第5章 连续系统复频域分析的工程数学基础

5.1 本章内容概要

1. 拉普拉斯变换

1）拉普拉斯变换的定义

双边拉氏变换对：

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s$$

$F(s)$为$f(t)$的象函数，$f(t)$为$F(s)$的原函数。符号表示为

$$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]\quad f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

也常简记为变换对

$$f(t)\leftrightarrow F(s)$$

在工程技术中，常用

$$F(s)=\int_{0}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

称为$f(t)$的单边拉氏变换。

2）常用函数的拉普拉斯变换

$$\delta(t)\leftrightarrow 1 \qquad \varepsilon(t)\leftrightarrow \frac{1}{s}$$

$$\mathrm{e}^{-\alpha t}\varepsilon(t)\leftrightarrow \frac{1}{s+\alpha}(\alpha>0) \qquad \mathrm{e}^{\alpha t}\varepsilon(t)\leftrightarrow \frac{1}{s-\alpha}(\alpha>0)$$

$$\sin\omega t\leftrightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \qquad \cos\omega t\leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega t\leftrightarrow \frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2} \qquad \mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\omega t\leftrightarrow \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

$$t\varepsilon(t)\leftrightarrow \frac{1}{s^2} \qquad t^2\varepsilon(t)\leftrightarrow \frac{2}{s^3} \qquad t^n\varepsilon(t)\leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$$

2. 拉普拉斯变换的性质

1）线性性质

$$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) \leftrightarrow k_1 F_1(s) + k_2 F_2(s)$$

2）延时特性

$$f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0) \leftrightarrow F(s)\mathrm{e}^{-st_0} \quad (t_0 > 0)$$

注意：

（1）一定是 $f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)$的形式的函数才能用延时特性；

（2）函数一定是沿时间轴右移，$t_0>0$；

（3）表达式 $f(t-t_0)$、$f(t-t_0)\varepsilon(t)$、$f(t)\varepsilon(t-t_0)$等所表示的函数不能用延时特性。

周期函数的拉氏变换如下（$F_1(s)$为第一个周期波形 $f_1(t)$的象函数）：

$$F(s) = F_1(s)\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}$$

3）尺度变换

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a>0)$$

4）s 域平移特性

$$f(t)\mathrm{e}^{\pm s_0 t} \leftrightarrow F(s \mp s_0)$$

5）微分定理

$$f'(t) \leftrightarrow sF(s) - f(0_-)$$
$$f''(t) \leftrightarrow s^2F(s) - sf(0_-) - f'(0_-)$$
$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^nF(s) - s^{n-1}f(0_-) - s^{n-2}f'(0_-) - \cdots - f^{(n-1)}(0_-)$$

若 $f(t)$为一有始函数，则 $f(0_-)$，$f'(0_-)$，…，$f^{(n-1)}(0_-)$均为零，则

$$f'(t) \leftrightarrow sF(s) \quad f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^nF(s)$$

象函数的微分性质：

若$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$，则

$$F'(s) = \mathcal{L}[tf(t)], (\mathrm{Re}(s) > c)$$
$$F^{(n)}(s) = (-1)^n\mathcal{L}[t^nf(t)], (\mathrm{Re}(s) > c)$$

6）积分定理

$$\int_{0_-}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}$$

$$\mathcal{L}\left\{\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{d}t\cdots\int_0^t}_{n\text{次}} f(t)\mathrm{d}t\right\} = \frac{1}{s^n}F(s)$$

象函数 $F(s)$的积分性质：

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(s)\mathrm{d}s$$

或
$$f(t) = t\,\mathcal{L}^{-1}\left[\int_s^{\infty} F(s)\mathrm{d}s\right]$$

一般地
$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t^n}\right]=\underbrace{\int_s^{\infty}\mathrm{d}s\int_s^{\infty}\mathrm{d}s\cdots\int_s^{\infty}}_{n\text{次}}F(s)\mathrm{d}s$$

7）初值定理与终值定理

(1）初值定理：

若$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$，且$\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)$存在，则

$$\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$$

或

$$f(0)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$$

(2）终值定理：

若$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$，且 $sF(s)$的所有奇点全在 s 平面的左半部，则

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)\quad 或\ f(+\infty)=\lim_{s\to 0}sF(s)$$

8）卷积定理

$$f_1(t)*f_2(t)\leftrightarrow F_1(s)F_2(s)$$

3. 拉普拉斯反变换

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

$F(s)$为真分式时的拉氏反变换，分为以下三种情况。

1）$F(s)$的所有极点均为单极点

$$F(s)=\frac{K_1}{s-s_1}+\frac{K_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{K_n}{s-s_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{s-s_i}$$

$$K_i=(s-s_i)F(s)\big|_{s=s_i}$$

故原函数

$$f(t)=K_1\mathrm{e}^{s_1 t}+K_2\mathrm{e}^{s_2 t}+\cdots+K_n\mathrm{e}^{s_n t}$$

2）$F(s)$的极点为共轭复根

设 $D(s)=0$ 中含有一对共轭复根，如 $\alpha+\mathrm{j}\beta$ 和 $\alpha-\mathrm{j}\beta$，设 $F(s)$为

$$F(s)=\frac{F_1(s)}{(s+\alpha-\mathrm{j}\beta)(s+\alpha+\mathrm{j}\beta)}=\frac{K_1}{s+\alpha-\mathrm{j}\beta}+\frac{K_2}{s+\alpha+\mathrm{j}\beta}+\cdots$$

$$K_1=(s+\alpha-\mathrm{j}\beta)F(s)\big|_{s=-\alpha+\mathrm{j}\beta}=\frac{F_1(-\alpha+\mathrm{j}\beta)}{2\mathrm{j}\beta}$$

$$K_2=(s+\alpha+\mathrm{j}\beta)F(s)\big|_{s=-\alpha-\mathrm{j}\beta}=\frac{F_1(-\alpha-\mathrm{j}\beta)}{-2\mathrm{j}\beta}$$

3）$F(s)$的极点为多重极点

$$F(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_i)^k}$$

则展开式应为

$$F(s)=\frac{K_1}{s-s_1}+\frac{K_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{K_{i0}}{(s-s_i)^k}+\frac{K_{i1}}{(s-s_i)^{k-1}}+\cdots+\frac{K_{ik-1}}{s-s_i}$$

$$K_{1n}=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}s^{n-1}}[(s-s_1)^k F(s)]\Bigg|_{s=s_1}$$

称为海维塞德公式，式中，$n=1,2,3,\cdots,k$。

4. 复频域数学模型——传递函数

1）传递函数的定义

对单输入单输出的 LTI 系统而言，输入 $f(t)$和输出 $y(t)$之间描述，即

$$\begin{aligned}&a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1 y^{(1)}(t)+a_0 y(t)\\&=b_m f^{(m)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1 f^{(1)}(t)+b_0 f(t)\end{aligned}$$

设输入 $f(t)$为在 $t=0$ 时刻加入的因果函数，且系统为零状态，则有

$$f(0_-)=f^{(1)}(0_-)=f^{(2)}(0_-)=\cdots=0$$

$$y(0_-)=y^{(1)}(0_-)=y^{(2)}(0_-)=\cdots=0$$

则 n 阶微分方程两边取拉氏变换，根据微分性质，可得

$$(a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0)Y(s)=(b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0)F(s)$$

传递函数

$$H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

若传递函数 $H(s)$和输入信号的象函数 $F(s)$已知，则有响应函数

$$Y(s)=F(s)H(s)$$

$H(s)$是 $h(t)$取拉氏变换的结果，即

$$H(s)=\int_{0-}^{\infty}h(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

时域分析和 s 域分析的对应关系，如图 5-1 所示。

2）传递函数的零、极点形式

将传递函数的分子、分母进行因式分解，得

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=H_0\,\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_n)}=H_0\,\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(s-s_i)}$$

根 s_i 为传递函数的极点；z_j 为传递函数的零点。$H_0=\dfrac{b_m}{a_n}$为常数。

把 $H(s)$的零极点都表示在 s 复平面上，则称为传递函数的零、极点图，比如图 5-2，其中零点用“∘”表示，极点用“×”表示。若为 n 重零点或极点，可在其旁注以(n)。

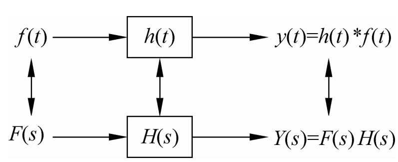

图 5-1　时域分析与 s 域分析对应关系

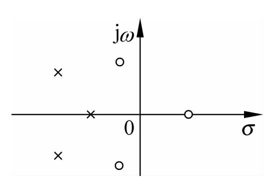

图 5-2　传递函数的零、极点示意图

3）传递函数的零、极点分布与时域特性的关系

$$H(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{s-s_i}$$

其反变换为

$$h(t)=\sum_{i=1}^{n}k_i e^{s_i t}\varepsilon(t)$$

4）$H(s)$与系统稳定性

由传递函数的极点分布可以判断连续时间因果 LTI 系统的稳定性。

(1) $H(s)$的所有极点全部位于左半平面，不包含虚轴，系统稳定；

(2) $H(s)$在平面虚轴上有一阶极点，其余所有极点全部位于平面的左半平面，则系统是临界稳定的；

(3) 当 $H(s)$含有右半平面的极点或虚轴上有二阶或二阶以上的极点时，系统是不稳定的。

劳斯判据方法：设 $H(s)$的分母多项式为

$$D(s)=a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0$$

(4) 对于一阶、二阶系统，系统稳定的充要条件为 $D(s)$的全部系数非零且都为正数。

(5) 对三阶系统，系统稳定的充要条件为 $D(s)$的全部系数都为正数，且满足$a_1a_2>a_0a_3$

(6) 对于四阶系统，系统稳定的充要条件是 $D(s)$的各项系数全为正，且满足 $a_2a_3-a_1a_4>0$，$a_1a_2a_3-a_1^2a_4-a_0a_3^2>0$。

