

第 1 章

流体物理性质与运动的描述

本章内容包括两部分：一部分是关于流体的宏观物理性质，着重介绍流体的可压缩性与粘性；另一部分则为流体运动物理量的描述，着重介绍流体运动的欧拉描述方法以及在欧拉描述下流体的运动学分析。

1.1 流体质点与连续介质假设

1.1.1 流体的定义和特征

在自然界，物质的常见聚集（存在）状态是固态、液态和气态，简称物质的三态或三相，处在这三种形态下的物质分别称为固体、液体和气体。液体和气体又合称为流体。流体和固体在宏观表象上的差别是显而易见的。一定量的固体具有一定的几何外形和体积，不易变形。而一定量的液体则无一定的形状，易于变形。也就是说，和固体相比，流体明显具有易流动和不能保持一定形状的特性。

流体和固体在宏观表象上的差别从物理学的角度来解释是因为构成物质的内部微观结构、分子热运动和分子间的作用力不同所造成的。在体积相同的常规条件下，流体中所含的分子数目比固体少得多，分子间的空隙就大得多。因此，流体分子间的作用力小，分子的无规则热运动强烈，从而决定了流体的易流动性。从力学的角度来解释，流体的易流动性是因为流体在静止时不能承受剪切力，这一点显然与固体不

同. 固体在静止时也能承受剪切力, 它可以通过微小变形以抵抗外力, 达到平衡后, 只要剪切力保持不变, 则固体不再发生变形. 因此, 可以给流体下这样一个力学的定义: 在任何微小剪切力的持续作用下能够连续不断变形的物质称为流体.

在流体的特性上需要再做点补充说明的是, 虽然液体和气体统称为流体, 具有相同的特性. 但由于液体和气体在分子结构上还存在较大差别, 它们之间还会有一些不同的特性, 或虽有相同的特性但程度上差异较大. 例如, 虽然两者都具有易流动性, 但液体只能局限在固体界面或容器内, 一定质量的液体一般都占有固定的体积, 若空间或容器的体积大于液体的体积, 则会有自由液面存在. 而气体则完全没有这个特性.

1.1.2 流体力学的研究内容和方法

流体力学主要研究在各种力的作用下, 流体本身的静止状态和运动状态特性, 以及流体和相邻固体界面间有相对运动时的相互作用和流动规律.

在自然界和各种工程中, 流体的存在是很普遍的, 因而决定了流体力学应用的广泛性, 如在机械、动力、建筑、水利、化工、能源、航空、环境、生物等工程领域, 存在着大量的与流体运动有关的问题, 其中有一些是基础性的, 有一些是关键性的. 就某种意义上而言, 正是在流体力学问题的开发研究不断取得成果的前提下, 才促进了这些工程技术领域的大力发展. 反过来, 也正是在工程技术部门有许多重要的流体力学问题需要解决, 才使得流体力学学科不断发展.

目前, 解决流体力学问题的方法有实验、理论分析和数值方法等三种. 实验方法包括对流动现象的现场观测、实验室模拟和实验论证等内容, 通过实验方法能直接解决工程技术中的复杂流动问题, 能发现流动中的新现象和新原理, 实验结果可以用于检验理论分析或数值计算结果的正确性及应用范围; 理论分析方法包括对实际流动作适当简化, 建立正确的力学模型和恰当的数学模型, 运用数学物理方法寻求流动问题的精确或近似解析解, 明确地给出各种流动物理量之间普适的变化关系; 而数值方法目前是指利用计算机进行流动的数值模拟和数值计算. 为了使流体力学问题得到圆满解决, 三种方法相辅相成, 相互促进, 缺一不可.

1.1.3 流体质点与连续介质假设

流体力学主要是研究流体的宏观运动, 而研究途径有微观和宏观两种. 微观途径是从研究分子和原子的运动出发, 采用统计平均方法建立宏观物理量应满足的方程, 并确定流体的宏观性质. 这种途径取决于分子运动论的发展, 目前应用较少. 宏观的途径是先给流体建立一个宏观的“抽象化”的物质模型, 然后直接应用基本物理定律来建立宏观物理量应满足的方程, 并确定流体的宏观性质. 这是一条常用的途径, 其

基础就是流体质点与连续介质假设. 下面以密度这个宏观物理量为例来简单说明连续介质模型的建立.

如图 1-1(a)所示, 在某一时刻 t , 在流体中取一包含 $P(x, y, z)$ 点的微小体积 $\Delta\tau$, 在此体积内的流体质量为 Δm , 显然, $\Delta\tau$ 内流体的平均密度为 $\bar{\rho} = \Delta m / \Delta\tau$. 如果在同一时刻, 对包围 P 点的流场取大小不同的微小体积 $\Delta\tau$ 并测出相应不同的 Δm , 则会有不同的 $\bar{\rho}$, 结果如图 1-1(b)所示.

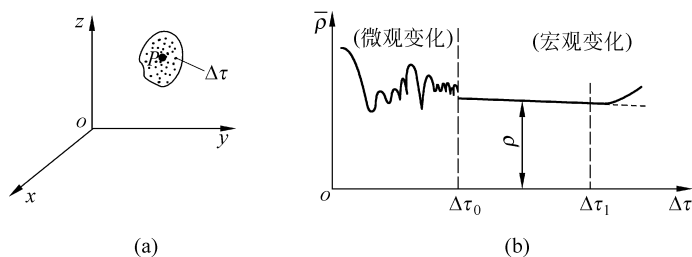


图 1-1 一点上密度的定义

当包围 P 点的微小体积 $\Delta\tau$ 趋向于某一极限体积 $\Delta\tau_0$ 时, $\bar{\rho}$ 将趋于一个确定的极限值 ρ , 而且该值不再因为 $\Delta\tau$ 的增大而发生变化, 说明此时流体的分子个性不起作用. 但是, 当体积 $\Delta\tau$ 缩小到小于 $\Delta\tau_0$ 时, $\bar{\rho}$ 将随机波动, 不再具有确定的极限值, 这是因为此时 $\Delta\tau$ 中所含有的分子数目太少, 分子随机进出 $\Delta\tau$ 对 Δm 产生了明显影响.

