第0章 引言

在今天, 概形理论已经是整个代数几何的基础和语言。概形理论的建立至少有两个动因: 一是建立一种适合于研究数论的几何, 因此考虑一般的交换环而不仅仅是域上的代数; 二是将微分引入到函数中, 因此允许环中有幂零元。

但是, 迄今为止代数几何的核心课题是代数簇, 它是建立在域上的, 而且没有幂零函数。这使得很多人对于使用概形的理由难以理解, 一些人 (包括一些专家) 甚至认为概形理论没什么用, 主张学生不要学。

如果不是很深入地理解概形, 可能只是看到它是原有几何“空间”概念的推广。其实不然, 至少我们可以举出概形的两个非常重要的具体意义, 一是模空间理论, 二是群概形。

模空间理论自黎曼开始, 黎曼建立的椭圆曲线的模空间是复解析空间, 尚无幂零函数, 也没有建立在 $\mathbb{Z}$ 上。它的点代表复数域上的椭圆曲线, 可以理解为丢番图方程, 由此可以理解其有理数解, 但离其整数解仍很遥远。要研究丢番图方程的整数解, 至少也要理解其“模素数 p”的解, 这已经超出复数的范围。而今天的模空间理论已经可以建立在 $\mathbb{Z}$ 上, 故更直接地适用于数论。另一方面, 离开幂零函数就不可能有无穷小变形理论, 而无穷小变形是一个强大的工具, 对于模空间尤其如此。

将概形应用到群论, 则不仅是给出强有力的工具, 而且**发现**了一个自然的事实, 即“无穷小群”的存在。如果简单地考虑带有代数几何结构的群, 就得到“群簇”的概念, 而如果仅考虑特征 0 的域, 则任何群概形都是约化的, 所以只研究群簇也就够了; 但在特征 $p > 0$ 的域上, 一个群概形不一定是约化的, 甚至可能只有一个点但有不平凡的切空间, 这就是所谓“无穷小群”。那么, 是否可以避开不约化的情形而仅考虑群簇呢? 如果这样做, 我们就不能建立“对偶性” (这可以理解为将有限阿贝尔群的对偶理论几何化), 例如 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 的群簇结构的对偶就是无穷小群。我们知道, 对偶性是数学中最基本和重要的原理之一, 因此回避无穷小群是不明智的。

我们下面讨论的课题既要涉及群概形, 又要涉及模空间, 因此概形的上述具体意义都将展现出来。

群概形的历史至少可以追溯到 19 世纪中期的椭圆函数、格、椭圆曲线、模形式等。一百多年的发展, 使该领域有极为丰富的内容, 且与其他领域有极为深刻的联系。就其研究课题而言, 至少有线性群簇、阿贝尔簇、平展群概形、无穷小群、群概形的作用和表示、商空间、齐性空间、皮卡概形、阿尔巴内塞簇、丢多涅模、自同构群概形、分类与模空间、志村簇等, 而与其有深刻联系的领域包括代数、数论、李群与李代数、代数几何、复几何、动力系统甚至数学物理。

粗糙地说, 群概形是有代数几何结构的群, 因此在研究中需要兼顾其群结构与几何结构, 以及它们之间的联系。在群论中, 表示是基本的研究方法和工具, 也是联系群与其应用的基本桥梁, 而表示与作用是等价的。在群概形理论中, 作用同样是基本的研究方法和工具, 也是联系群概形与其应用的基本桥梁; 但有所不同的是, 表示与作用一般不等价, 因为自同构群未必有适当的群概形结构 (详见例 Ⅸ.1.2), 因此本书的主题是群概形及其作用, 而不是群概形及其表示, 尽管有时表示也是有意义的。

本书各章节的内容及其相互关联简述如下:

基本的预备知识为代数几何基础, 学过 Hartshorne [H] 的 I-Ⅲ 章基本够了, 若学过 [EGA] 当然更好。对于 [H] 中缺乏或不够深入的内容, 在第 I 章中做了一个较系统的整理作为补充, 包括纤维丛 (平坦性、光滑性、预层的语言、有理映射等), 微积分 (高阶微分、导数与微分算子、外微分与德拉姆复形等), 射影概形的希尔伯特多项式 (一般及多个可逆层的希尔伯特多项式、次数公式、半连续性与消失定理等), 除子与相交类 (除子族及其性质、线性系、泛除子、相交类的基本性质等)。