5. 拉普拉斯变换在系统复频域分析中的应用

1）用拉普拉斯变换法解线性常系数微分方程

用拉普拉斯变换法求解微分方程，主要利用拉普拉斯变换的微分定理。

2）拉普拉斯变换在电路分析中的应用

(1) 电阻元件：$U(s)=RI(s)$

图 5-3 电阻元件 s 域模型

s 域模型如图 5-3 所示。

(2) 电容元件：$I(s)=sCU_c(s)-Cu_c(0_-)$或 $U_c(s)=\frac{1}{sC}I(s)+\frac{u_c(0_-)}{s}$

s 域模型如图 5-4 所示。

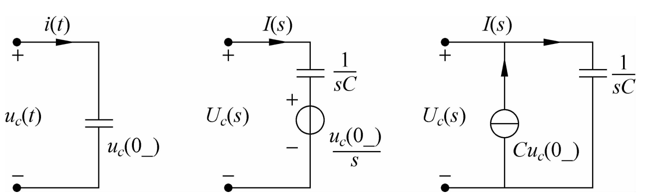

图 5-4 电容的 s 域模型

(3) 电感元件：$U(s)=sLI_L(s)-Li_L(0_-)$或 $I_L(s)=\frac{1}{sL}U(s)+\frac{i_L(0_-)}{s}$

s 域模型如图 5-5 所示。

在 s 域中分析电路，仍然离不开基尔霍夫定律。

由 KCL：$\sum i(t)=0$

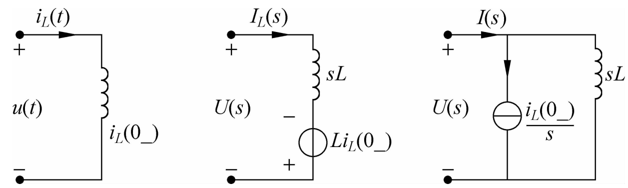

图 5-5　电感的 s 域模型

由 KVL：$\sum u(t)=0$

分别对两式取拉氏变换，可得基尔霍夫定律的 s 域形式为

$$\sum I(s)=0 \quad \sum U(s)=0$$

应用上述定律可以得到电路的运算阻抗的一般形式。

5.2　学习重点及例题

(1) 注重控制工程与数学知识体系结合的系统性与完整性，在控制系统分析中，怎样从时域分析的思路到复频域分析观念的转变；

(2) 深刻理解拉氏变换的意义，能灵活运用拉普拉斯变换的性质求复杂系统的拉氏变换；

(3) 拉氏变换在系统频域分析中应用；

(4) 传递函数在系统分析中的作用。

例 5-1　(清华大学 2007 年硕士研究生入学考试试题)

求$\frac{s+3}{s^2+2s+2}e^{-s}$得拉普拉斯逆变换。

解　利用分步展开法可将$\frac{s+3}{s^2+2s+2}$化为

$$\frac{s+3}{s^2+2s+2}=\frac{s+1}{(s+1)^2+1}+\frac{2}{(s+1)^2+1}=\mathcal{L}\{(e^{-1}\cos t+2e^{-1}\sin t)\varepsilon(t)\}$$

根据上式可得其逆变换为

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2+2s+2}e^{-1}\right\}=e^{-1}e(\cos(t-1)+2\sin(t-1))\varepsilon(t-1)$$

例 5-2　(国防科技大学 2003 年硕士研究生入学考试试题)

已知

$$f(t)=\begin{cases}e^{-t}\sin(\pi t), & 0<t<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求其拉普拉斯变换。

解　由题意可知，$f(t)$可改写为如下形式：

$$f(t)=e^{-t}\sin(\pi t)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)]=e^{-t}\{\sin(\pi t)\varepsilon(t)-\sin[\pi(t-2)]\varepsilon(t-2)\}$$

根据常用的拉普拉斯变换对，有

$$\sin(\pi t)\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{\pi}{s^2+\pi^2}$$

根据拉普拉斯变换的时移性质,由上面的变换对可得

$$\sin[\pi(t-2)]\varepsilon(t-2)\leftrightarrow\frac{\pi}{s^2+\pi^2}\mathrm{e}^{-2s}$$

考虑到拉普拉斯变换的时移性质,时域乘 e^{-t},相当于频域左移 1 位,故最终求得信号的拉普拉斯变换为

$$f(t)\leftrightarrow\frac{\pi}{(s+1)^2+\pi^2}[1-\mathrm{e}^{-2(s+1)}]$$

例 5-3 系统方程为$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r(t)+4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+3r(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)+3f(t)$,起始状态 $r(0_-)=0$,$r'(0_-)=1$。求 $f(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$时的零输入响应、零状态响应和完全响应。

解 由已知条件:设 $r(t)\leftrightarrow R(s)$,则

$$r'(t)\leftrightarrow sR(s)-r(0_-)=sR(s)$$

$$r''(t)\leftrightarrow s^2R(s)-sr(0_-)-r'(0_-)=s^2R(s)-1$$

$$f(t)\leftrightarrow F(s)=\frac{1}{s+1},f'(t)\leftrightarrow sF(s)$$

对上面方程两边同时取单边 s 变换,有

$$s^2R(s)-1+4sR(s)+3R(s)=(s+3)F(s)$$

求得

$$R(s)=\frac{(s+3)F(s)+1}{s^2+4s+3}$$

所以零输入响应的 s 变换为

$$R_{zi}(s)=\frac{1}{s^2+4s+3}=\frac{1}{(s+1)(s+3)}=\frac{\frac{1}{2}}{s+1}+\frac{-\frac{1}{2}}{s+3}$$

零输入响应为

$$r_{zi}(t)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-3t})u(t)$$

零状态响应的 s 变换为

$$R_{zs}(s)=\frac{s+3}{s^2+4s+3}F(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s+3)}\cdot\frac{1}{s+1}=\frac{1}{(s+1)^2}$$

所以对上式求拉普拉斯反变换可以得到零状态响应为

$$r_{zs}(t)=t\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$$

完全响应即零输入响应和零状态响应的和。

所以完全响应的 s 变换为

$$R(s)=\frac{(s+3)\frac{1}{s+1}+1}{s^2+4s+3}=\frac{2(s+2)}{(s+1)^2(s+3)}=\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{\frac{1}{2}}{s+1}+\frac{-\frac{1}{2}}{s+3}$$

求得拉普拉斯反变换得到完全响应为

$$r(t)=\left(t\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

例 5-4 在图 5-6 所示电路中,已知 $i_2(0^-)=5\mathrm{A}$,$u_c(0^-)=4\mathrm{V}$,$f(t)=10\varepsilon(t)\mathrm{A}$

(1) 画出 s 域电路模型;

(2) 求全响应 $u_C(t)$。

解　(1) 根据题意,可画出 s 域电路模型如图 5-7 所示。

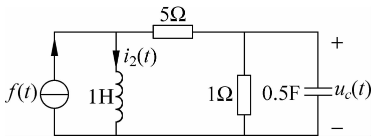

图　5-6

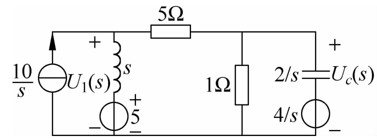

图　5-7

(2) 根据(1)中画出的 s 域电路模型可列出电路的节点 KCL 方程为

$$\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{5}\right)U_1(s)-\frac{1}{5}U_C(s)=\frac{10}{s}-\frac{5}{s}=\frac{5}{s}$$

$$-\frac{1}{5}U_1(s)+\left(\frac{1}{5}+s+\frac{1}{1}\right)U_C(s)=\frac{\frac{4}{s}}{\frac{2}{s}}=2$$

联立上面两式子可解得

$$U_C(s)=\frac{4s+30}{s^2+7s+12}=\frac{18}{s+3}+\frac{-14}{s+4}$$

这样,可求得全响应为

$$u_c(t)=(18\mathrm{e}^{-3t}-14\mathrm{e}^{-4t})\varepsilon(t)$$

例 5-5　(北京邮电大学 2008 年硕士研究生入学考试试题)

设一个连续时间 LTI 系统的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}-2y(t)=x(t)$$

求系统函数 $H(s)$,并画出 $H(s)$的零、极点图。

解　对方程两端取拉氏变换得

$$s^2Y(s)-sY(s)-2Y(s)=X(s)$$

根据系统函数的定义,得

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s^2-s-2}=\frac{1}{(s-2)(s+1)}$$

零、极点图见图 5-8。

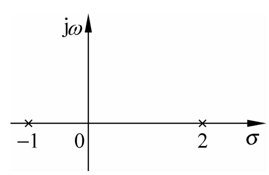

图　5-8

例 5-6　(中国科学技术大学 2008 年硕士研究生入学考试试题)

已知方程$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+2y(t)=x(t)+\int_0^{\infty}x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$和起始条件 $y(0_-)=1, y'(0_-)=-1$ 表示的连续时间因果系统,试分别求出它对因果输入 $x(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$ 的零状态响应 $y_{zs}(t)$、零输入响应 $y_{zi}(t)$。

解　令 $Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]$,对方程两端取拉氏变换,得

$$s^2Y(s)-y(0_-)s-y'(0_-)+3[sY(s)-y(0_-)]+2Y(s)=X(s)-\frac{X(s)}{s}$$

将起始条件 $y(0_-)=1$，$y'(0_-)=-1$ 代入上式，整理得

$$Y(s)=\frac{1}{s(s+2)}X(s)+\frac{1}{s+1}$$

所以零状态响应为

$$Y_{zs}(s)=\frac{1}{s(s+2)}X(s)$$

因为 $x(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$，故 $X(s)=\dfrac{1}{s+1}$，所以

$$Y_{zs}(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

将上式部分分式展开为

$$Y_{zs}(s)=\frac{0.5}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{0.5}{s+2}$$

作拉普拉斯反变换，得零状态响应为

$$y_{zs}(t)=0.5\varepsilon(t)-e^{-t}\varepsilon(t)+0.5e^{-2t}\varepsilon(t)$$

零输入响应为

$$Y_{zi}(s)=\frac{1}{s+1}$$

作拉普拉斯反变换，得零输入响应为

$$y_{zi}(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$$

例 5-7 （北京交通大学 2004 年硕士研究生入学考试试题）

已知连续系统的系统函数 $H(s)$ 的零极点如图 5-9 所示，且 $H(\infty)=2$。

(1) 写出 $H(s)$ 的表达式，计算该系统的单位冲激响应 $h(t)$；

(2) 计算该系统的单位阶跃响应 $s(t)$。

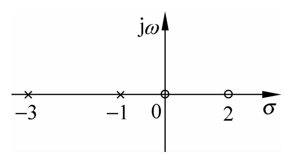

图 5-9

解 (1) 根据题图所示零极点分布图及 $H(\infty)$ 的值，用待定系数法可求得系统函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=K\frac{s(s-2)}{(s+1)(s+3)}=\frac{2s(s-2)}{(s+1)(s+3)}=2+\frac{3}{s+1}+\frac{-15}{s+3}$$