由此可见, 极限体积 $\Delta\tau_0$ 具有这样的特性: 它在宏观上必须足够小, 可以认为它是一个没有空间尺寸的几何点; 同时, 在微观上又必须足够大, 使得它包含足够多的分子数目, 分子的个别行为对宏观特性的影响可忽略不计. 这样在 $\Delta\tau_0$ 内进行空间和时间上的统计平均都具有确定的意义和数值.

在流体力学中, 把极限体积 $\Delta\tau_0$ 中所有流体分子的总体称为流体质点, 同时认为, 流体是一种由无限多连续分布的流体质点所组成的物质, 这就是流体的连续介质假设. 大量的实际应用和实验都证明, 在一般情况下, 基于连续介质假设而建立的流体力学理论是正确的.

对某一种实际流动能否按连续介质假设下的理论来研究, 有一个简单的判断式: $l \ll d \ll L$, 其中, d 就是前面所定义的极限体积的特征尺度, 例如, 取 $d = 10^{-3} \text{ cm}$, 则 $\Delta\tau_0 \approx 10^{-9} \text{ cm}^3$, 在 0°C 和标准大气压下, 在 10^{-9} cm^3 体积的气体中仍含有 2.7×10^{10} 个分子, 同样体积的液体中有 3×10^{13} 个分子. 由这么多分子构成一个体积足以得到与分子数无关的统计平均物理量; l 是所研究的流体分子运动的平均自由程, 在标准状态下, 气体的 l 约为 10^{-7} cm , 液体的 l 约为 10^{-8} cm ; L 则为所研究流动中, 宏观物理量将发生显著变化的特征长度, 例如, 所研究的是管道中的流动, 则特征长度可取管道直径或长度, 如果研究的是流体绕过物体的流动, 则可取物体的长度、宽度或高

度等作为特征长度.

由判断式可见,如果所研究的流动问题,其宏观物理量发生显著变化的空间尺度不小于 10^{-3}cm ,时间尺度不小于 10^{-6}s (保证分子间有足够多的碰撞次数),那么,采用连续介质假设应该是没有问题的,只是在某些特殊流动问题中,这个假设可能不成立.例如,在研究高空稀薄气体中的物体运动、血液在微细血管(直径 $<10^{-3}\text{cm}$)中的运动、冲击波(厚度 $<10^{-4}\text{cm}$)内气体的运动、微机电系统及纳米级器件中的流体力学问题时,就不能把流体看成是连续介质,此时必须考虑分子的运动特性,采用微观或者宏观与微观相结合的途径来研究.

本书只涉及基于流体质点和连续介质假设的流体力学理论及其问题.

1.1.4 流体物理量

根据连续介质假设,流体已抽象为一种在时间和空间上无限可分的连续体.通常把流体所占据的空间称为流场,那么,在流场中,任何瞬时和每一个空间点上都有一个而且只有一个流体质点存在,流体质点没有空间尺度但具有确定的宏观物理量,如密度、速度、压力和温度等.在流场中,它们都应该是空间和时间的连续函数,从而可以运用连续函数的解析方法来描述流体的宏观物理性质以及流体的平衡和运动规律.

1.2 流体的可压缩性与热膨胀性

1.2.1 流体的密度与比体积

单位体积的流体所具有的质量称为密度,常用 ρ 表示,其单位为 kg/m^3 . 根据连续介质假设,在流场中给定点上流体的密度是指该点上流体质点的密度,如上节所述, ρ 可以定义为

$$\rho = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta\tau} = \frac{dm}{d\tau},$$

它是空间位置及时间的连续分布函数,在直角坐标系中,有 $\rho = \rho(x, y, z, t)$.

如果已知在有限体积 τ 内的密度分布 ρ ,则微元体积 $d\tau$ 内的流体质量应为 $dm = \rho d\tau$,而 τ 内的流体总质量应为 $m = \int_{\tau} \rho d\tau$. 如果在同一时刻, τ 内的密度处处相同,则 $m = \rho\tau$.

密度的倒数称为比体积,即单位质量流体所占有的体积,常用 v 表示,则 $v = 1/\rho$,

或 $\rho v=1$,其单位为 m^3/kg .

在一些介质为液体的工程流体力学问题中,还常常用到重度与相对体积质量的概念.单位体积流体所具有的重量称为重度,用 γ 表示,在重力场中, $\gamma=\rho g$,其单位是 N/m^3 .流体的相对体积质量是该流体的重量与 4°C 同体积纯水重量之比,在重力场中,也就是该流体的密度与 4°C 同体积纯水密度之比,因此,相对体积质量又称相对密度,它是量纲为 1 的量.

密度 ρ 是流体力学中一个重要的物理标量.不同的流体有不同的密度;同一种流体,特别是气体的密度通常随压力和温度的变化而变化,换言之,不管流体运动与否,同一时刻、同一点上流体的密度 ρ 与压力 p 和温度 T 都应满足热力学平衡态的状态方程,即 $\rho=\rho(p,T)$. (见 3.5 节)

表 1-1 中列出了几种常见流体的密度.可以看到,在标准大气压下,277K 时纯水的密度为 $1000\text{kg}/\text{m}^3$,288K 时空气的密度为 $1.226\text{kg}/\text{m}^3$.

当流体是一种多组分的混合物时,例如,海水是水与各种溶解盐的混合物,锅炉烟气是一种混合气体等,密度还是各种组分浓度的函数.在研究流体运动规律时,通常把多组分的混合物折算成单一组分流体.本书只讨论单一组分的流体.