第 Ⅱ 章为群概形、同态、核、作用、安定子等基本概念, 方法基本上是初等的, 但也有一些较深入的结果 (如引理 1.3, 引理 1.4, 引理 1.6 等)。

第 Ⅲ 章系统地讲群概形的微积分和群概形作用的微积分, 这是基本的和强有力的工具。第 1 节为群概形的微积分, 包括不变微分、李代数与不变微分算子环等, 由此即可得到一些较深入的结果; 第 2 节为群概形作用的微积分, 包括群概形作用诱导的典范微分层同态、李代数同态、微分算子环同态、德拉姆复形等; 第 3 节为切丛与诱导作用, 定义了环概形、模概形并给出广义切丛作为模概形的基本性质, 然后给出群概形的作用在切丛上诱导的线性作用; 第 4 节为关于交换群概形的较深入讨论。

群概形对模空间理论的建立有重要的作用,而且很多模空间具有群概形结构;另一方面,模空间也是研究群概形的重要和强有力工具。因此,我们用一章(第 Ⅳ 章)系统地讲模空间理论的基础。其中第 1 节讲模空间的基本概念和思想,并举例说明如何应用;第 2 节讲希尔伯特概形;第 3 节讲变形的概念、变形与模空间的联系,并举例说明变形理论的强大。后面各章都或多或少地用到模空间的方法和思想。

商的存在性和构造是代数几何中重要而困难的问题,在群概形及其作用中尤为重要;推出是商的推广。第 Ⅴ 章专门讨论这一课题。第 1 节讲商与推出的基本概念,并给出一个基本的判别准则;第 2 节给出射影情形商与推出存在的一个充分条件,并讨论了有理商;第 3 节讨论仿射情形,特别是有限情形商与推出存在的条件,并给出格罗滕迪克下降原理。

第 Ⅵ 章将商与推出作为工具应用于群概形。第 1 节讲群概形作用的商,给出商与微积分的联系,对射影情形、有限仿射作用情形和半稳定情形给出商存在的充分条件,并初步讨论了齐性概形,将这些应用于域上的情形给出域上的群概形及其作用的一些基本性质;第 2 节讲皮卡概形,给出皮卡概形的存在性和基本性质,并讨论群概形的作用在皮卡概形上的诱导作用。

第 Ⅶ 章为阿贝尔簇与阿贝尔概形,这方面的内容很丰富。第 1 节为刚性及其应用,并给出阿贝尔簇与同态的一些基本性质;第 2 节为对偶理论,建立于皮卡概形理论之上,给出阿贝尔概形的对偶的存在性与基本性质,并进一步深入讨论极化等,给出黎曼-罗赫定理等深刻定理,并对特征 $p>0$ 情形定义了一般的移位态射;第 3 节用 l-进表示深入讨论自同态环与极化等;第 4 节为阿尔巴内塞簇的基本理论,包括阿贝尔簇的极小性、曲线的雅克比簇、阿尔巴内塞簇的存在性与一些基本性质;作为附录,第 5 节给出复阿贝尔簇的解析理论概要供参考。

在特征 $p>0$ 的情形,丢多涅模是研究交换群概形的一个基本工具,这方面的理论相当庞大,且甚为复杂。第 Ⅷ 章专门讨论这一课题。第 1 节讲交换形式群、p-可除群与塞尔对偶;第 2 节讲维特环、维特概形与基本性质;第 3 节通过“丢多涅元”建立丢多涅模的基本理论,并定义一般基上的丢多涅模概形;第 4 节讲对偶与拟极化,其中对偶是构造性地给出的;第 5 节讨论丢多涅模的结构和分类,给出源晶体的结构,并初步讨论