对上式进行拉普拉斯反变换，可得单位冲激响应为

$$h(t)=2\delta(t)+(3e^{-t}-15e^{-3t})\varepsilon(t)$$

(2) 由上式可得单位阶跃响应的 s 域表达式为

$$G(s)=H(s)\,\mathcal{L}[\varepsilon(t)]=\frac{2s(s-2)}{(s+1)(s+3)}\,\frac{1}{s}=\frac{-3}{s+1}+\frac{5}{s+3}$$

再进行拉普拉斯反变换可得单位阶跃响应为

$$s(t)=(-3e^{-t}+5e^{-3t})\varepsilon(t)$$

例 5-8 （华中科技大学 2002 年硕士研究生入学考试试题）

已知

$$f(t)=\begin{cases}1 & (0<t<1)\\ 2-t & (1<t<2)\\ 0 & (t<0,t>2)\end{cases}$$

画出其波形，求其拉普拉斯变换。

解　根据已知可画出 $f(t)$波形如图 5-10 所示。

对 $f(t)$求导得 $f'(t)$，如图 5-11 所示。

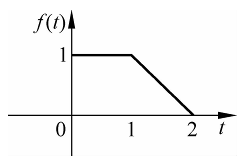

图　5-10

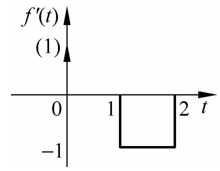

图　5-11

$$f'(t)=\delta(t)-\varepsilon(t-1)+\varepsilon(t-2)$$

再用常用函数拉式变换对和时移性质可得

$$f'(t)\leftrightarrow 1-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-s}+\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-2s}$$

再由时域积分性质，得其拉普拉斯变换为

$$f(t)\leftrightarrow \frac{1}{s}\left(1-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-s}+\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-2s}\right)$$

例 5-9　（东南大学 2000 年硕士研究生入学考试试题）

已知系统输入 $f(t)$及其零状态响应 $y_{zs}(t)$的波形如图 5-12(a)、图 5-12(b)所示，求 $h(t)$并绘出波形。

解　根据图 5-12(a)和拉普拉斯变换对可得

$$f(t)=\varepsilon(t-2)-\varepsilon(t-4)\leftrightarrow F(s)=\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-2s}-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-4s}=\frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s}(1-\mathrm{e}^{-2s})$$

对 $y_{zs}(t)$求导，如图 5-13 所示。

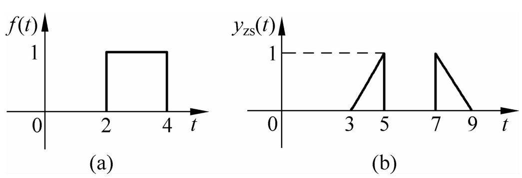

图　5-12

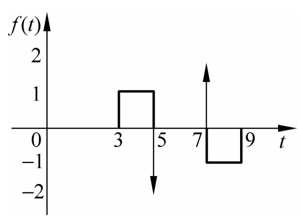

图　5-13

则可得到

$$y'_{zs}(t)=[\varepsilon(t-3)-\varepsilon(t-5)]-2\delta(t-5)+2\delta(t-7)-[\varepsilon(t-7)-\varepsilon(t-9)]$$

对上式求拉式变换得

$$sY_{zs}(s)=\frac{\mathrm{e}^{-3s}}{s}(1-\mathrm{e}^{-2s})-2\mathrm{e}^{-5s}(1-\mathrm{e}^{-2s})-\frac{\mathrm{e}^{-7s}}{s}(1-\mathrm{e}^{-2s})=\left(\frac{\mathrm{e}^{-3s}-\mathrm{e}^{-7s}}{s}\right)(1-\mathrm{e}^{-2s})$$

所以

$$Y_{zs}(s)=\frac{\mathrm{e}^{-3s}-\mathrm{e}^{-7s}-2s\mathrm{e}^{-5s}}{s^2}(1-\mathrm{e}^{-2s})$$

则由上式可以求得系统函数为

$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{F(s)}=\frac{e^{-s}-e^{-5s}}{s}-2e^{-3s}$$

冲激响应 $h(t)$ 即系统函数的拉普拉斯反变换，所以得到

$$h(t)=\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-5)-2\delta(t-3)$$

根据上面所求得的 $h(t)$ 表达式，可以画出 $h(t)$ 的波形如图 5-14 所示。

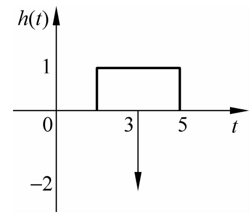

图 5-14

例 5-10 因果信号 $f(t)$ 的单边拉普拉斯变换 $F(s)=\frac{1}{s^2+s+1}$，求下列信号的单边拉普拉斯变换

(1) $y_1(t)=e^{-2t}f(3t)$；

(2) $y_2(t)=\frac{df(\frac{1}{2}t-1)}{dt}$。

解 (1) 根据拉式变换尺度变换性质可得

$$f(3t)\leftrightarrow\frac{1}{3}F\left(\frac{s}{3}\right)=\frac{3}{s^2+3s+9}$$

由复频移性质知

$$y_1(t)=e^{-2t}f(3t)\leftrightarrow\frac{3}{(s+2)^2+3(s+2)+9}=\frac{3}{s^2+7s+19}$$

(2) 根据拉普拉斯的时性质 $f(t-1)\leftrightarrow F(s)e^{-s}$ 可得

$$f\left(\frac{1}{2}t-1\right)\leftrightarrow 2F(2s)e^{-2s}=\frac{2}{4s^2+2s+1}e^{-2s}$$

所以得到

$$y_2(t)=\frac{df\left(\frac{1}{2}t-1\right)}{dt}\leftrightarrow\frac{2s}{4s^2+2s+1}e^{-2s}$$

例 5-11 （中国科学技术大学 2008 年硕士研究生入学考试试题）

如图 5-15 所示因果连续时间线性反馈系统，已知系统 1 是用微分方程 $y'(t)-y(t)=e(t)$ 表示的 LTI 系统，反馈通路的系统函数为 $F(s)=K/(s+2)$，可调增益 K 为任意实数。试求：

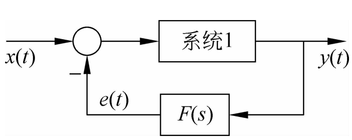

图 5-15

(1) 系统 1 的系统函数 $H_1(s)$，概画出其零、极点和收敛域，系统 1 稳定吗？

(2) 为保证整个反馈系统稳定，试求 $F(s)$ 中可调增益 K 的取值范围。

解 (1) 由于系统 1 是用微分方程 $y'(t)-y(t)=e(t)$ 表示的 LTI 系统，所以系统 1 的系统函数和收敛域为：$H_1(s)=\frac{1}{s-1}$，$\mathrm{Re}\{s\}>1$。

它有一阶极点 $p=1$，收敛域不包含虚轴，由系统稳定的含义可知：系统不稳定。

(2) 上图 5-15 中线性反馈系统的系统函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=\frac{H_1(s)}{1+H_1(s)F(s)}=\frac{\frac{1}{s-1}}{1+\frac{K}{(s-1)(s+2)}}=\frac{s+2}{s^2+s+(K-2)}$$

可以得到它有两个极点 p_1 和 p_2，$p_{1,2}=-0.5\pm0.5\sqrt{9-4K}$。

由系统稳定的要求可知：如果这两个极点落在虚轴以左的左半个 S 平面，即 $\mathrm{Re}\{p_{1,2}\}<0$，因果的线性反馈系统的收敛域包含虚轴，系统就是稳定系统。为确保这一点，必须使 $(9-4K)<1$，即 $K>2$。

综上所述，为确保线性反馈系统稳定，可调增益 K 的取值范围为 $2<K<+\infty$。

例 5-12 （中国科技大学 2005 年硕士研究生入学考试试题）

某连续时间的因果 LTI 系统的零极点如图 5-16 所示。并已知 $H(0)=1.5$，其中 $h(t)$ 为该系统的单位冲激响应。求：

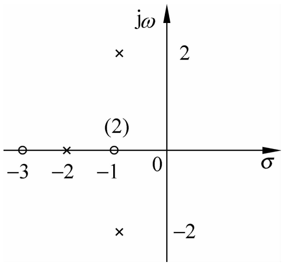

图 5-16

(1) 冲激响应 $h(t)$；

(2) 写出它的线性实系数微分方程表示。

解 (1)由图 5-16 示零极点分布，可写出其系统函数为

$$H(s)=H_0\frac{(s+1)^2(s+3)}{[(s+1)^2+4](s+2)},\quad \mathrm{Re}\{s\}>-1$$

又因为 $H(0)=1.5$ 代入上式即可得

$$H_0=5$$

所以该系统的系统函数及其收敛域如下：

$$H(s)=\frac{5(s^3+5s^2+7s+3)}{s^3+4s^2+9s+10},\quad \mathrm{Re}\{s\}>-1$$

将上式用长除法和部分分式展开为

$$\begin{aligned}H(s)&=5+\frac{5s^2-10s-35}{[(s+1)^2+4](s+2)}\\&=5+\frac{1}{s+2}+\frac{4s}{(s+2)^2+4}-10\frac{2}{(s+1)^2+4}\end{aligned}$$

因为该系统是因果 LTI 系统，所以 $h(t)=0,t<0$，因此，对上述部分分式反拉式变换求得

$$h(t)=5\delta(t)+\mathrm{e}^{-2t}u(t)+4\mathrm{e}^{-t}(\cos2t)u(t)-10\mathrm{e}^{-t}(\sin2t)u(t)$$

(2) 按照(1)中求得系统函数表达式，可以直接写出该因果 LIT 系统的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^3y(t)}{\mathrm{d}t^3}+4\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+9\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+10y(t)=5\frac{\mathrm{d}^3x(t)}{\mathrm{d}t^3}+15\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}+35\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+25x(t)$$