表 1-1 常见流体的密度(标准大气压下)

流体名称	温度/K	密度/ (kg/m^3)	流体名称	温度/K	密度/ (kg/m^3)
空气	273	1.293	纯水	277	1000
	288	1.226		293	998.2
	300	1.161		373	958.4
	380	0.586	水银	273	13595
水蒸气	400	0.554	汽油	288	725
	500	0.441	润滑油	300	884.1

1.2.2 流体的可压缩性与热膨胀性

流体在外力(主要是压力)作用下,其体积或密度发生变化的性质称为可压缩性,亦称体积弹性;而流体的体积或密度随温度改变的性质称为流体的热膨胀性.由于在一般情况下, $\rho=\rho(p,T)$,因此

$$\text{d}\rho = \frac{\partial \rho}{\partial p}\text{d}p + \frac{\partial \rho}{\partial T}\text{d}T = \rho B \text{d}p - \rho \beta \text{d}T,$$

其中, $\beta=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial T}=\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T}$,称为热体胀系数, $B=\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial p}=-\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p}$,称为等温压缩系数.

β 表示在一定压强下温度增加 1°C 时,流体密度的相对减小率或体积的相对膨胀

率. 不同流体的 β 值不同, β 值越大表示热体胀性越大, 一般而言, 气体的热体胀率比液体大.

B 表示在一定温度下压强增加一个单位时, 流体密度的相对增加率或体积的相对缩小率. B 的倒数就是流体的弹性体积模量(或体积弹性模量), 用 K 表示:

$$K = \frac{1}{B} = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho} = -v \frac{\partial p}{\partial v}, \quad (1-1)$$

显然, K 表示流体体积或密度产生相对变化所需的压强增量, K 与压强 p 的单位相同, 均为 N/m^2 (Pa).

K 是用来表征流体可压缩性最为方便的物理量. 不同流体的 K 值不同, K 越大则可压缩性越小. 同一种流体的 K 值随压强和温度的变化而变化. 对液体而言, K 值可通过实验确定. 实验表明液体的 K 值都很大, 且受压强和温度变化的影响很小, 几乎为定值, 可见液体是很难压缩的. 例如, 水的 K 值约为 $2.04 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, 当水压增加一个大气压强 ($1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$) 时, 其体积仅缩小 $1.013 \times 10^5 / K$, 约为万分之零点五. 对气体而言, K 值可按式(1-1)计算. 若将气体视为完全气体, 由状态方程 $p = \rho RT$ (见 3.5 节) 可知, 气体在等温压缩时, 其弹性体积模量 $K = p$, 即气体的 K 值不是常数, 而与压强成正比. 例如, 当气体处在标准大气压时, K 值约为 $1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, 如果此时气压等温增加 0.1 个大气压, 则其体积将缩小十分之一, 可见气体的可压缩性要比液体大得多.

1.2.3 不可压缩流体假设

严格地说, 任何流体都是可压缩的, 只是程度不同而已. 但是, 考虑可压缩性意味着密度 ρ 是一个变量, 这增加了处理问题的复杂性. 因此, 在流体力学中, 特别是在工程流体力学问题的处理中, 为了抓住主要矛盾, 使问题简化, 常常将可压缩性很小的流体近似地视为不可压缩流体, 简单地记作 $\rho = \text{常数}$, 这就是不可压缩流体假设.

运动中的流体是否可以假设为不可压缩, 不能简单地只看其 K 值的大小, 不妨把式(1-1)近似改写为

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \approx \frac{\Delta p}{K}. \quad (1-2)$$

如果要将密度视作常数, 则要求 $\Delta \rho / \rho \ll 1$, 通常要求 $\Delta p / p < 0.05$. 有两种状况可使条件满足, 一是流体的 K 值很大, 即使 Δp 并不很小, 但仍然保持流体的密度变化很小, 大多数液体的流动就属于这种状况. 因此, 通常将液体的流动视为不可压缩流动, 除非是在 Δp 特别大的状况, 例如水下爆炸、封闭管道中的水击现象等特殊问题. 另一种可能的状况是, 在研究的范围内, 运动流体中的压强变化 Δp 很小, 以至于 K 值并不太小时, $\Delta \rho / \rho$ 还是很小, 气体的大多数低速流动就属于这种状况. 理论和大量

实验都表明,对于那些压强的变化是由于流动速度的变化而引起的气体流动,例如,静止大气中的低速飞行物周围的流场、风绕过建筑物的流动以及变截面管道中气体的低速流动等问题,当流动速度小于 100m/s 时, $\Delta\rho/\rho$ 很小,此时可以忽略可压缩性,把低速气体流动视为不可压缩流动。

需要强调的是,严格地说,不可压缩流体和流体的不可压缩流动是两个概念.但只要是一种均质的不可压缩流体,两种提法都意味着密度 ρ 时时、处处为同一常数,都记作 $\rho=\text{常数}$ 。

此外,所有流体也都具有热体胀性.但在一般情况下,忽略可压缩性时也同时忽略热体胀性,除非流动主要是由于温度分布不均匀所造成的(如自然对流等)。

1.3 流体的粘性与导热性

1.3.1 流体的粘性

当两块平板沿接触面作相对滑动时,它们之间存在阻止滑动的摩擦力.在流体中,当相邻的两层流体之间存在相对运动时,也会产生平行于接触面的剪切力,运动快的流层对运动慢的流层施以拖曳力,运动慢的流层对运动快的流层施以阻滞力,这一对力大小相同、方向相反,是一种内摩擦力。

流体所具有的抵抗两层流体相对滑动或剪切变形的性质称为流体的粘性或粘滞性.换言之,流体的粘性是一种在流体中产生内摩擦力的性质,因此,通常称流体中的内摩擦力为粘性剪切力.粘性的作用表现为阻滞流体内部的相对滑动,这是流体粘性的重要特征。

1.3.2 牛顿粘性定律

在自然界,流体的粘滞现象随处可见,也很容易在实验室中演示.如图 1-2 所示,两块表面积为 A 、水平放置的平行平板间充满某种流体(例如水或油),两板间距为 h ,下板固定不动,上板在力 F 的作用下沿 x 方向以等速度 U 平移.由于流体的粘性,流体与平板间存在附着力,与上板接触的流体粘附于上板,并与上板同速移动,而与下板接触的流体粘附于下板亦固定不动.只要两板间距 h 和平移速度 U 都选择得恰当地小,那么,两板间的各流体薄层将在上板的带动下,一层带一层地作平行于平板的流动,其流动速度如图 1-2 所示,由上及下逐层递减而呈线性分布: $u=u(y)$ 。

