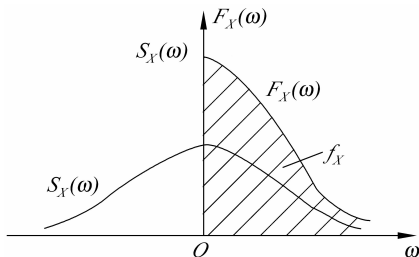


图 3-2 单边谱和双边谱的关系

应当指出: 以上讨论的功率谱密度都属于连续情况, 这意味着相应的随机过程不能含有直流成分或周期成分, 也就是当功率谱密度的反变换并不存在时, 通常引入 δ 函数来解决。在工程上遇到的随机信号 $X(t)$, 其自相关函数有以下三种情况:

- (1) 当 $\tau \rightarrow \infty$ 时, $R_X(\tau) \rightarrow 0$, 傅里叶变换存在。
- (2) 当 $\tau \rightarrow \infty$ 时, $R_X(\tau) \rightarrow m_X^2$, 此时在 $\omega = 0$ 处引入 δ 函数, 可求

出 $R_X(\tau)$ 的傅里叶变换。

(3) 当 $\tau \rightarrow \infty$ 时, $R_X(\tau)$ 呈振荡形式, 引入 δ 函数, 也可求出 $R_X(\tau)$ 的傅里叶变换。

例 3-8 已知随机相位正弦波 $X(t) = a \cos(\omega t + \Phi)$, 其中 $a > 0$, ω 为常数, Φ 是在 $(-\pi, \pi)$ 内均匀分布的随机变量, 求随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度。

解: 自相关函数为

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] = E[\cos(\omega t_1 + \varphi)\cos(\omega t_2 + \varphi)] \\ &= \frac{1}{2}E[\cos(\omega t_1 - \omega t_2) + \cos(\omega t_1 + \omega t_2 + 2\varphi)] \\ &= \frac{1}{2}\cos\omega(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

根据自相关函数和功率谱密度之间的关系, 得 $X(t)$ 的功率谱密度为

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \cos\omega_0 \tau \times e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{j\omega_0\tau} + e^{-j\omega_0\tau}) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-j(\omega-\omega_0)\tau} d\tau + e^{-j(\omega+\omega_0)\tau} d\tau) \\ &= \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

例 3-9 若随机过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau) = \frac{1}{2} \cos\omega_0 \tau$, 求其功率谱密度。

解: 根据功率谱密度和自相关函数关系得

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \cos\omega_0 \tau \times e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{j\omega_0\tau} + e^{-j\omega_0\tau}) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-j(\omega-\omega_0)\tau} d\tau + e^{-j(\omega+\omega_0)\tau} d\tau) \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

例 3-10 已知电报信号的自相关函数为 $R(\tau) = \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{4}e^{-2\lambda|\tau|})$, 求其功率谱密度。

解: 根据功率谱密度和自相关函数关系得

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4}e^{-2\lambda|\tau|}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{\pi}{2} \delta(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{16} e^{-2\lambda|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{\pi}{2} \delta(\omega) + \frac{1}{4} \frac{\lambda}{4\lambda^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

3.3.3 功率谱密度的性质

由随机信号功率谱密度的定义,可得到它的三个性质:

性质 1 $S_X(\omega)$ 是非负的实函数, $S_X(\omega) \geq 0$ 。

性质 2 如果 $X(t)$ 是实平稳随机过程, 则 $S_X(\omega)$ 是偶函数, 即

$$S_X(\omega) = S_X(-\omega) \quad (3-41)$$

性质 3 平稳随机过程的功率谱密度可以表示为有理函数形式, 即

$$S_X(\omega) = S_0 \frac{\omega^{2m} + a_{2m-2}\omega^{2m-2} + \cdots + a_0}{\omega^{2n} + b_{2n-2}\omega^{2n-2} + \cdots + b_0} \quad (3-42)$$

式中, S_0 为常数, 有理式分母无实数根, 即实轴上无极点, 且 $n > m$ 。

例 3-11 利用功率谱密度的性质, 判断下列函数, 哪些可能成为平稳过程的功率谱密度。

$$(1) f_1(\omega) = \cos 3\omega \quad (2) f_2(\omega) = \frac{1}{(\omega-1)^2 + 2}$$

$$(3) f_3(\omega) = \frac{\omega^2 + 1}{\omega^4 + 5\omega^2 + 6} \quad (4) f_4(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 - 4\omega^2 + 3}$$

解: 式(1)不满足功率谱密度的性质 1, 有负值存在;

式(2)不满足功率谱密度的性质 2, 不是偶函数;

式(3)满足性质中的所有条件;