例 5-13 （北京邮电大学 2005 年硕士研究生入学考试试题）

图 5-17 所示 RLC 电路实现的连续时间 LTI 系统，系统的输入为电压源 $f(t)$，电路中的电流 $y(t)$ 作为系统的输出。

(1) 画出这个系统的 s 域模型图；

(2) 求系统的系统函数 $H(s)$。

解 (1) 由图 5-17 所示的电路可直接得到系统的 s 域模型图如图 5-18 所示。

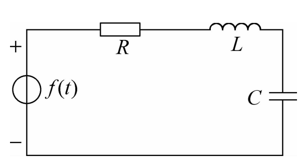

图 5-17

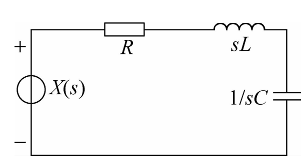

图 5-18

（2）由图 5-18 中的 s 域模型可直接得到系统的系统函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=\frac{1}{R+sL+\frac{1}{sC}}$$

例 5-14 （西安电子科技大学 2005 年硕士研究生入学考试试题）

某线性时不变系统 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f''(t)+3f'(t)+2f(t)$，已知输入 $f(t)=3(1+e^{-t})\varepsilon(t)$时，系统的全响应为 $y(t)=(4e^{-2t}+3e^{-3t}+1)\varepsilon(t)$。

（1）求系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$；

（2）求系统的初始状态 $y(0_-)$，$y'(0_-)$。

解 （1）对微分方程求拉式变换，得到

$$Y(s)=\frac{sy(0_-)+y'(0_-)+5y(0_-)}{s^2+5s+6}+\frac{s^2+3s+2}{s^2+5s+6}F(s)=Y_{zi}(s)+\frac{s+1}{s+3}F(s)$$

对已知的激励和响应求拉式变换，并代入上式，可得

$$\frac{4}{s+2}+\frac{3}{s+3}+\frac{1}{s}=Y_{zi}(s)+\frac{s+1}{s+3}\left(\frac{3}{s}+\frac{3}{s+1}\right)$$

再对上式进行整理可得

$$\begin{aligned}Y_{zi}(s)&=\frac{4}{s+2}+\frac{3}{s+3}+\frac{1}{s}-\frac{s+1}{s+3}\left(\frac{3}{s}+\frac{3}{s+1}\right)\\&=\frac{2s+8}{(s+2)(s+3)}=\frac{4}{s+2}-\frac{2}{s+3}\end{aligned}$$

再对上式求拉式逆变换可得输入输出方程为

$$y_{zi}(t)=2(2e^{-2t}-e^{-3t})\varepsilon(t)$$

（3）由上面的求解可得

$$Y_{zi}(s)=\frac{sy(0_-)+y'(0_-)+5y(0_-)}{s^2+5s+6}$$

根据(1)已经求得

$$Y_{zi}(s)=\frac{2s+8}{(s+2)(s+3)}$$

由上面两式对应关系，可得

$$\begin{cases}y(0_-)=2\\y'(0_-)+5y(0_-)=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y(0_-)=2\\y'(0_-)=-2\end{cases}$$

例 5-15 （北京交通大学 2004 年硕士研究生入学考试试题）

已知连续时间 LTI 因果系统的微分方程为

$$y''(t)-5y'(t)+6y(t)=f(t)+4f''(t),\quad t>0$$

输入 $f(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$，初始状态 $y(0_-)=1$，$y'(0_-)=3$。

（1）利用单边拉普拉斯变换的微分特性将微分方程转换为 s 域代数方程；

（2）由 s 域代数方程求系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$和零状态响应 $y_{zs}(t)$。

解 （1）对上述微分方程两边进行单边拉普拉斯变换，即可求得 s 域代数方程为

$$s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)-5sY(s)+5y(0^-)+6Y(s)=(4s+1)F(s)$$

（2）上述方程可得系统完全响应的 s 域表达式为

$$Y(s)=\frac{sy(0^-)+y'(0^-)-5y(0^-)}{s^2-5s+6}+\frac{4s+1}{s^2-5s+6}F(s)$$

进一步求得零输入响应的 s 域表达式为

$$Y_{zi}(s)=\frac{s-2}{s^2-5s+6}=\frac{1}{s-3}$$

对上式进行拉普拉斯反变换，则可得零输入响应为

$$y_{zi}(t)=F^{-1}\{Y_{zi}(s)\}=e^{3t},\quad t\geqslant 0$$

代入输入，可得零状态响应的 s 域表达式为

$$\begin{aligned}Y_{zs}(s)&=\frac{4s+1}{s^2-5s+6}F(s)=\frac{4s+1}{(s-2)(s-3)(s+1)}\\&=\frac{-1/4}{s+1}+\frac{-3}{s-2}+\frac{13/4}{s-3}\end{aligned}$$

进行拉式反变换可得零状态响应为

$$y_{zs}(t)=F^{-1}\{Y_{zs}(s)\}=\left(-\frac{1}{4}e^{-t}-3e^{2t}+\frac{13}{4}e^{3t}\right)\varepsilon(t)$$

例 5-16　（北京邮电大学 2004 年硕士研究生入学考试试题）

已知某因果 LTI 系统的系统函数 $H(s)$ 的零极点图如图 5-19 所示，且 $H(0)=-1.2$，求：

（1）系统函数 $H(s)$ 及冲激响应 $h(t)$；

（2）写出关联系统的输入输出的微分方程。

解　（1）根据图 5-19 可知：系统零点为(3,0)，极点为(−2,1)和(−2,−1)，根据零极点的性质系统函数可写为

$$\begin{aligned}H(s)&=\frac{H_0(s-3)}{(s+2-j)(s+2+j)}\\&=\frac{H_0(s-3)}{(s+2)^2+1}=\frac{H_0(s-3)}{s^2+4s+5}\end{aligned}$$

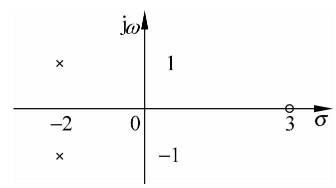

图　5-19

由题目已知条件

$$H(0)=\frac{-3H_0}{5}=-1.2$$

将上式带入，可求得

$$H_0=2$$

所以系统函数为

$$H(s)=\frac{2(s-3)}{s^2+4s+5}$$

对此作拉普拉斯反变换可得相应的冲激响应为

$$h(t)=2e^{-2t}(\cos t-5\sin t)\varepsilon(t)$$

（2）由上面可知：

因为　$$H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{2(s-3)}{s^2+4s+5}$$

所以关联系统的输入输出的微分方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+5y(t)=2\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}-6f(t)$$

例 5-17 （北京航空航天大学 2003 年硕士研究生入学考试试题）

因果稳定 LTI 系统的频响为 $H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{\mathrm{j}\omega+4}{6-\omega^2+5\omega\mathrm{j}}$。

(1) 写出该系统输入输出关系的微分方程；

(2) 求该系统的单位冲激响应 $h(t)$；

(3) 若输入为 $f(t)=\mathrm{e}^{-4t}\varepsilon(t)-t\mathrm{e}^{-4t}\varepsilon(t)$，求系统的输出 $y(t)$。

解 (1) 根据拉普拉斯变换和傅里叶变换的联系可直接得到 s 域系统函数为

$$H(s)=\frac{s+4}{s^2+5s+6}$$

因此，可写出系统的微分方程为

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f''(t)+4f(t)$$

(2) 对系统函数进行部分分式展开得到

$$H(s)=\frac{s+4}{(s+2)(s+3)}=\frac{2}{s+2}+\frac{-1}{s+3}$$

对其进行拉普拉斯反变换，可得到单位冲激响应为

$$h(t)=(2\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$$

(3) 由 $f(t)=\mathrm{e}^{-4t}\varepsilon(t)-t\mathrm{e}^{-4t}\varepsilon(t)$ 可知

$$f'(t)+4f(t)=-\mathrm{e}^{-4t}\varepsilon(t)+\delta(t)$$

因此有

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=-\mathrm{e}^{-4t}\varepsilon(t)+\delta(t)$$

根据叠加定理可得

$$y_1''(t)+5y_1'(t)+6y_1(t)=-\mathrm{e}^{-4t}\varepsilon(t)$$

因此有

$$y_1(t)=\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-3t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

$$y_2''(t)+6y_2'(t)+6y_2(t)=\delta(t)$$

即有

$$y_2(t)=(\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$$

这样，可求出系统的输出为

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t)=\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4t}\right)\varepsilon(t)$$

例 5-18 （北京交通大学 2005 年硕士研究生入学考试试题）

线性时不变连续时间因果系统的微分方程描述为

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=5f'(t)+4f(t)\quad(t>0)$$

输入 $f(t)=\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$，初始状态 $y(0^-)=2$，$y'(0^-)=1$，试由 s 域求：

(1) 系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$ 和零输入响应 $y_{zs}(t)$；

(2) 系统函数 $H(s)$，单位冲激响应 $h(t)$，并判断系统是否稳定。

解 (1) 已知描述系统的微分方程，则对其两边取拉普拉斯变换，即可得到 s 域的系统

输入输出关系式为

$$s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)+3[sY(s)-y(0^-)]+2Y(s)=(5s+4)F(s)$$

经整理，得到系统全响应关系式为

$$Y(s)=\frac{sy(0^-)+y'(0^-)+3y(0^-)}{s^2+3s+2}+\frac{5s+4}{s^2+3s+2}F(s)$$

其中，$Y_{zi}(s)$为零输入响应 $y_{zi}(t)$的拉普拉斯变换式，$Y_{zs}(s)$是零状态响应 $y_{zs}(t)$的拉普拉斯变换式。

要求系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$和零状态响应 $y_{zs}(t)$，只需分别对 $Y_{zi}(s)$、$Y_{zs}(s)$进行拉普拉斯逆变换即可，故零输入响应的 $y_{zi}(t)$为

$$y_{zi}(t)=5e^{-t}-3e^{-2t}\quad(t\geqslant 0)$$

对于零状态响应 $y_{zs}(t)$，因为输入信号为 $f(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$，其拉普拉斯变换式为 $F(s)=\dfrac{1}{s+3}$，所以求得 $Y_{zs}(s)$为

$$Y_f(s)=\frac{5s+4}{s^2+3s+2}F(s)=\frac{5s+4}{s^2+3s+2}\,\frac{1}{s+3}$$

要求其拉普拉斯逆变换，可以先将其化简为常见的拉普拉斯变换对形式，即

$$Y_f(s)=6\,\frac{1}{s+2}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{s+1}-\frac{11}{2}\,\frac{1}{s+3}$$