上述实验表明,使上板平移的外力 F 的大小与平移速度 U 以及平板表面积 A 成

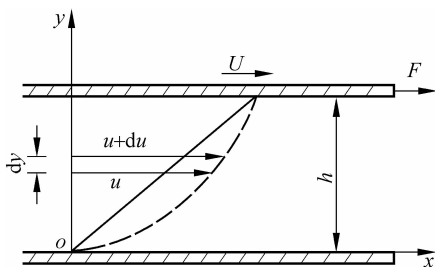


图 1-2 流体粘性实验

正比,而与两板间距 h 成反比,即

$$F \propto \frac{AU}{h}.$$

牛顿通过大量的实验,把结果总结为一个数学表达式

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}. \quad (1-3)$$

这就是著名的牛顿粘性定律,也称牛顿内摩擦定律.当两板间流体速度分布可以近似假定为线性分布时, $\tau = F/A$, $du/dy = U/h$. 式(1-3)中, τ 是作用在单位接触面积流体上的内摩擦力,称为粘性切应力, du/dy 称为速度梯度或剪切应变率, μ 称为动力粘度或动力粘性系数.

式(1-3)适用于有粘性流体的一维平行层状流动.在 3.4 节中,将把它推广到粘性流体的任意流动状态.

1.3.3 流体的粘度

流体的动力粘度 μ 是由流体本身固有的物理性质所决定的量,其值是流体粘性大小的一种直接度量,也是流体在运动中抵抗剪切变形能力强弱的一种度量.在相同的环境条件下, μ 大表示粘性大,反之亦然, μ 的单位是 $\text{Pa} \cdot \text{S}$,即 $\text{N} \cdot \text{S}/\text{m}^2$.

不同流体的 μ 值不同, μ 值主要通过实验或专门的粘度计测量给出,同一种流体的 μ 值一般随压力和温度的不同而变化.实验表明,压力的变化对 μ 的影响较小,在低于 10 个大气压的变化范围内,压力变化的影响可忽略不计.但温度的变化对 μ 的影响较大,而且液体和气体的动力粘度 μ 随温度的变化呈现出相反的趋势,液体的动力粘度随温度的升高而减小,气体的动力粘度随温度的升高而增大.已有不少的实验曲线、图表和经验公式给出动力粘度 μ 随温度变化的结果,例如,纯水的动力粘度与温度的经验关系式为

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + 0.0337t + 0.000221t^2},$$

其中 $\mu_0=1.792\times10^{-3}\text{ Pa}\cdot\text{S}$,是纯水在 $t=1^\circ\text{C}$ 时的动力粘度. 在小于 10 个大气压的低压情况下,气体的动力粘度与温度的经验关系式为

$$\mu = \mu_0 \frac{273 + C}{T + C} \left(\frac{T}{273} \right)^{3/2},$$

其中, T 是气体的热力学温度(K), C 是按气体种类给出的常数, μ_0 是气体在 $T=273\text{K}$ 时的动力粘度. 对于空气, $C=111, \mu_0=1.71\times10^{-5}\text{ Pa}\cdot\text{S}$.

在流体力学中,除了动力粘度 μ 之外,还常用到运动粘度 ν ,它定义为: $\nu=\mu/\rho$,单位是 m^2/s . 运动粘度没有明确的物理意义, ν 的大小不是流体粘性大小的直接度量,它的引入只是为了公式书写简便而已. 不过,我国现行的机械油牌数与运动粘度有关联,比较粗略地说,所谓的 $\times\times$ 号机械油就表示该机械油在 50°C 时的运动粘度约为纯水在 20.2°C 时运动粘度的 $\times\times$ 倍.

表 1-2 给出的是一些常见流体的动力粘度和运动粘度值,从表中可以看到,液体的动力粘度都要比气体大,但对于常见的水与空气,动力粘度都不大.

表 1-2 几种常见流体的粘度

流体	温度/K	动力粘度 $\mu/(\text{Pa}\cdot\text{S})$	运动粘度 $\nu/(\text{m}^2/\text{s})$
空气	300	1.846×10^{-5}	1.590×10^{-5}
水蒸气	400	1.344×10^{-5}	2.426×10^{-5}
水	293	1.005×10^{-3}	1.007×10^{-6}
水银	300	1.532×10^{-3}	1.113×10^{-7}
汽油	293	0.310×10^{-3}	4.258×10^{-7}
润滑油	300	0.486	0.550×10^{-3}

1.3.4 牛顿流体与非牛顿流体

式(1-3)表示了粘性流体作一维平行剪切流动时,流体中的粘性切应力与剪切应变率成线性关系. 但大量实验又表明,在同样的流动状况下,并不是所有的流体都能满足这个牛顿粘性定律. 在流体力学中,通常把能服从牛顿粘性定律的流体称为牛顿流体,而把有粘性但不服从牛顿粘性定律的流体称为非牛顿流体. 在自然界和工程中,常见的水、空气、水蒸气、各种气体和润滑油等都属于牛顿流体,但牛奶、蜂蜜、油脂、油漆、高分子聚合物溶液、水泥浆和动物血液等则属于非牛顿流体. 本书只涉及牛顿流体.

1.3.5 无粘性流体的假设

一切真实的流体都具有粘性,但流体力学的发展史和应用实践表明,并不是所有的流体力学应用问题都必须考虑流体的粘性.根据式(1-3),当流体的动力粘度很小而运动的速度梯度不大,或者当运动的速度梯度很小而流体的动力粘度不大时,流体中的粘性切应力就很小(或者与其他的作用力相比将是比较小的),此时,往往可以忽略其粘性效应.这种在流动中忽略粘性效应的流体称为无粘性流体或理想流体,此时可以简单地令流体的动力粘度 $\mu = 0$.把粘性流体假设为无粘性流体,即用理想流体替代真实流体,将使问题的处理变得简单,因而可以比较容易地得到流动的基本规律.对于一些实际流动,如液体表面波、不脱体绕某个物体流动的压力分布及产生的升力等问题的研究中,用无粘性流体假设所得到的结果具有足够的精确度,但是,用无粘性流体的假设不能解释流动中的阻力以及能量损失实质等问题.