式(4)中实轴上有极点,不满足条件。

综上所述,式(3)可能成为平稳过程的功率谱密度的表达式,而式(1)、式(2)和式(4)不能。

例 3-12 已知平稳随机过程的功率谱密度为 $S_X(\omega) = \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 3\omega^2 + 2}$, 求自相关函数 $R_X(\tau)$ 和平均功率 W 。

解: 根据功率谱密度和自相关函数关系得

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 3\omega^2 + 2} e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + 1} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2} e^{-|\tau|} \end{aligned}$$

此题在求解过程中,用到了傅里叶变换公式

$$e^{-a|\tau|} \Leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

它的平均功率为 $W = R_X(0) = \frac{1}{2}$

例 3-13 已知平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau) = e^{-a|\tau|} \cos\omega_0\tau$, 求 $X(t)$ 的功率谱密度。

解: 根据傅里叶变换表有

$$\begin{aligned} e^{-a|\tau|} &\Leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \\ \cos\omega_0\tau &\Leftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$

根据傅里叶变换的性质有

$$f_1(t)f_2(t) \xLeftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

再由功率谱密度和自相关函数之间的关系得

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|\tau|} \cos\omega_0\tau \times e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} * \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \\
 &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2}
 \end{aligned}$$

3.3.4 互功率谱密度及其性质

互谱密度一般用来研究两个随机过程之和,但两个随机过程必须是各自平稳且联合平稳的。3.3.3节曾定义了两个联合随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互相关系数,也可以用傅里叶变换来定义它们的互功率谱密度,简称互谱密度,它的定义为

$$\begin{cases} S_{XY}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[X_T^*(\omega) Y_T(\omega)] \\ S_{YX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[Y_T^*(\omega) X_T(\omega)] \end{cases} \quad (3-43)$$

比较可得,两个互谱密度的关系为 $S_{XY}(\omega) = S_{YX}^*(\omega)$ 。

下面给出互谱密度和互相关函数之间的傅里叶变换关系。

$$\begin{cases} S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ S_{YX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\ R_{YX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{YX}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \end{cases} \quad (3-44)$$

两个随机过程的互功率谱密度与单个随机过程的功率谱密度不同,它不再是频率为 ω 的非负、实的偶函数。实平稳随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互谱密度有以下性质。

性质 1 互谱密度的对称性

$$S_{XY}(\omega) = S_{YX}(\omega) = S_{YX}^*(\omega) = S_{XY}^*(-\omega) \quad (3-45)$$

性质 2 互谱密度的实部是偶函数,虚部是奇函数,并有

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[S_{XY}(\omega)] = \operatorname{Re}[S_{YX}(-\omega)] = \operatorname{Re}[S_{YX}(\omega)] \\ \quad = \operatorname{Re}[S_{XY}(-\omega)] \\ \operatorname{Im}[S_{XY}(\omega)] = \operatorname{Im}[S_{YX}(-\omega)] = -\operatorname{Im}[S_{YX}(\omega)] \\ \quad = -\operatorname{Im}[S_{XY}(-\omega)] \end{cases} \quad (3-46)$$

性质 3 如果 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 互相正交, 则 $S_{XY}(\omega) = S_{YX}(\omega) = 0$

性质 4 如果 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是互不相关的两个随机过程, 且数学期望分别为 m_X, m_Y , 则有

$$S_{XY}(\omega) = S_{YX}(\omega) = 2\pi m_X m_Y \delta(\omega) \quad (3-47)$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } R_{XY}(t, t+\tau) &= E[X(t)Y(t+\tau)] \\ &= E[X(t)]E[Y(t+\tau)] \\ &= m_X m_Y \end{aligned}$$

则根据傅里叶变换关系得

$$S_{XY}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 2\pi m_X m_Y \delta(\omega)$$

例 3-14 设随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是联合平稳的, 其互相关函数为

$$R_{XY}(\tau) = \begin{cases} 9e^{-3\tau} & \tau \geq 0 \\ 0 & \tau \leq 0 \end{cases}$$

求其互谱密度 $S_{XY}(\omega)$ 和 $S_{YX}(\omega)$ 。

解: 根据互谱密度和互相关函数的关系得

$$\begin{aligned} S_{XY}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_0^{\infty} 9e^{-3\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= 9 \int_0^{\infty} e^{-(3+j\omega)\tau} d\tau = \frac{9}{3+j\omega} \end{aligned}$$

再根据互谱密度的性质得

$$S_{YX}(\omega) = S_{XY}(-\omega) = \frac{9}{3-j\omega}$$

例 3-15 设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是两个不相关的平稳过程, 均值分别为 m_X, m_Y , 且都不为零, 定义 $Z(t) = X(t) + Y(t)$, 求互谱密度 $S_{XY}(\omega)$ 和 $S_{XZ}(\omega)$ 。

解: 根据已知条件先求 X 和 Y 的互相关函数, 即