逐项拉普拉斯逆变换，得到零状态响应 $y_{zs}(t)$为

$$y_{zs}(t)=(6e^{-2t}-0.5e^{-t}-5.5e^{-3t})\varepsilon(t)$$

（2）由（1）中可知，系统零状态响应 s 域表达式为

$$Y_{zs}(s)=\frac{5s+4}{s^2+3s+2}F(s)$$

根据系统函数的定义式，即 $H(s)=\dfrac{Y_{zs}(s)}{F(s)}$，故系统函数为

$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{F(s)}=\frac{5s+4}{s^2+3s+2}=-\frac{1}{s+1}+\frac{6}{s+2}$$

要求系统单位冲激响应函数，只需对上式取拉普拉斯逆变换，则

$$h(t)=(6e^{-2t}-e^{-t})\varepsilon(t)$$

由系统函数表达式可知，系统有一个零点在 $z=-\dfrac{4}{5}$，两个极点于 $p_1=-1$、$p_2=-2$，显然极点均位于 S 左半平面，故系统稳定。

例 5-19 （北京交通大学 2003 年硕士研究生入学考试试题）

描述一 LTI 因果连续时间系统的微分方程为

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=2f'(t)+f(t)$$

已知 $f(t)=e^{-t}u(t)$，$y(0^-)=1$，$y'(0^-)=1$，由 S 域求解：

（1）零输入响应 $y_{zi}(t)$、零状态响应 $y_{zs}(t)$以及完全响应 $y(t)$。

（2）系统函数 $H(s)$、单位冲激响应 $h(t)$，并判断系统是否稳定？

解 （1）先对描述系统特性的微分方程两边同时进行拉普拉斯变换，得

$$s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)+5sY(s)-5y(0^-)+6Y(s)=(2s+1)F(s)$$

移项整理得

$$Y(s)=\frac{sy(0^-)+y'(0^-)+5y(0^-)}{s^2+5s+6}+\frac{2s+1}{s^2+5s+6}F(s)$$

上式右边两项分别对应零输入响应和零状态响应的 S 域表达式，只需将其进行拉普拉斯反变换，即可得到相应的时域响应。

因为由题意可知

$$y(0^-)=1,\quad y'(0^-)=1$$

则零输入响应的 S 域表达式为

$$Y(s)=\frac{sy(0^-)+y'(0^-)+5y(0^-)}{s^2+5s+6}=\frac{s+6}{s^2+5s+6}=\frac{4}{s+2}+\frac{-3}{s+3}$$

要求系统零输入响应，还需对上式进行拉普拉斯反变换，得到零输入响应为

$$Y_{zi}(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y_{zi}(s)\}=4e^{-2t}-3e^{-3t},\quad t\geqslant 0$$

同理，因为零状态响应 S 域表达式为

$$Y(s)=\frac{2s+1}{s^2+5s+6}F(s)=\frac{2s+1}{(s^2+5s+6)(s+1)}=\frac{-1/2}{s+1}+\frac{3}{s+2}+\frac{-5/2}{s+3}$$

则对应的零状态响应为上式的拉普拉斯反变换，即

$$y_{zs}(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y_{zs}(s)\}=\left(-\frac{1}{2}e^{-t}+3e^{-2t}-\frac{5}{2}e^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

显然，完全响应为零输入和零状态响应之和，即

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=-\frac{1}{2}e^{-t}+7e^{-2t}-\frac{11}{2}e^{-3t},\quad t\geqslant 0$$

(2) 系统函数即系统输出输入信号之比，故系统函数由系统的零状态响应决定（对应关系），其 S 域表达式为 $H(s)=\dfrac{Y_{zs}(s)}{F(s)}$，由(1)中所求 S 域表达式可得系统函数的 S 域表达式为

$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{F(s)}=\frac{2s+1}{s^2+5s+6}=\frac{-3}{s+2}+\frac{5}{s+3}$$

对上式进行拉普拉斯反变换，即可得到系统函数时域表达式为

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]=(-3e^{-2t}+5e^{-3t})\varepsilon(t)$$

由系统函数的 S 域表达式可知，其存在两个极点 −2、−3，均在 S 平面左半边，故可判断系统稳定。

例 5-20 （电子科技大学 2003 年硕士研究生入学考试试题）

图 5-20 所示为 RL 电路实现的因果 LTI 系统，电流源输出电流为输入信号 $f(t)$，系统输出时流经电感线圈的电流 $y(t)$，（其中，$R=1\Omega$，$L=1\text{H}$）。

(1) 求关联 $f(t)$ 和 $y(t)$ 的微分方程；

(2) 求系统的频率响应 $H(\omega)$ 和单位冲激响应 $h(t)$。

解 可以先画出 s 域等效状态模型，如图 5-21 所示。

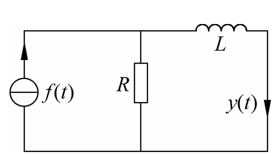

图 5-20

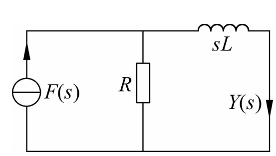

图 5-21

根据系统函数的定义 $H(s)=\dfrac{Y(s)}{F(s)}$和等效模型所示的输入输出关系：

$$Y(s)=\frac{R}{R+sL}F(s)=\frac{1}{1+s}F(s)$$

所以系统函数为

$$H(s)=\frac{1}{1+s}$$

(1) 根据系统函数，得到$(1+s)Y(s)=F(s)$，两边进行反拉普拉斯变换，得到关联 $f(t)$和 $y(t)$的微分方程为

$$y'(t)+y(t)=f(t)$$

(2) 由题意可知，系统为因果 LTI 系统，而由系统函数 $H(s)$可知系统有一极点位于-1处，所以 $H(s)$的收敛域为 $\mathrm{Re}[s]>-1$。显然此极点在收敛域左半平面，收敛域包含虚轴，所以系统的频率响应为

$$H(\omega)=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega}$$

而单位冲激响应 $h(t)$是将系统函数 $H(s)$进行拉普拉斯反变换的结果，即

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$$

例 5-21　(南京邮电大学 2002 年硕士研究生入学考试试题)

已知系统阶跃响应 $s(t)=(1-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$，系统在激励 $x(t)$作用下的零状态响应为 $y(t)=(1-\mathrm{e}^{-2t}-t\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$，试求激励 $x(t)$。

解　由拉普拉斯变换，$S(s)=\dfrac{1}{s}H(s)$，即 $H(s)=s\cdot S(s)$

因为

$$S(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}$$

所以系统函数为

$$H(s)=1-\frac{s}{s+2}=\frac{2}{s+2}$$

系统在激励为 $x(t)$作用下的零状态响应为 $y(t)=(1-\mathrm{e}^{-2t}-t\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$，即 $y(t)$的拉普拉斯变换式为

$$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{s+2}\right)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}-\frac{1}{(s+2)^2}$$

由于 $Y(s)=X(s)\cdot H(s)$，即 $Y(s)/H(s)=X(s)$。所以，要求激励 $x(t)$，只需先求其拉普拉斯变换，再进行反变换即可。

激励 $x(t)$的拉普拉斯变换式为

$$X(s)=\frac{Y(s)}{H(s)}=\frac{\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{1}{(s+2)^2}}{\dfrac{2}{s+2}}=\frac{1}{s}-\frac{\frac{1}{2}}{s+2}$$

再对上式进行拉普拉斯反变换，即可得激励 $x(t)$为

$$x(t)=\left(1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right)\varepsilon(t)$$

例 5-22 已知一因果 LTI 系统微分方程为 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f(t)$，求：

(1) 系统函数 $H(s)$ 和单位冲激响应 $h(t)$；

(2) 当输入 $f(t)=\varepsilon(t)$ 时，系统输出 $y(t)$ 的零状态响应、零输入响应。

解 (1) 对微分方程求拉式变换得

$$(s^2+3s+2)Y(s)=F(s)$$

上式整理后得到系统函数为

$$H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{1}{s^2+3s+2}=\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3}$$

对上式求拉式逆变换，可得单位冲激响应为

$$h(t)=(\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$$

(2) $f(t)=\varepsilon(t)\leftrightarrow F(s)=\dfrac{1}{s}$

对微分方程求拉式变换：

$$[s^2Y(s)-sy(0_-)-y'(0_-)]+3[sY(s)-y(0_-)]+2Y(s)=F(s)$$

由此可得 s 域系统零输入响应为

$$\begin{aligned}Y_{zi}(s)&=\frac{sy(0_-)+y'(0_-)+3y(0_-)}{s^2+3s+2}\\&=\frac{1}{2}\frac{s+3}{s^2+3s+2}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{s+2}\end{aligned}$$

所以

$$y_{zi}(t)=(\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$$

同理 s 域系统零状态响应为

$$\begin{aligned}Y_{zs}(s)&=\frac{1}{s^2+3s+2}F(s)=\frac{1}{s(s^2+3s+2)}\\&=\frac{1}{2}\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+2}\end{aligned}$$

所以

$$y_{zs}(t)=\left(\frac{1}{2}-\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right)\varepsilon(t)$$

例 5-23 （浙江大学 2000 年硕士研究生入学考试试题）

某线性时不变二阶系统，其系统函数为 $H(s)=\dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$，已知输入激励 $f(t)=\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$ 及起始状态 $y(0^-)=1, y'(0^-)=2$。求系统的全响应 $y(t)$ 及零输入响应 $y_{zi}(t)$、零状态响应 $y_{zs}(t)$，并确定其自由响应和强迫响应。

解 已知系统函数为 $H(s)=\dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$，可得系统的微分方程为

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f'(t)+3f(t)$$

再对上面微分方程求拉式变换，得

$$Y(s)=\frac{sy(0_-)+y'(0_-)+3y(0_-)}{s^2+3s+2}+\frac{s+3}{s^2+3s+2}F(s)=Y_{zi}(s)+Y_{zs}(s)$$