对于那些粘性效应不能忽略的流动问题,比较简单而实用的处理方法就是先假设流体无粘性,在得到流动的基本规律后,再用近似理论或实验方法对粘性效应进行补偿和修正.

1.3.6 流体的导热性

流体中的传热现象主要以三种方式进行:热辐射、热对流和热传导.热辐射是通过电磁波在流体中产生热量,在绝大多数流动问题中可以不考虑热辐射,在少数确实存在热辐射的流动中,往往把它作为已知的热源项处理.热对流是由于流体宏观运动产生的热量迁移,它分自然对流和强迫对流两种.只有热传导是流体固有的物理性质,它是由于流体分子的热运动所产生的热能的输运现象.

无论流体运动与否,当流体中的温度分布不均匀时,由于分子的热运动,流体的热能从温度高的一层流体向温度低的一层流体输运,这种热能的输运性质称为流体的导热性.

表征流体导热性的物理定律就是傅里叶(Fourier)热传导定律,其数学表达式为

$$\mathbf{q} = -k \nabla T, \quad (1-4)$$

式中, $\mathbf{q}$ 是单位时间内通过单位面积流体的热量(又称热流密度矢量); ∇T (或写成 $\text{grad}T$) 称为温度梯度,它也是一个矢量; k 称为流体的导热系数,或热导率,一般流体的导热性是各向同性的,因而它是一个标量;式中负号表示热量的流向与温度梯度的方向相反.热流密度的单位是 $\text{W}/\text{m}^2 = \text{J}/(\text{s} \cdot \text{m}^2)$,温度梯度的单位是 K/m ,因而导热系数的单位是 $\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$.

当流体中的温度分布为一维时,例如 $T = T(y)$,则式(1-4)简化为一维的热传导

定律

$$q_y = -k \frac{dT}{dy}.$$

不同的流体,导热系数 k 值也不同,同一种流体的 k 值一般随压力和温度的不同而变化,它的值通过实验来测定.

通常情况下,液体的导热性要比气体好.但在大多数流动问题中,由于流动中的温度梯度较小,或者是由于流动速度较快、流体来不及进行热传导等原因,常常可以忽略导热性,此时简单地令导热系数 $k = 0$. 忽略导热性的流体(流动)称为绝热流体(流动). 对于假定为无粘性不可压缩的流体,它也必定可以假定为绝热流体,无粘性绝热流体的流动必定是等熵流动.

1.4 流体运动的两种描述方法及互相转换

在 1.1 节中提到通常把充满运动流体的空间称为流场.

根据流体的连续介质假设,在流场中,任一时刻、任一空间点上,总有且只有一个流体质点存在,即一个空间点对应一个流体质点. 因此,描述流体运动就有两种不同着眼点的方法,分别称为拉格朗日(Lagrange)描述法和欧拉(Euler)描述法.

1.4.1 拉格朗日描述法

这是一种着眼于流体质点的描述方法. 通过对各流体质点的运动规律(也就是它们的位置随时间变化的规律)的观察来确定整个流场的运动规律. 由于整个流场是由无数密集分布的流体质点所组成,因此,采用这种描述法时,首先必须用某种编号方法来区别不同的流体质点. 因为每一时刻,每一个流体质点都占有惟一确定的流场空间位置,因此通常利用初始时刻 $t = t_0$ 时,流体质点所处的空间坐标 (a, b, c) 作为区分不同流体质点的标号参数. 在人为选定的某种空间坐标系中,一个流体质点只有一组固定不变的 (a, b, c) 值,即不同的 (a, b, c) 值代表不同的流体质点. 有了流体质点的标号参数后,其运动规律若用矢量形式给出,则为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(a, b, c, t), \quad (1-5)$$

式中, $\mathbf{r}$ 是流体质点的位置矢径; (a, b, c) 称为拉格朗日变数或随体坐标. 式(1-5)可在选定的空间坐标系中写成标量形式,例如,在直角坐标系中有

$$\left. \begin{aligned} x &= x(a, b, c, t), \\ y &= y(a, b, c, t), \\ z &= z(a, b, c, t), \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

式(1-6)中的 (a, b, c) 就是指 $t=t_0$ 时 $(x, y, z)=(a, b, c)$.

在拉格朗日描述中,流体质点所具有的任一物理量 B (如速度、压力、密度、温度等)都将表示为

$$B = B(a, b, c, t). \quad (1-7)$$

给出或者求得式(1-5)~式(1-7)这样的表达式是拉格朗日描述法的关键所在.

1.4.2 欧拉描述法

这是一种着眼于流场空间点的描述方法. 通过在流场中各个固定空间点上对流动的观察,来确定流体质点经过该空间点时其物理量的变化规律. 在同一个空间点上,虽然在不同的时刻被不同的流体质点所占据,空间点上的物理量随时间变化,但所观察到的物理量总是与该空间点位置相联系的. 如果在所有不同的空间点上进行同样的观察,就可以获得整个流体物理量的空间分布及变化规律. 显然,采用欧拉描述法时,流体质点的物理量 B 都将表示为空间坐标和时间的函数:

$$B = B(\mathbf{r}, t) = B(q_1, q_2, q_3, t), \quad (1-8)$$

式中, (q_1, q_2, q_3) 称为欧拉变数或空间坐标, $\mathbf{r}$ 是空间坐标点的矢径. 在直角坐标系中, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$, 于是

$$B = B(x, y, z, t), \quad (1-9)$$

式(1-8)或式(1-9)表示了 t 时刻流场各物理量的分布函数,它们所构成的是一个物理量的场,例如,速度场、加速度场、压力场和密度场等.