了丢多涅模与拟极化丢多涅模的同构分类。

对于一般的射影概形, 自同构群概形是一个重要的相关对象, 也经常是一个有力的工具。第 IX 章专门讨论这一课题。第 1 节给出自同构群概形的一些基本性质和例子, 并对几个特殊情形给出自同构群概形的结构; 第 2 节为自同构群概形的微积分, 给出自同构群概形的变形的基本定理和自同构群概形的微积分的基本定理, 并给出对阿贝尔簇和齐性概形的一些应用; 第 3 节讨论保持某些几何结构的自同构群概形, 由此可以将自同构群概形的某些方法应用于非射影情形, 特别是线性情形; 第 4 节应用自同构群概形证明阿贝尔簇的变形的基本定理 (这个定理原有的证明并非如此, 但应用自同构群概形可使证明大为简化)。

第 X 章主要是给出域上的有限型群概形的结构。这方面的结果基本上都是经典的 (完成于 20 世纪 50 年代), 但要改为用现代的语言证明, 有时颇不容易。由于有了前几章的准备, 可以避免冗长的证明。

第 XI 章为阿贝尔簇的模空间理论。作为直观的预备, 首先简述了复解析方法及一些结果; 然后用代数几何方法建立了阿贝尔簇的粗糙和精细模空间以及曲线的模空间, 并初步给出模空间的一些性质。

书中各章节有一些习题, 做这些习题有助于对正文的理解, 且其中一些结果是有用的。

第 I 章　代数几何的一些预备

第 1 节　纤维丛

1. 纤维丛的基本概念

拓扑学中的纤维丛是指局部平凡族。详言之，一个拓扑空间的连续映射 $f: X \to S$ 称为 S 上的一个*纤维丛*，如果存在一个拓扑空间 F，使得对任一点 $s \in S$ 有一个开邻域 $U \subset S$ 及一个同胚 $\phi: f^{-1}(U) \xrightarrow{\simeq} F \times U$，满足 $f|_{f^{-1}(U)} = \mathrm{pr}_2 \circ \phi$。此时 F 称为这个纤维丛的*纤维*。$F \times S$ 当然是一个纤维丛，称为*平凡的纤维丛*。一般的纤维丛虽然局部 (即在足够小的开集 $U \subset S$ 上) 结构和 $F \times S$ 一样，但整体结构却可能不同。例如设 S 为圆周，F 为线段，则有两个熟知的纤维丛，一是环带，另一是默比乌斯带 (图 1)。这两个纤维丛是显然不同的，因为前者是双侧的而后者是单侧的。

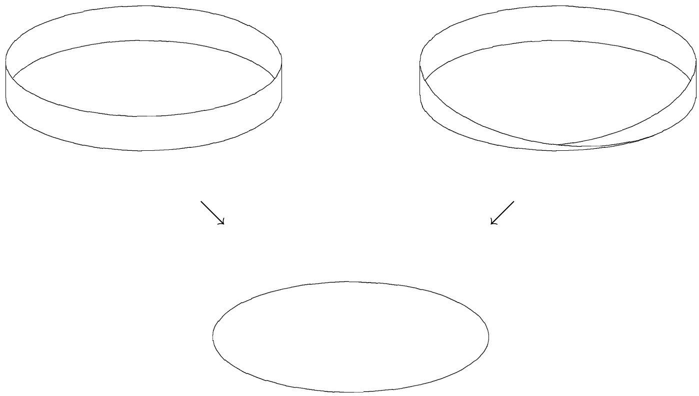

图　1

在代数几何中也会遇到类似的情形，特别是向量丛的情形。

例 1. 设 k 是代数闭域，$S = \mathbb{P}_k^1$，齐次坐标为 $(X_0 : X_1)$，$T = \mathbb{A}_k^2$，坐标为 x_0, x_1，则 $T \times_k S \cong \mathbb{A}_S^2$ 为 S 上的平凡平面丛，它有一个子丛

$$L = \{(x_0, x_1, X_0 : X_1) | x_0 X_0 + x_1 X_1 = 0\} \subset T \times_k S \tag{1}$$

这是 S 上的一个非平凡直线丛。

在 $k=\mathbb{C}$ 的情形, 为了直观地理解 L, 我们考虑它的实点集 (即坐标为实数的点集)。注意 S 的实点集为 $P^1_{\mathbb{R}}$, 它同胚于圆; 而 L 的实点集组成 $P^1_{\mathbb{R}}$ 上的一个实直线丛, 它像默比乌斯带那样, 是单侧的。与此对照, 一个平凡实直线丛 $\mathbb{R}\times P^1_{\mathbb{R}}$ 则为圆柱面, 是双侧的。