其中

$$Y_{zi}(s)=\frac{sy(0_-)+y'(0_-)+3y(0_-)}{s^2+3s+2}=\frac{s+5}{s^2+3s+2}=\frac{4}{s+1}-\frac{3}{s+2}$$

$$Y_{zs}(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}F(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}\frac{1}{s+3}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

再对上式求拉式逆变换得零输入响应和零状态响应分别为

$$y_{zi}(t)=(4\mathrm{e}^{-t}-3\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$$

$$y_{zs}(t)=(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$$

所以系统的全响应为

$$y(t)=(5\mathrm{e}^{-t}-4\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$$

根据全响应的表达式可知，其中的各项均与系统函数的极点有关，而与激励的函数形式无关，因此，全响应中均为自由响应，强迫响应为0。

例 5-24　描述某线性时不变连续系统的输入输出方程为

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=7f'(t)+17f(t)$$

已知 $y(0_-)=1$，$y'(0_-)=2$，$f(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$，求系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$ 和零状态响应 $y_{zs}(t)$。

解　对已知微分方程取拉式变换，得

$$s^2Y(s)-s-2+5sY(s)-5+6Y(s)=\frac{7s+17}{s+1}$$

解上述方程可得

$$Y(s)=\frac{s+7}{(s+2)(s+3)}+\frac{7s+17}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

所以系统的 s 域零输入响应是

$$Y_{zi}(s)=\frac{s+7}{(s+2)(s+3)}=\frac{5}{s+2}-\frac{4}{s+3}$$

上式拉普拉斯反变换得

$$y_{zi}(t)=(5\mathrm{e}^{-2t}-4\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$$

系统的 s 域零状态响应是

$$Y_{zs}(s)=\frac{7s+17}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{5}{s+1}-\frac{3}{s+2}+\frac{-2}{s+3}$$

上式拉普拉斯反变换得

$$y_{zs}(t)=(5\mathrm{e}^{-t}-3\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$$

例 5-25　已知电路的输入阻抗 $Z(s)$ 的零、极点如图 5-22 所示，已知 $Z(0)=3\Omega$，则电路的 $R=$________；$L=$________；$C=$________。

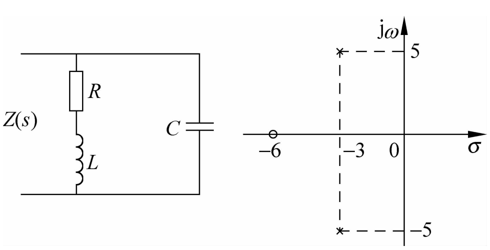

图　5-22

解 根据系统零极点图,可得到系统函数为

$$Z(s)=K\frac{s+6}{(s+3-5\mathrm{j})(s+3+5\mathrm{j})}=K\frac{s+6}{s^2+6s+34}$$

初值 $Z(0)=3\Omega$,代入上式可得 $K=17$。再由电路有

$$Z(s)=\frac{\frac{1}{sC}(sL+R)}{R+sL+\frac{1}{sC}}=\frac{sL+R}{LCs^2+RCs+1}=\frac{1}{C}\frac{\left(s+\frac{R}{L}\right)}{\left(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}\right)}$$

比较上两式的系数得

$$\frac{1}{C}=K,\quad C=\frac{1}{17}F$$

$$\frac{1}{LC}=34,\quad L=\frac{1}{2}H$$

$$\frac{R}{L}=6,\quad R=3\Omega$$

例 5-26 (北京邮电大学 2004 年硕士研究生入学考试试题)

已知某 LTI 系统的系统函数 $H(s)$ 的零极点图如图 5-23 所示,且 $H(0)=-1.2$,求:

(1) 系统函数 $H(s)$ 及冲激响应 $h(t)$;

(2) 写出关联系统的输入输出的微分方程。

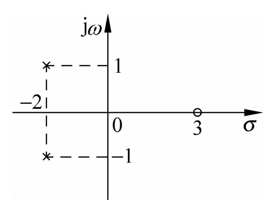

图 5-23

解 (1) 根据系统的零极点图可得 $H(s)$ 为

$$H(s)=H_0\frac{s-3}{(s+2+\mathrm{j})(s+2-\mathrm{j})}=H_0\frac{s-3}{(s+2)^2+1}$$

由 $H(0)=-1.2$ 得

$$H(0)=-H_0\frac{3}{5}=-1.2$$

所以

$$H_0=2$$

所以系统函数是

$$H(s)=\frac{2(s-3)}{(s+2)^2+1}=\frac{2s-6}{s^2+4s+5}$$

利用部分分式展开法得到

$$H(s)=\frac{2(s-3)}{(s+2)^2+1}=2\left[\frac{s}{(s+2)^2+1}-3\frac{1}{(s+2)^2+1}\right]$$

对上式求拉氏反变换,得冲激响应为

$$h(t)=2[\mathrm{e}^{-2t}\cos t-3\mathrm{e}^{-2t}\sin t]\varepsilon(t)$$

(2) 由求得的 $H(s)$ 可得系统的微分方程为

$$y''(t)+4y'(t)+5y(t)=2f'(t)-6f(t)$$

例 5-27 某系统的零极点图如图 5-24 所示,且其冲激响应 $h(t)$ 的初值 $h(0_+)=5$,求系统函数 $H(s)$。

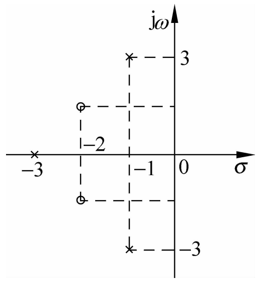

图 5-24

解 根据系统的零极点图可得 $H(s)$ 为

$$H(s)=H_0\frac{(s+2+\mathrm{j})(s+2-\mathrm{j})}{(s+3)(s+1+\mathrm{j}3)(s+1-\mathrm{j}3)}=H_0\frac{s^2+4s+5}{(s+3)(s^2+2s+10)}$$

由拉氏变换的初值定理可得

$$h(0_+)=\lim_{s\to\infty}sH(s)=\lim_{s\to\infty}sH_0\frac{s^2+4s+5}{(s+3)(s^2+2s+10)}=H_0=5$$

所以系统函数是

$$H(s)=\frac{5(s^2+4s+5)}{(s+3)(s^2+2s+10)}$$

5.3　习题解答

5-1　试求下列函数的拉氏变换：

(1) $f(t)=\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)+\sin 2t\cdot\varepsilon(t)$；

(2) $f(t)=\sqrt{2}\cos(t+\frac{\pi}{4})\varepsilon(t)$。

解　(1) 由于

$$\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+3}$$

$$\sin 2t\cdot\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{2}{s^2+4}$$

由线性，得 $f(t)$的象函数

$$F(s)=\frac{1}{s+3}+\frac{2}{s^2+4}=\frac{s^2+2s+10}{(s+3)(s^2+4)}$$

(2)

$$f(t)=\sqrt{2}\cos t\cos\frac{\pi}{4}-\sqrt{2}\sin t\sin\frac{\pi}{4}=\cos t-\sin t$$

所以

$$F(s)=\frac{s}{1+s^2}-\frac{1}{1+s^2}=\frac{s-1}{1+s^2}$$

5-2　求下面图5-25所示函数的拉氏变换。

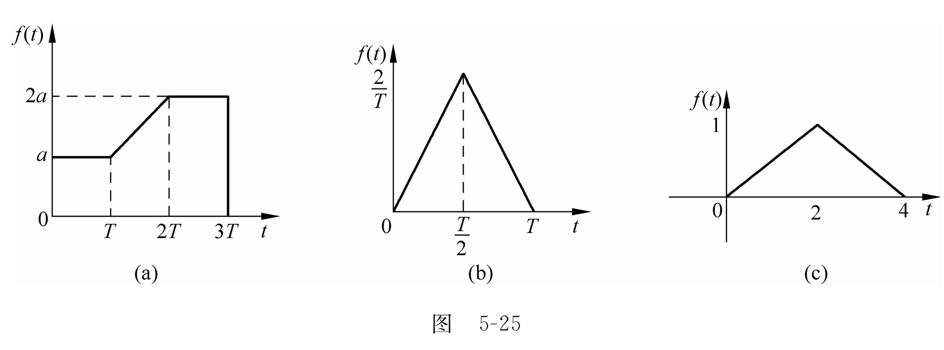

图　5-25

解　(a)

$$f(t)=a\cdot 1(t)+\frac{a}{T}(t-T)-\frac{1}{T}(t-2T)-2a\cdot 1(t-3T)$$

利用延迟性质，求得 $f(t)$的拉氏变换为

$$F(s) = \frac{a}{s} + \frac{a}{Ts^2}\mathrm{e}^{-Ts} - \frac{a}{Ts^2}\mathrm{e}^{-2Ts} - 2a\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-3Ts}$$

(b)

$$f(t) = \frac{4}{T^2}t - \frac{8}{T^2}\left(t - \frac{T}{2}\right) + \frac{4}{T^2}(t - T)$$

利用延迟性质，求得 $f(t)$的拉氏变换为

$$F(s) = \frac{4}{T^2 s^2} - \frac{8}{T^2 s^2}\mathrm{e}^{-Ts} + \frac{4}{T^2 s^2}\mathrm{e}^{-Ts} = \frac{4}{T^2 s^2}(1 - 2\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}s} + \mathrm{e}^{-Ts})$$

(c)

$$f(t) = \frac{1}{2}t[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)] + \left(-\frac{1}{2}t + 2\right)[\varepsilon(t-2) - \varepsilon(t-4)]$$

求导得

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)] - \frac{1}{2}[\varepsilon(t-2) - \varepsilon(t-4)]$$

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \leftrightarrow F_1(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-2s}}{s} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-2s} - \mathrm{e}^{-4s}}{s} = \frac{1}{2s}(1 - \mathrm{e}^{-2s})^2$$

所以

$$F(s) = \frac{1}{s}F_1(s) = \frac{1}{2s^2}(1 - \mathrm{e}^{-2s})^2$$

5-3 求图 5-26 锯齿波的拉氏变换

解 锯齿波表达式

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{E}{T}t[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)] \\ &= \frac{E}{T}t\varepsilon(t) - \frac{E}{T}(t - T + T)\varepsilon(t-T) \\ &= \frac{E}{T}t\varepsilon(t) - \frac{E}{T}(t-T)\varepsilon(t-T) - E\varepsilon(t-T) \end{aligned}$$