给出或者求得各物理量的分布函数是欧拉描述法的关键所在. 对于运动流体来说,最关键的物理量是速度场 $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$. 在直角坐标系中,习惯将 $\mathbf{V}$ 写成 $\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$, 于是 $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$, 或者

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y, z, t), \\ v &= v(x, y, z, t), \\ w &= w(x, y, z, t). \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

1.4.3 拉格朗日描述法与欧拉描述法之间的联系

两种描述法只是着眼点不同,实质上是等价的. 如果标号参数为 (a, b, c) 的流体质点,在 t 时刻正好到达 (x, y, z) 这个空间点上,则有

$$B = B(x, y, z, t) = B[x(a, b, c, t), y(a, b, c, t), z(a, b, c, t), t] = B(a, b, c, t). \quad (1-11)$$

可见两者描述的是同一种流动,这说明两种描述法之间存在联系,可以互相转换(见1.5.3节).

1.5 质点的随体导数

在流体力学问题中,经常要求解流体质点的物理量随时间的变化率,这种变化率称为质点的随体导数,也称为物质导数或质点导数.顾名思义,随体导数就是跟随流体一起运动时所观察到的流体物理量随时间的变化率.

1.5.1 拉格朗日描述中的随体导数

在拉格朗日描述中,流体质点的物理量表示为 $B=B(a,b,c,t)$,其随体导数很直观,就是 B 对时间的偏导数: $\partial B/\partial t$. 因为 (a,b,c) 与时间 t 无关,所以, $\partial B/\partial t = dB/dt$. 例如,在拉格朗日描述中,流体速度 $\mathbf{V}$ 就是质点的位置矢径 $\mathbf{r}$ 对时间的偏导数

$$\mathbf{V}(a,b,c,t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(a,b,c,t). \quad (1-12)$$

流体加速度 $\mathbf{a}$ 则为 $\mathbf{V}$ 对时间的偏导数

$$\mathbf{a}(a,b,c,t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}(a,b,c,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{r}(a,b,c,t). \quad (1-13)$$

在直角坐标系中,式(1-12)和式(1-13)可写成

$$\left. \begin{aligned} u(a,b,c,t) &= \frac{\partial x(a,b,c,t)}{\partial t}, \\ v(a,b,c,t) &= \frac{\partial y(a,b,c,t)}{\partial t}, \\ w(a,b,c,t) &= \frac{\partial z(a,b,c,t)}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$

和

$$\left. \begin{aligned} a_x(a,b,c,t) &= \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \\ a_y(a,b,c,t) &= \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \\ a_z(a,b,c,t) &= \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

1.5.2 欧拉描述中的随体导数

在欧拉描述中,任一流体物理量 B 在直角坐标系中表示为 $B=B(x,y,z,t)$,这里的 (x,y,z) 可以有双重意义,一方面它代表流场的空间坐标,另一方面它又代表 t

时刻某个流体质点的空间位置. 根据随体导数的定义, 从跟踪流体质点的角度看, x, y, z 应视为时间 t 的函数. 因此, 物理量 B 随时间的变化率为

$$\frac{DB(x, y, z, t)}{Dt} = \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial t}.$$

利用式(1-14), 上式为

$$\frac{DB}{Dt} = u \frac{\partial B}{\partial x} + v \frac{\partial B}{\partial y} + w \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (1-16)$$

式(1-16)可以写成与坐标系无关的矢量表达式

$$\frac{DB}{Dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) B, \quad (1-17)$$

其中, $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)$, $\frac{D}{Dt}$ 称为随体导数或全导数; $\frac{\partial}{\partial t}$ 称为局部导数或当地导数, 表示流场的非定常性, 如果流动是定常的, 则有 $\frac{\partial}{\partial t} = 0$; $(\mathbf{V} \cdot \nabla)$ 称为迁移导数或位变导数, 表示流场的非均匀性, 如果 $\nabla B = 0$, 则表示 B 场是均匀的. ∇ 称为哈密顿 (Hamilton) 算子, 它具有矢量和微分的双重性质, 在直角坐标系中, $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$.

根据式(1-17), 在欧拉描述中, 流体质点的加速度 $\mathbf{a}$ 为

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}. \quad (1-18)$$

式(1-18)说明, 在流场的欧拉描述中, 流体质点的加速度由两部分组成: 第一部分 $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$ 称为局部加速度或当地加速度, 它表示在同一空间点上流体速度随时间的变化率, 对于定常速度场, 有 $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = 0$; 第二部分 $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$ 称为迁移加速度或位变加速度, 它表示在同一时刻由于不同空间点的流体速度差异而产生的速度变化率, 对均匀的速度场, 有 $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = 0$.

在直角坐标系中

$$\mathbf{a}(x, y, z, t) = \frac{D\mathbf{V}(x, y, z, t)}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}, \quad (1-19)$$

或写成分量形式

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \\ a_y &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \\ a_z &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (1-20)$$

式(1-18)在柱坐标系和球柱坐标系中的表达式见附录Ⅱ。

1.5.3 拉格朗日描述法与欧拉描述法的互相转换

拉格朗日描述法与欧拉描述法之间具有联系,可以互相转换。

1. 由拉格朗日描述转换为欧拉描述

在直角坐标系中,这个转换过程可以归结为:已知流体质点的运动规律

$$\left. \begin{aligned} x &= x(a, b, c, t), \\ y &= y(a, b, c, t), \\ z &= z(a, b, c, t), \end{aligned} \right\} \quad (1-21)$$

以及流体物理量的拉格朗日描述 $B = B(a, b, c, t)$, 求流体物理量的欧拉描述 $B = B(x, y, z, t)$ 。

对于式(1-21), 如果其函数行列式满足下列关系:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ 或 } \infty,$$

则可以从式(1-21)反解得到

$$\left. \begin{aligned} a &= a(x, y, z), \\ b &= b(x, y, z), \\ c &= c(x, y, z), \end{aligned} \right\} \quad (1-22)$$

把式(1-22)代入 $B = B(a, b, c, t)$ 即完成了转换。

当式(1-21)在形式上比较简单时,这种转换也就比较容易。

例 1.1 已知一平面流动的拉格朗日描述为

$$x = ae^t, \quad y = be^{-t}, \quad (1)$$

求流动速度和加速度的欧拉描述。

解 从已知条件可见,在本例中, $t=0$: $(x, y) = (a, b)$, 根据式(1-14)和式(1-15),该流动的速度和加速度的拉格朗日描述为

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} = ae^t, \quad v = \frac{\partial y}{\partial t} = -be^{-t}, \quad (2)$$

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} = ae^t, \quad a_y = \frac{\partial v}{\partial t} = be^{-t}, \quad (3)$$

按求解程序,首先要计算式①的函数行列式以判别是否存在单值解。

因为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{vmatrix} = 1 \quad (\neq 0, \infty)$$

所以,可反解得到

$$a = xe^{-t}, \quad b = ye^t. \quad (4)$$

本例中,式①很简单,不通过上述程序也立即可得式④.