例 2. 设 X 为代数闭域 k 上的拟射影代数集, $\mathcal{F}$ 为 X 上的秩 n 局部自由层。取 X 的开覆盖 $\{U_i|i\in I\}$ 使得 $\mathcal{F}|_{U_i}\cong O_X^n|_{U_i}$ $(\forall i\in I)$, 对任两个 $i,j\in I$, 我们有同构 $\phi_i:\mathcal{F}|_{U_i}\to O_X^n|_{U_i}$ 和 $\phi_j:\mathcal{F}|_{U_j}\to O_X^n|_{U_j}$, 而 $O_X^n|_{U_i\cap U_j}$ 在 $U_i\cap U_j$ 上的自同构 $\phi_j\circ\phi_i^{-1}$ 由一个系数在 $O_X(U_i\cap U_j)$ 中的可逆 $n\times n$ 矩阵 A_{ij} 给出 $(\forall i,j\in I)$, 且对任意 $i,j,l\in I$, 在 $O_X(U_i\cap U_j\cap U_l)$ 上有

$$A_{ij}A_{jl}=A_{il} \tag{2}$$

而 $\mathcal{F}$ 在同构之下由所有矩阵 A_{ij} 唯一决定。令 $T_i=\mathbb{A}^n_k\times U_i$ $(\forall i\in I)$。对任意 $j\neq i\in I$, 简记 $T_i|_{U_i\cap U_j}=T_i\times_{U_i}(U_i\cap U_j)$ (即 $U_i\cap U_j$ 在 T_i 中的原象), 则 A_{ij} 定义了一个 (线性) 同构

$$f_{ij}:T_j|_{U_i\cap U_j}\to T_i|_{U_i\cap U_j} \tag{3}$$

且对任意 $i,j,l\in I$, 在 $T_l|_{U_i\cap U_j\cap U_l}$ 上有

$$f_{ij}\circ f_{jl}=f_{il} \tag{4}$$

由此可知所有 T_i 按 (3) "粘"成一个代数集 T, 它是 X 上的一个纤维丛, 每个点 $x\in X$ 上的纤维为 n 维向量空间, 所以叫作 (秩为 n 的) **向量丛**。上面说明了向量丛与局部自由层等价。

特别地, 若 $\mathcal{F}$ 为可逆层 (即 $n=1$), 则 T 称为 **直线丛**。例如对 $X=\mathbb{P}^n_k$, 每个 $O_X(d)$ 给出一个直线丛。例 1 中的直线丛 L 就是由 $O_S(1)$ 给出的。

更一般地, 设 S 为诺特概形, $\mathcal{M}$ 为 S 上的凝聚层。记 $\mathbf{Sym}(\mathcal{M})$ 为 $\mathcal{M}$ 在 O_S 上的对称积, $\mathbb{A}(\mathcal{M})=\mathbb{A}_S(\mathcal{M})=\mathbf{Spec}(\mathbf{Sym}(\mathcal{M}))$, 当 $\mathcal{M}$ 为平坦 (即局部自由) 层时称为 S 上的 **向量丛**, 此时它在 S 上平坦。特别地, 当 $\mathcal{M}$ 的秩 $n=1$ (即 $\mathcal{M}$ 为可逆层) 时, 称 $\mathbb{A}(\mathcal{M})$ 为 **直线丛**。易见 $\mathcal{M}\mapsto\mathbb{A}(\mathcal{M}^\vee)$ 给出 S 上秩 n 局部自由层的同构类与 S 上秩 n 向量丛的

同构类之间的一一对应 (其逆由 $\mathcal{S}ect_p$ 给出, 其中 $p: \mathbb{A}(\mathcal{M}^\vee) \to S$ 为投射)。特别地, S 上的一个直线丛等价于一个可逆层。

若 $f: T \to S$ 为诺特概形的态射, 易见 $\mathbb{A}_S(\mathcal{M}) \times_S T \cong \mathbb{A}_T(f^*\mathcal{M})$。