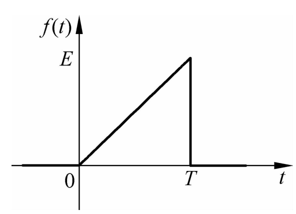

图 5-26

因为

$$\frac{E}{T}t\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{E}{T}\frac{1}{s^2}$$

$$-\frac{E}{T}(t-T)\varepsilon(t-T) \leftrightarrow -\frac{E}{T}\frac{\mathrm{e}^{-sT}}{s^2}$$

$$-E\varepsilon(t-T) \leftrightarrow -E\frac{\mathrm{e}^{-sT}}{s}$$

所以

$$f(t) \leftrightarrow F(s) = \frac{E}{T}\frac{1}{s^2} - \frac{E}{T}\frac{\mathrm{e}^{-sT}}{s^2} - E\frac{\mathrm{e}^{-sT}}{s} = \frac{E}{Ts^2}[1 - (Ts+1)\mathrm{e}^{-sT}]$$

5-4 已知 $F(s) = \dfrac{10}{s(s+1)}$。

(1) 用终值定理，求 $t \to \infty$时的 $f(t)$的值；

(2) 通过取 $F(s)$的拉氏反变换，求 $t \to \infty$时 $f(t)$的值。

解 （1）由终值定理知

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)=\lim_{s\to 0}s\,\frac{10}{s(s+1)}=10$$

（2）利用部分分式法将 $F(s)$改写成

$$F(s)=\frac{10}{s(s+1)}=\frac{10}{s}+\frac{-10}{s+1}$$

则可知 $F(s)$的拉氏反变换为

$$f(t)=10-10\mathrm{e}^{-t}$$

则

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=10-\lim_{t\to\infty}10\mathrm{e}^{-t}=10$$

可见，两种方法求终值结果相同。

5-5 已知 $F(s)=\dfrac{1}{(s+2)^2}$。

（1）利用初值定理求 $f(0)$的值。

（2）通过取 $F(s)$的拉氏反变换求 $f(t)$，并求 $f'(t)$及 $f(0)$和 $f'(0)$。

解 （1）$f(0)=\lim\limits_{t\to 0}f(t)=\lim\limits_{s\to\infty}s\cdot F(s)=\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{s}{(s+2)^2}=0$

（2）$F(s)$的拉氏反变换为 $f(t)=t\mathrm{e}^{-2t}$，则

$$f'(t)=\mathrm{e}^{-2t}(1-2t)$$
$$f(0)=t\,\mathrm{e}^{-2t}\big|_{t=0}=0$$
$$f'(0)=\mathrm{e}^{-2t}(1-2t)\big|_{t=0}=1$$

可见，两种方法求初值结果相同。

5-6 求下列函数 $F(s)$的象函数 $f(t)$：

（1）$F(s)=\dfrac{s+4}{s(s+1)(s+2)}$；

（2）$F(s)=\dfrac{2s^2+6s+6}{s^2+3s+2}$；

（3）$F(s)=\dfrac{2s^2+3s+3}{s^3+6s^2+11s+6}$；

（4）$F(s)=\dfrac{2s^3+8s^2+4s+8}{s(s+1)(s^2+4s+8)}$；

（5）$F(s)=\dfrac{s^2}{(s+1)^3}$；

（6）$F(s)=\dfrac{s+1}{s^2+s-6}$；

（7）$F(s)=\dfrac{s^3+s^2-s+5}{s}$；

（8）$F(s)=\dfrac{2s+5}{(s+2)^2+9}$。

解 （1）这里分母多项式有三个单根：$s_1=0$，$s_2=-1$，$s_3=-2$。故 $F(s)$可展开为

$$F(s)=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+1}+\frac{K_3}{s+2}$$

各系数为

$$K_1 = sF(s)\big|_{s=0} = \left.\frac{s+4}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = 2$$

$$K_2 = (s+1)F(s)\big|_{s=-1} = \left.\frac{s+4}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = -3$$

$$K_3 = (s+2)F(s)\big|_{s=-2} = \left.\frac{s+4}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = 1$$

所以

$$F(s) = \frac{2}{s} + \frac{-3}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

最后反变换为

$$f(t) = (2 - 3e^{-t} + e^{-2t})\varepsilon(t)$$

（2）由于 $F(s)$的分子分母为同次幂，先长除，得

$$F(s) = 2 + \frac{2}{s^2+3s+2} = 2 + F_1(s)$$

$$F_1(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

解得系数

$$K_1 = 2,\quad K_2 = -2$$

从而

$$F(s) = 2 + \frac{2}{s+1} + \frac{-2}{s+2}$$

所以得

$$f(t) = 2\delta(t) + 2e^{-t} - 2e^{-2t}$$

（3）展成部分分式：

$$F(s) = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2} + \frac{k_3}{s+3}$$

解得

$$k_1 = 1, k_2 = -5, k_3 = 6$$

所以

$$f(t) = e^{-t} - 5e^{-2t} + 6e^{-3t} \quad (t \geqslant 0)$$

（4）展成部分分式：

$$F(s) = \frac{2s^3+8s^2+4s+8}{s(s+1)(s^2+4s+8)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{As+B}{s^2+4s+8}$$

实单根的系数求法同前面一样，这样有

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{-2}{s+1} + \frac{As+B}{s^2+4s+8}$$

可以用公分母的方法，或是设定两个特殊的 S 值来求系数 A 和 B，比如设 $s=-2,1$，得到

$$\begin{cases} 2 = -\dfrac{1}{2} + 2 - \dfrac{1}{2}A + \dfrac{1}{4}B \\ \dfrac{11}{13} = \dfrac{A+B}{13} \end{cases}$$

所以

$$A=3, B=8$$

用配方法求共轭复根部分的拉普拉斯反变换，即

$$\frac{As+B}{s^2+4s+8}=\frac{3s+8}{s^2+4s+8}=\frac{3(s+2)+2}{(s+2)^2+4}=\frac{3(s+2)}{(s+2)^2+4}+\frac{2}{(s+2)^2+4}$$

$$\frac{3(s+2)}{(s+2)^2+4}\leftrightarrow 3\mathrm{e}^{-2t}\cos(2t)\varepsilon(t)$$

$$\frac{2}{(s+2)^2+4}\leftrightarrow \mathrm{e}^{-2t}\sin(2t)\varepsilon(t)$$

$$f(t)=\varepsilon(t)-2\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)+\mathrm{e}^{-2t}[3\cos 2t+\sin 2t]\varepsilon(t)$$

（5）对于本例的重根情况，$F(s)$可展开为

$$F(s)=\frac{K_{11}}{(s+1)^3}+\frac{K_{12}}{(s+1)^2}+\frac{K_{13}}{s+1}$$

其中

$$K_{11}=(s+1)^3F(s)\big|_{s=-1}=1$$

$$K_{12}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s+1)^3F(s)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s^2)\big|_{s=-1}=-2$$

$$K_{13}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}[(s+1)^3F(s)]\big|_{s=-1}=1$$

从而有

$$F(s)=\frac{1}{(s+1)^3}-\frac{2}{(s+1)^2}+\frac{1}{s+1}$$

反变换得原函数

$$f(t)=\frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-t}-2t\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-t}\quad(t\geqslant 0)$$

（6）部分分式法：

$$F(s)=\frac{s+1}{s^2+s-6}=\frac{s+1}{(s+3)(s-2)}=\frac{C_1}{s+3}+\frac{C_2}{s-2}$$

其中

$$C_1=\frac{s+1}{(s+3)(s-2)}(s+3)\big|_{s=-3}=\frac{2}{5}$$

$$C_2=\frac{s+1}{(s+3)(s-2)}(s-2)\big|_{s=2}=\frac{3}{5}$$

所以

$$F(s)=\frac{2}{5}\left(\frac{1}{s+3}\right)+\frac{3}{5}\left(\frac{1}{s-2}\right)$$

因此 $F(s)$的拉氏反变换为

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{3}{5}\mathrm{e}^{2t}$$

（7）$F(s)=\dfrac{s^3+s^2-s+5}{s}=s^2+s-1+\dfrac{5}{s}$

所以

$$f(t)=\delta''(t)+\delta'(t)-\delta(t)+5$$

(8) $F(s)=\dfrac{2s+5}{(s+2)^2+9}=\dfrac{2(s+2)}{(s+2)^2+3^2}+\dfrac{1}{3}\dfrac{3}{(s+2)^2+3^2}$

所以

$$f(t)=2e^{-2t}\cos 3t+\frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t$$

5-7 已知 $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+3\dfrac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$，求 $H(s)$和 $h(t)$。

解 对微分方程两边取拉氏变换得

$$(s^2+3s+2)Y(s)=X(s)$$

所以

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{(s^2+3s+2)}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

则

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]=(e^{-t}-e^{-2t})\varepsilon(t)$$