将式④代入式②和式③,即可得速度和加速度的欧拉描述

$$u = x, \quad v = -y, \quad (5)$$

$$a_x = x, \quad a_y = y, \quad (6)$$

式⑥也可以从式⑤出发,根据随体导数公式(1-20)来计算.

2. 由欧拉描述转换为拉格朗日描述

这种转换的最典型过程就是已知在直角坐标系中,流动的速度场(也就是欧拉描述)为: $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$, 或者已知: $u = u(x, y, z, t)$, $v = v(x, y, z, t)$, $w = w(x, y, z, t)$ 和 $B = B(x, y, z, t)$, 求流体质点的运动规律及 $B = B(a, b, c, t)$.

根据式(1-12)或式(1-14),流体质点的速度为 $\mathbf{V} = d\mathbf{r}/dt$, 或者

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u(x, y, z, t), \\ \frac{dy}{dt} &= v(x, y, z, t), \\ \frac{dz}{dt} &= w(x, y, z, t), \end{aligned} \right\} \quad (1-23)$$

在 u, v, w 已知的情况下,式(1-23)构成一个一阶的常微分方程组.

求解后可得

$$\left. \begin{aligned} x &= x(c_1, c_2, c_3, t), \\ y &= y(c_1, c_2, c_3, t), \\ z &= z(c_1, c_2, c_3, t), \end{aligned} \right\} \quad (1-24)$$

式中的 c_1, c_2, c_3 为积分常数,它们应由初始条件来确定. 若设 $t = t_0$ (可根据需要自定,通常设 $t = 0$) 时, $(x, y, z) = (a, b, c)$, 即设

$$\left. \begin{aligned} a &= x(c_1, c_2, c_3, t_0), \\ b &= y(c_1, c_2, c_3, t_0), \\ c &= z(c_1, c_2, c_3, t_0), \end{aligned} \right\} \quad (1-25)$$

解式(1-25)可得

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= c_1(a, b, c, t_0), \\ c_2 &= c_2(a, b, c, t_0), \\ c_3 &= c_3(a, b, c, t_0). \end{aligned} \right\} \quad (1-26)$$

把式(1-26)代入式(1-24)即得到欧拉变数与拉格朗日变数之间的关系式

$$\left. \begin{aligned} x &= x(a, b, c, t), \\ y &= y(a, b, c, t), \\ z &= z(a, b, c, t). \end{aligned} \right\} \quad (1-27)$$

这就是流体质点的运动规律,也就是运动的拉格朗日描述. 只要把式(1-27)代入 $B=B(x, y, z, t)$ 就完成了转换. 在上述的转换过程中,获得一阶常微分方程组式(1-23)的解析解是关键所在.

例 1.2 已知一平面流动的速度分布(即欧拉描述)为

$$u = x + t, \quad v = -y - t, \quad (1)$$

和初始条件: $t=0$ 时 $(x, y)=(a, b)$, 求流动速度和加速度的拉格朗日描述.

解 根据式(1-23),有

$$\frac{dx}{dt} = x + t, \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y - t, \quad (3)$$

在本例中,式②和式③为各自独立的一阶常微分方程,可分别求解得到

$$\left. \begin{aligned} x &= c_1 e^t - t - 1, \\ y &= c_2 e^{-t} - t + 1. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

根据已知的初始条件: $t=0$ 时 $(x, y)=(a, b)$, 即得

$$c_1 = a + 1, \quad c_2 = b - 1, \quad (5)$$

代入式④得

$$\left. \begin{aligned} x &= (a + 1)e^t - t - 1, \\ y &= (b - 1)e^{-t} - t + 1. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

这是流体质点的运动规律,也就是流动拉格朗日描述的关键表达式.

若要求速度和加速度的拉格朗日描述,可对式⑥直接求偏导得到

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} = (a + 1)e^t - 1, \quad v = \frac{\partial y}{\partial t} = -(b - 1)e^{-t} - 1,$$

$$a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = (a + 1)e^t, \quad a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (b - 1)e^{-t}.$$

需要强调的是,拉格朗日描述法与欧拉描述法是同一种流动的两种描述法,在解决具体流动问题时,一般只要选择其中一种即可. 在流体的连续介质假设下,采用欧拉描述法要比拉格朗日描述法优越,其原因有三条:一是欧拉描述法表示的是物理量的场,便于采用场论这一数学工具来研究;二是采用欧拉描述法时,流动加速度是

一阶导数,而采用拉格朗日描述法时变为二阶导数,换言之,采用欧拉法描述控制流体运动的偏微分方程组要比采用拉格朗日描述法低一阶,相应的边界条件和数学处理会变得容易一些;三是在大多数的工程实际流动中,并不关心每一个流体质点的来龙去脉,如果有的问题一定要求出每一个流体质点的运动规律,那么,只要在得到速度分布后,通过从欧拉描述到拉格朗日描述的转换即可。

本书在以后的内容中,若没有特别说明,均采用欧拉描述法。

1.6 迹线与流线、流管与流量

在表示流场的理论分析、实验或数值计算结果时,常常采用直观形象的几何图像来描述,其中用得最多的是迹线、流线和脉线。

1.6.1 迹线

迹线是流体质点在流场中运动的轨迹,也就是流体质点运动位置的几何表示。显然,迹线的概念是着眼于流体质点,因此,采用拉格朗日描述法时,质点的位置矢径表达式: $\mathbf{r}=\mathbf{r}(a,b,c,t)$,或在直角坐标系中的分量表达式:

$$x = x(a,b,c,t), \quad y = y(a,b,c,t), \quad z = z(a,b,c,t),$$

就是流体质点迹线的参数方程。例如,在例 1.1 中, $x=ae^t$, $y=be^{-t}$, 就表示了 $t=0$ 时位于 (a,b) 点上的流体质点的运动轨迹。在本例中可消去 t , 则得: $xy=ab$, 说明在此流动中,流体质点的迹线是一条平面双曲线,凡是 $t=0$ 时位于 (a,b) 点上的流体质点都将沿此双曲线运动。