但对一般情形, 像拓扑学中那样的纤维丛定义在代数几何中并不很合适, 我们来看一个典型例子。

例 3. 在 $S = \mathbb{C} - \{0, 1\}$ 上的平凡射影平面丛 $\mathbb{P}^2_\mathbb{C} \times S$ 中, 由方程 $X_2^2 X_0 = X_1(X_1 - X_0)(X_1 - \lambda X_0)$ (λ 为 S 的坐标变量) 定义的代数子集 X 给出一个子丛 $f: X \to S$, 它在拓扑意义下是环面丛 (即它的纤维是像救生圈那样的环面), 但在代数几何与复几何中它不是局部平凡的, f 在两个点 $\lambda, \lambda' \in S$ 上的纤维 (解析或代数) 同构当且仅当 λ' 等于 λ, $1/\lambda$, $1-\lambda$, $1/(1-\lambda)$, $\lambda/(\lambda-1)$ 或 $1-1/\lambda$。所以对任何开子集 $U \subset S$, $f^{-1}(U)$ 都不同构于 U 与某条曲线的积, 换言之 $X \to S$ 作为代数曲线族或作为黎曼曲面族不是局部平凡的。

2. 平坦性

为了适应多方面 (如分类学、变形理论、数论等) 的应用, 在代数几何中需要推广纤维丛的概念。经过长时期的探索, 今天人们知道平坦态射是纤维丛在代数几何中的一种很好的推广, 而且需要将其定义在一般概形上。

例如令 $S = \mathbb{C}$ (比例 3 中的 S 多一个点), 在 $\mathbb{P}^2_\mathbb{C} \times S$ 中由方程 $X_2^2 X_0 = X_1(X_1 - X_0)(X_1 - \lambda X_0)$ 定义的曲线簇 X_λ 在 S 上是平坦的, 但它在 $0 \in S$ 上的纤维是退化的 (为伪球面), 即使在拓扑意义下也不是纤维丛。

例 4. 设 $f_1, ..., f_r \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_n]$。考虑丢番图方程 $f_1 = ... = f_r = 0$, 它在代数几何上对应于概形 $X = \mathrm{Spec}R$, 其中 $R = \mathbb{Z}[x_1, ..., x_n]/(f_1, ..., f_r)$。若 R 是 $\mathbb{Z}$-平坦的 (即 $\mathbb{Z}$-无挠的), 则可将 X 看作 $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ 上的纤维丛。

设 P 是概形 S 的一个点, 不妨设 $P \in \mathrm{Spec}R \subset S$, 即为 R 中的一个素理想。令 $\kappa(P) = R_P/PR_P$, 则 $\mathrm{Spec}\kappa(P)$ 可以看作由一个点 P 组成的

S 的子概形, 记作 $\{P\}$。

设 $f: X \to S$ 与 $g: Y \to S$ 为概形的态射, 则可以定义它们的*纤维积*(亦称为 f 和 g 的"*拉回*"(pull-back)) $X \times_S Y$ (见 [H, Theorem Ⅱ.3.3]), 它是一个概形且有两个态射 ("投射") $\mathrm{pr}_1: X \times_S Y \to X$, $\mathrm{pr}_2: X \times_S Y \to Y$, 满足

i) $f \circ \mathrm{pr}_1 = g \circ \mathrm{pr}_2$;

ii) 对任意概形 Z 及任意态射 $p: Z \to X$, $q: Z \to Y$, 若 $f \circ p = g \circ q$, 则有唯一态射 $\phi: Z \to X \times_S Y$ 使得 $p = \mathrm{pr}_1 \circ \phi$, $q = \mathrm{pr}_2 \circ \phi$。

例如当 $S = \mathrm{Spec} R$, $X = \mathrm{Spec} A$, $Y = \mathrm{Spec} B$ 时, $X \times_S Y \cong \mathrm{Spec} A \otimes_R B$。在一般情形 $X \times_S Y$ 是由形如 $\mathrm{Spec} A \otimes_R B$ 的开集粘成的。

特别地, 若 $X = Y = Z$, $f = g$ 且 $p = q = \mathrm{id}_X$, 则得"对角态射" $\Delta: X \to X \times_S X$ 使得 $p \circ \Delta = q \circ \Delta = \mathrm{id}_X$。我们一般假定 Δ 为闭嵌入。若拓扑空间的积都带有积拓扑, 则对角映射为闭嵌入就等价于豪斯道夫分离性公理 (T_2 公理)。但对于察里斯基拓扑, $X \times Y$ 的拓扑一般不是 X 与 Y 的拓扑的积。事实上, 察里斯基拓扑连 T_1 公理也不满足。但通过假定 Δ 为闭嵌入, 可以把 T_2 公理变相地加到概形中, 所以我们把它称作分离性公理。