5-8 如图 5-27 所示系统，以 $u_1(t)$为输入，求响应分别为 $i_1(t)$，$i_2(t)$和 $u_c(t)$时的传递函数。

解 s 域模型如图 5-28 所示。

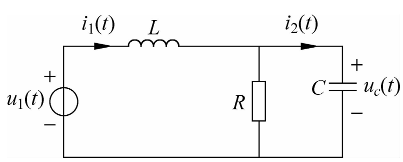

图 5-27

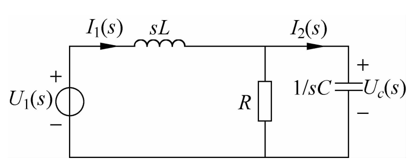

图 5-28

可用节点法写出关于 $U_c(s)$的方程

$$\left(\frac{1}{sL}+\frac{1}{R}+sC\right)U_c(s)=\frac{U_1(s)}{sL}$$

解得

$$U_c(s)=\frac{R}{LCRs^2+Ls+R}U_1(s)$$

再分别求得 $I_1(s)$和 $I_2(s)$为

$$I_1(s)=\frac{RCs+1}{LCRs^2+Ls+R}U_1(s)$$

$$I_2(s)=\frac{RCs}{LCRs^2+Ls+R}U_1(s)$$

从而得以下传递函数

$$H_1(s)=\frac{I_1(s)}{U_1(s)}=\frac{RCs+1}{LCRs^2+Ls+R}\quad\text{（输入导纳）}$$

$$H_2(s)=\frac{I_2(s)}{U_1(s)}=\frac{RCs}{LCRs^2+Ls+R}\quad\text{（转移导纳）}$$

$$H_3(s)=\frac{U_c(s)}{U_1(s)}=\frac{R}{LCRs^2+Ls+R}\quad\text{（转移电压比）}$$

5-9 给定电路如图 5-29 所示，求对应的系统函数 $H(s)=\dfrac{I_2(s)}{X(s)}$。

解 列写电路的网孔方程

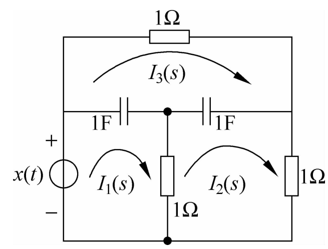

图 5-29

$$\begin{cases}\left(1+\dfrac{1}{s}\right)I_1(s)-I_2(s)-\dfrac{1}{s}I_3(s)=X(s)\\-I_1(s)+\left(2+\dfrac{1}{s}\right)I_2(s)-\dfrac{1}{s}I_3(s)=0\\-\dfrac{1}{s}I_1(s)-\dfrac{1}{s}I_2(s)+\left(1+\dfrac{2}{s}\right)I_3(s)=0\end{cases}$$

解得

$$H(s)=\frac{I_2(s)}{X(s)}=\frac{s^2+2s+1}{s^2+5s+2}$$

5-10 设某 LTI 系统的阶跃响应 $s(t)=(1-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$，为使系统的零状态响应 $y(t)=(1-\mathrm{e}^{-2t}-t\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$，问系统的输入信号 $f(t)$应是什么？

解 首先由阶跃响应求出冲激响应，即

$$\begin{aligned}h(t)&=s'(t)=\delta(t)+2\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)-\mathrm{e}^{-2t}\delta(t)\\&=2\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)\end{aligned}$$

故传递函数

$$H(s)=\mathcal{L}[h(t)]=\frac{2}{s+2}$$

又因零状态响应的象函数

$$Y(s)=\mathcal{L}[1-\mathrm{e}^{-2t}-t\mathrm{e}^{-2t}]=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}-\frac{1}{(s+2)^2}$$

所以输入信号的变换为

$$F(s)=\frac{Y(s)}{H(s)}=\frac{\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{1}{(s+2)^2}}{\dfrac{2}{s+2}}=\frac{1}{s}-\frac{1}{2(s+2)}$$

最后得

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\left(1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right)\varepsilon(t)$$

5-11 已知 $H(s)=\dfrac{s[(s-1)^2+1]}{(s+1)^2(s^2+4)}=\dfrac{s(s-1+\mathrm{j})(s-1-\mathrm{j})}{(s+1)^2(s+2\mathrm{j})(s-2\mathrm{j})}$

求其零、极点，并画出零极点图。

解 极点

$$s_1=s_2=-1;\quad s_3=2\mathrm{j};\quad s_4=-2\mathrm{j}$$

零点

$$z_1=0;\quad z_2=1+\mathrm{j};\quad z_3=1-\mathrm{j}$$

零极点图如图 5-30 所示。

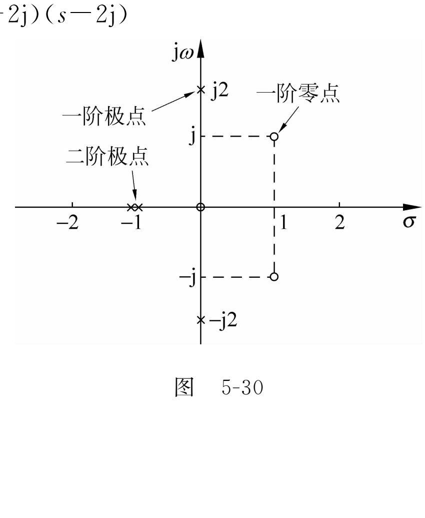

图 5-30

5-12 研究表明，某导弹跟踪系统的微分方程为

$$y^{(3)}(t)+35.714y''(t)+119.741y'(t)+98.1y(t)=34.5f''(t)+119.7f'(t)+98.1f(t)$$

它在飞行过程中会受到各种干扰，问系统是否能抑制干扰而稳定地工作？

解 对微分方程取拉氏变换，可得系统函数

$$H(s)=\frac{34.5s^2+119.7s+98.1}{s^3+35.714s^2+119.741s+98.1}$$

分母 $D(s)$ 中，$a_0=98.1$，$a_1=119.741$，$a_2=35.714$，$a_3=1$，显然，$a_1a_2>a_0a_3$，故系统稳定。

5-13 设有方程

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)$$

已知 $y(0_-)=1$，$y'(0_-)=2$，试求 $y(t)$。

解 对微分方程取拉氏变换，并代入起始状态，则得

$$s^2Y(s)-sy(0_-)-y'(0_-)+3sY(s)-3y(0_-)+2Y(s)=\frac{1}{s+3}$$

$$(s^2+3s+2)Y(s)=\frac{1}{s+3}+s+5=\frac{s^2+8s+16}{s+3}$$

解得

$$Y(s)=\frac{s^2+8s+16}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{K_1}{s+1}+\frac{K_2}{s+2}+\frac{K_3}{s+3}$$

解得

$$K_1=4.5,\quad K_2=-4,\quad K_3=0.5$$

故有

$$Y(s)=\frac{4.5}{s+1}+\frac{-4}{s+2}+\frac{0.5}{s+3}$$

取反变换，得完全响应

$$y(t)=(4.5\mathrm{e}^{-t}-4\mathrm{e}^{-2t}+0.5\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$$

5-14 已知 $\dfrac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+5\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+6y(t)=2\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+8x(t)$

$x(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$，起始条件为：$y(0^-)=3$，$y'(0^-)=2$，求 $y(t)$。

解 对微分方程两边取拉氏变换

$$s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)+5[sY(s)-y(0^-)]+6Y(s)=(2s+8)X(s)$$

$$Y(s)=\underbrace{\frac{2s+8}{s^2+5s+6}X(s)}_{Y_{zs}(s)}+\underbrace{\frac{(s+5)y(0^-)+y'(0^-)}{s^2+5s+6}}_{Y_{zi}(s)}$$

$$Y_{zs}(s)=\frac{2s+8}{s^2+5s+6}X(s)=\frac{2s+8}{s^2+5s+6}\cdot\frac{1}{s+1}$$

$$=\frac{2s+8}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{3}{s+1}-\frac{4}{s+2}+\frac{1}{s+3}$$

所以

$$y_{zs}(t)=(3\mathrm{e}^{-t}-4\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$$

$$Y_{zi}(s)=\frac{(s+5)y(0^-)+y'(0^-)}{s^2+5s+6}=\frac{3s+17}{s^2+5s+6}=\frac{11}{s+2}-\frac{8}{s+3}$$

$$y_{zi}(t)=(11\mathrm{e}^{-2t}-8\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$$

$$y(t)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t)=(3\mathrm{e}^{-t}+7\mathrm{e}^{-2t}-7\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$$

5-15　求下列方程组的解

$$\begin{cases} y''-x''+x'-y=\mathrm{e}^t-2 \\ 2y''-x''-2y'+x=-t \end{cases}$$

满足初始条件

$$\begin{cases} y(0)=y'(0)=0 \\ x(0)=x'(0)=0 \end{cases}$$

解　对方程组两端取拉氏变换，设 $y(t)\leftrightarrow Y(s)$，$x(t)\leftrightarrow X(s)$，并考虑初始条件，有

$$\begin{cases} s^2Y(s)-s^2X(s)+sX(s)-Y(s)=\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{2}{s} \\ 2s^2Y(s)-s^2X(s)-2sY(s)+X(s)=-\dfrac{1}{s^2} \end{cases}$$

整理化简后得

$$\begin{cases} (s+1)Y(s)-sX(s)=\dfrac{-s+2}{s(s-1)^2} \\ 2sY(s)-(s+1)X(s)=-\dfrac{1}{s^2(s-1)} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} Y(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2} \\ X(s)=\dfrac{2s-1}{s^2(s-1)^2} \end{cases}$$

对 $X(s)$，$Y(s)$求逆变换，可得方程组的解

$$\begin{cases} y(t)=1-\mathrm{e}^t+t\mathrm{e}^t \\ x(t)=-t+t\mathrm{e}^t \end{cases}$$

5-16　如图 5-31 所示电路，$t\leqslant 0$ 时电路处于稳态。设 $R_1=4\Omega$，$R_2=2\Omega$，$L=4\mathrm{H}$，$C=1\mathrm{F}$，求 $t\geqslant 0$ 时的响应 $u_c(t)$。

解　由电路可得起始状态

$$i_L(0_-)=\frac{6}{4+2}=1\mathrm{A}$$

$$u_C(0_-)=\frac{R_2}{R_1+R_2}U_s=\frac{2}{4+2}\times 6=2\mathrm{V}$$

从而可得电路的 s 域模型如图 5-32。

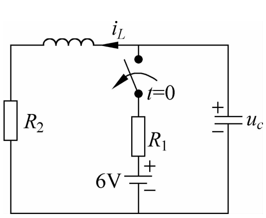

图　5-31

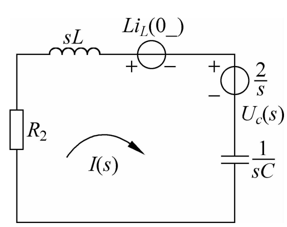

图　5-32

列出网孔方程为

$$\left(R_2+sL+\frac{1}{sC}\right)I(s)=-1-\frac{2}{s}$$

即有

$$I(s)=\frac{-(s+2)}{(s+1)^2}=\frac{-1}{(s+1)^2}+\frac{-1}{s+1}$$

取反变换得

$$i(t)=-t\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-t}\quad(t\geqslant 0)$$

又因为

$$U_C(s)=\frac{2}{s}+\frac{1}{s}I(s)=\frac{2}{s}-\frac{s+2}{s(s+1)^2}$$

最后的响应

$$u_c(t)=t\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-t}\quad(t\geqslant 0)$$