当流动采用欧拉描述时,求流场中迹线的过程就是从欧拉描述转换为拉格朗日描述的过程。因此,迹线的微分方程可表示为

$$d\mathbf{r} = \mathbf{V}dt, \quad (1-28)$$

式中, $d\mathbf{r}$ 是迹线上的微元弧长矢量, $\mathbf{V}$ 是在欧拉描述下的速度矢量。

在直角坐标系中,式(1-28)可以写成

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u(x,y,z,t), \\ \frac{dy}{dt} &= v(x,y,z,t), \\ \frac{dz}{dt} &= w(x,y,z,t), \end{aligned} \right\} \quad (1-29)$$

或者

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t)} = \frac{dz}{w(x,y,z,t)} = dt. \quad (1-30)$$

只要注意到式(1-28)~式(1-30)中,应把 x, y, z 都看成是 t 的函数,通过求解常微分方程组就可以得到迹线的代数表达式.

1.6.2 流线

流线是流场中这样的一条曲线:某一时刻,位于该曲线上的所有流体质点的运动方向都与这条曲线相切.显然,流线是流体运动速度分布的几何表示.流线的微分方程可表示为

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{V} = 0, \quad (1-31)$$

式中, $\mathbf{V}$ 为某一时刻 t 、流场中任一点处的速度矢量, $d\mathbf{r}$ 为通过该点的流线上的微元弧长矢量,根据流线的定义, $d\mathbf{r} // \mathbf{V}$, 故得式(1-31).

在直角坐标系中, $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$, $\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$, 因而有

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t)} = \frac{dz}{w(x,y,z,t)}. \quad (1-32)$$

这是 t 时刻流线的微分方程,积分后就是流线方程.需要指出的是,流线是对同一时刻而言的,因此,式(1-32)在积分时,应将时间 t 看成常数(参变量).

例 1.3 已知一平面流动的速度分布为

$$u = -y + t, \quad v = x, \quad (1)$$

求: (1) $t=0$ 时,过平面(1,1)点的流体质点的迹线;

(2) $t=0$ 时,过平面(1,1)点的流线,并以图示之.

解 (1) 由迹线微分方程式(1-29)得

$$\frac{dx}{dt} = -y + t, \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dt} = x. \quad (3)$$

和例 1.2 不同,在本例中,式②和式③是互相耦合的,不能各自独立求解.通过式③两边再对 t 求导一次,并用式②代入,可得到

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = t. \quad (4)$$

这是一个二阶线性非齐次的常微分方程,其解为

$$y = c_1 \sin t + c_2 \cos t + t, \quad (5)$$

再由式③得

$$x = c_1 \cos t - c_2 \sin t + 1. \quad (6)$$

对于 $t=0$ 时,过(1,1)点的流体质点,可得积分常数 $c_1=0, c_2=1$, 则所求迹线

(参数)方程为

$$\begin{cases} x = 1 - \sin t, \\ y = \cos t + t, \end{cases} \quad (7)$$

或者化为

$$(1-x)^2 + (y-t)^2 = 1. \quad (8)$$

(2) 由流线微分方程式(1-32)得

$$\frac{dx}{-y+t} = \frac{dy}{x}, \quad (9)$$

即

$$x dx = (t-y) dy.$$

由于上式积分时,将 t 看作常参数,因此有

$$x^2 + (y-t)^2 = c, \quad (10)$$

式中 c 是积分常数,由某时刻流线上通过的已知点位置来确定.不同的常数代表同一时刻过不同点的流线,因此,同一时刻,整个流场中将会有无数多条流线(流线簇)构成流动图景,称为流谱.对于本例所求的 $t=0$,由式⑩得到: $x^2 + y^2 = c$,说明在本例中, $t=0$ 时流场中的流谱是如图1-3所示的以原点为中心的同心圆簇.

对于过(1,1)点的流线,则根据式⑩,由 $(x,y)=(1,1)$ 的条件可以得到 $c=1+(1-t)^2$,于是流线为 $x^2 + (y-t)^2 = 1+(1-t)^2$,说明该流动中,过(1,1)点的流线随时间 t 而变化.

对于 $t=0$ 时,过(1,1)点的流线,则为: $x^2 + y^2 = 2$ 的这条流线,该线为图1-3中的实线.在画流线时,要同时画上流动方向,否则就会失去画流线的意义.如果把连续的流线改用带箭头的间断短线来表示的话,还可以用短线的长度和密集程度来表示各点上速度的大小与变化.

由流线与迹线的定义及其微分方程式并结合例1.3,可见流线具有下列特性:

(1) 在某一时刻,过某一空间点只能有一条流线,这称为流线的惟一性.换言之,

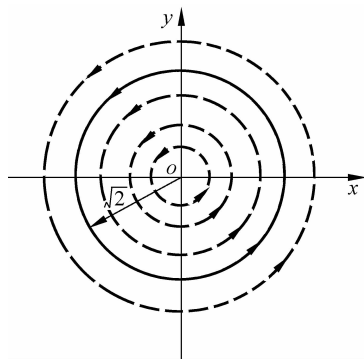


图1-3 流线簇

在一般情况下,流线不能相交或分支.这是因为流场中的速度具有单值性,即在某一时刻、某一点上只能有一个流体速度的大小与方向.但在流体的连续介质假设下,允许流场中在孤立的点、线、面上存在物理量的不连续,因此,流场中可能会出现三种使流线相交或分支的点,一是速度为零的点,称为驻点;二是速度趋于无穷大的点,称为奇点;三是一种使流线相切的点,即在该点上有两个方向相同而大小不同的流体速度,称为速度的间断点.