一个有限型分离态射 $f: X \to Y$ 称为*紧的*(*proper*), 如果它是"泛闭映射", 即对任意态射 $Y' \to Y$, 投射 $\mathrm{pr}_2: X \times_Y Y' \to Y'$ 是 (察里斯基拓扑的) 闭映射。这个定义将拓扑学中的紧致概念引入代数几何中。

引理 1. 一个态射 $f: X \to Y$ 为闭嵌入当且仅当它是紧的且对角态射 $\Delta: X \to X \times_Y X$ 是同构。

证. 必要性是显然的, 以下证明充分性。

先考虑 $Y = \mathrm{Spec}(k)$, k 为域的特殊情形, 此时由 Δ 是同构可见 $\dim(X) = \dim(X \times_k X) = 2\dim(X)$, 从而 $\dim(X) = 0$, 再由 f 是紧的可见 f 是有限的。令 $d = \deg(f)$, 则 $\deg(X \times_k X/k) = d^2$, 再由 Δ 是同构可见 $d = d^2$, 从而 $d = 1$, 即 f 是同构。

现在考虑一般情形。由上述特殊情形可见 f 是集合意义下的一一映射, 故由 f 是紧的可见 f 是有限的。这样只需证明对任意 $x \in X$, $f^*: O_{Y,f(x)} \to O_{X,x}$ 是满射。简记 $A = O_{Y,f(x)}$, $B = O_{X,x}$, $p \subset A$ 为极大

理想, $k=A/p$。注意 B 作为 A-模是有限生成的, 记 $M=B/f^*(A)$, 也是有限生成的 A-模。对于正合列 $A\to B\to M\to 0$, $\otimes_A B$ 得正合列

$$B \xrightarrow{1\otimes_A \mathrm{id}_B} B\otimes_A B\to M\otimes_A B\to 0 \tag{1}$$

由于 $\Delta^*: B\otimes_A B\to B$ 是同构, 而 $\Delta^*\circ(1\otimes_A \mathrm{id}_B)=\mathrm{id}_B$, 可见 $1\otimes_A \mathrm{id}_B$ 是同构, 从而 $M\otimes_A B=0$。对此 $\otimes_A k$, 并注意由上述特殊情形有 $B/pB\cong k$, 得

$$0=(M\otimes_A B)\otimes_A k\cong(M\otimes_A k)\otimes_k(B\otimes_A k)\cong(M/pM)\otimes_k(B/pB)\cong M/pM \tag{2}$$

由中山正引理得 $M=0$。证毕。

对偶地可以定义“推出” (push-out)。设 $p:T\to X$, $q:T\to Y$ 为态射。若存在概形 S 及态射 $f:X\to S$, $g:Y\to S$ 满足

i) $f\circ p=g\circ q$;

ii) 对任意概形 Z 及任意态射 $f':X\to Z$, $g':Y\to Z$, 若 $f'\circ p=g'\circ q$, 则有唯一态射 $\psi:S\to Z$ 使得 $f'=\psi\circ f$, $g'=\psi\circ g$,

则称 S 为 p 和 q 的**推出**。但在概形范畴中推出一般不存在。我们在后面将看到几类推出存在的特殊情形 (见第 V 章)。

纤维积可以看作 (一个因子的) **平凡纤维丛**, 例如在例 3 中, $\mathbb{P}^2\times S$ 是 S 上的一个平凡纤维丛, 而 X 是它的一个非平凡子丛。在代数几何中的纤维丛一般都是平凡丛的子丛。

设 $f:X\to S$ 为概形态射, $P\in S$, 则 $X\times_S\{P\}$ 可以看成 $f^{-1}(P)$ 的概形结构, 称作 X 在 P 点上的**纤维**。一个 f 的**截口** (*section*) 是指一个态射 $g:S\to X$ 使得 $f\circ g=\mathrm{id}_S$。若 $T\to S$ 为态射, 则 $f\times_S \mathrm{id}_T: X\times_S T\to T$ 称作 f 在 T 上的**基变换** (*base change*)。

并非所有态射都可以看作纤维丛, 我们来看两个例子。

例 5. 设 S 为 x-y 平面, X 为三维空间中的二次曲面 $xz=y$, $f:X\to S$ 为投射。对于一点 $P=(x,y)\in S$, 若 $x\neq 0$, 则 $f^{-1}(P)$ 为一点; 但若 $x=y=0$, 则 $f^{-1}(P)$ 为一条直线。这种情况称为“爆发” (blow up), 即某个纤维的维数特别大, 大于 f 的相对维数 (即 $\dim(X)-\dim(S)$)。显然不应把这样的态射看作纤维丛。

例 6. 仍设 S 为 x-y 平面, X 为三维空间中的平面 $z=1$ 外加一点 $(0,0,2)$, $f:X\to S$ 为投射。对于一点 $P=(x,y)\in S$, 若 $x\neq 0$ 或 $y\neq 0$, 则 $f^{-1}(P)$ 为一点, 但若 $x=y=0$, 则 $f^{-1}(P)$ 为两点。这种情况称为"挠" (torsion), 即某个纤维的次数 (degree) 特别大。这样的态射也不应看作纤维丛。

上面两个例子都是典型的不平坦态射。若 $S=\mathrm{Spec}R$, $X=\mathrm{Spec}A$, 而 $f:X\to S$ 由一个同态 $R\to A$ 诱导, 则 A 可以看作一个 R-代数, 此时我们说 f **平坦**的意思是 A 为平坦 R-代数, 即对任意 R-模单同态 $g:M\to N$, $g\otimes_R \mathrm{id}_A : M\otimes_R A\to N\otimes_R A$ 为单射。在一般情形我们说 f 平坦的意思是它在仿射开子概形上的限制都平坦。若 f 是平坦的, 则 f 的许多性质 (如相对维数、次数以及下面将看到的许多指数) 在基变换下保持, 特别地在纤维上保持。

由于上述原因, 我们对纤维丛的一个基本要求就是平坦性。而在很多情形下, 仅有平坦性就够了。因此, 在代数几何中常研究推广了的纤维丛。

平坦性是一个不很直观的概念: 一个环 R 上的模 M 称为**平坦模**, 如果对任意 R-模的单同态 $\phi: N'\hookrightarrow N$, 诱导同态 $\phi\otimes_R \mathrm{id}_M : N'\otimes_R M\to N\otimes_R M$ 是单同态。设 $\mathcal{F}$ 为一个概形 S 上的 O_S-模层, 若任一点 $s\in S$ 上的茎 $\mathcal{F}_s$ 是 $O_{S,s}$ 上的平坦模, 则称 $\mathcal{F}$ 在 S 上是**平坦的**。若 $\mathcal{F}$ 是拟凝聚层, 这等价于对任意仿射开子概形 $U=\mathrm{Spec}(R)\subset S$, $\mathcal{F}(U)$ 为平坦 R-模。因此一个概形的态射 $f:X\to S$ 为平坦的当且仅当对任意 $x\in X$, $O_{X,x}$ 是平坦 $O_{S,f(x)}$-模 (此时亦称 X 在 S 上平坦)。

关于平坦模的许多命题可以翻译成几何的语言, 我们罗列一些下面将要用到的 (参看 [Ma, Chapters 2, 8] 或 [L1, Ⅶ & ⅩⅢ.5])。

引理 2. 设 S 为诺特概形, X,Y 为有限型 S-概形, $\mathcal{F}$ 为 X 上的拟凝聚层。

i) 若 $0\to\mathcal{F}'\to\mathcal{F}\to\mathcal{F}''\to 0$ 为 X 上拟凝聚层的正合列, 其中 $\mathcal{F}''$ 在 X 上平坦, 则 $\mathcal{F}'$ 在 X 上平坦当且仅当 $\mathcal{F}$ 在 X 上平坦。X 上的平坦模层在 O_X 上的张量积是平坦的。

ii) $\mathbb{A}^n_S$ 和 $\mathbb{P}^n_S$ 在 S 上平坦。S 上的向量丛在 S 上平坦。开嵌入是平