第 7 章

数　　列

7.1　数列的概念

生活实例

观察下面的例子.

(1) 某班学生共 42 人,排成 7 排,从前到后每排人数依次为

$$6,6,6,6,6,6,6$$

(2) 图 7-1 所示为某仓库码放的一堆圆柱形木料,共放了 8 层,自上而下各层木料的根数依次为

$$4,5,6,7,8,9,10,11$$

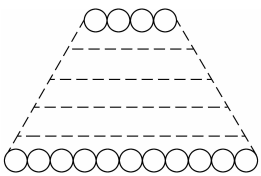

图　7-1

(3) 正整数 1,2,3,4,5,…的倒数排成一列数:

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots$$

(4) 2 的正整数次幂按从小到大的顺序依次排成一列数:

$$2^1,2^2,2^3,2^4,2^5,\cdots$$

上述各例最终都归结为研究按照一定次序排成的一列数的问题.

探索新知识

定义 按照一定次序排成的一列数叫做**数列**.

数列中的每一个数都叫做这个数列的**项**,其中第 1 个数叫做**第 1 项**,也叫**首项**;第 2 个数叫做**第 2 项**;…;第 n 个数叫做**第 n 项**,也叫**通项**,n 叫做**项序号**或**项数**.

一般的,数列的各项可以用带下标的字母依次表示为

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

其中,a_n 是数列的第 n 项,此时,可将数列简记作 $\{a_n\}$.

如果数列只有有限多项,那么称数列为**有穷数列**;如果数列有无限多项,那么称数列为**无穷数列**.

例如,在前面四个例子中,(1)、(2)中的数列是有穷数列;(3)、(4)中的数列是无穷数列.

若数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与项序号 n 之间能用一个公式 $a_n=f(n)$ 表示,则称 $a_n=f(n)$ 为数列 $\{a_n\}$ 的**通项公式**.

例如,数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$ 的通项公式是 $a_n=\frac{1}{n}$.

巩固新知识

例 1 根据下列数列 $\{a_n\}$ 的通项公式,写出它的前 5 项.

(1) $a_n=2n-1$;　　(2) $a_n=(-1)^n \frac{n}{n+1}$.

解 (1) 在通项公式 $a_n=2n-1$ 中,n 依次取 1,2,3,4,5,得该数列的前 5 项依次为

$$1, 3, 5, 7, 9$$

(2) 在通项公式 $a_n=(-1)^n \frac{n}{n+1}$ 中,n 依次取 1,2,3,4,5,得该数列的前

5 项依次为

$$-\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ -\frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ -\frac{5}{6}.$$

例 2　已知数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$，求 a_{10} 和 a_{24}.

解　将 $n=10$ 和 $n=24$ 分别代入通项公式 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$ 中，得该数列的第 10 项和第 24 项分别为

$$a_{10}=\frac{1}{10\times(10+1)}=\frac{1}{10\times 11}=\frac{1}{110}$$

$$a_{24}=\frac{1}{24\times(24+1)}=\frac{1}{24\times 25}=\frac{1}{600}.$$

例 3　写出下面数列$\{a_n\}$的一个通项公式.

(1) 2，4，6，8，10，…

(2) $\frac{2^2-1}{2}$，$\frac{3^2-1}{3}$，$\frac{4^2-1}{4}$，$\frac{5^2-1}{5}$，…

解　(1) 数列的项正好是项序号的 2 倍，因此，该数列的通项公式是 $a_n=2n$；

(2) 数列的项是分数形式，分母是项序号加 1，分子是分母的平方减 1，所以它的通项公式是

$$a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1}$$

即

$$a_n=\frac{n(n+2)}{n+1}.$$

练习题 7.1

1. 根据数列$\{a_n\}$的通项公式填空.

(1) 若 $a_n=n^2$，则 $a_1=$________，$a_2=$________，$a_5=$________；

(2) 若 $a_n=10n$，则 $a_1=$________，$a_3=$________，$a_9=$________；

(3) 若 $a_n=\frac{1}{n^3}$，则 $a_2=$________，$a_5=$________，$a_{10}=$________.

2. 写出−1 的 1 次幂，2 次幂，3 次幂，…排成的数列.

3. 填空题

(1) 数列 3，6，9，12，15，…的通项公式是________，$a_{10}=$________.

(2) 数列 $1^2,2^2,3^2,4^2$，…的通项公式是________，$a_9=$________.

(3) 数列 $\frac{1}{1\times2},\frac{1}{2\times3},\frac{1}{3\times4},\frac{1}{4\times5}$，…的通项公式是________.

4. 写出下面数列 $\{a_n\}$ 的一个通项公式.

(1) 15，25，35，45，55，…

(2) $\frac{2}{1},\frac{3}{4},\frac{4}{9},\frac{5}{16},\frac{6}{25},\cdots$

习题 7.1

1. 按规律填空.

(1) 1，4，9，________，25，36，________，…，该数列的通项公式为________.

(2) 1，$\sqrt{2}$，________，2，$\sqrt{5}$，________，$\sqrt{7}$，…，该数列的通项公式为________.

(3) 0，________，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，________，$\frac{5}{6}$，…，该数列的通项公式为________.

2. 写出下面数列的一个通项公式.

(1) 2，7，12，17，22，27，…

(2) $\frac{2}{3},\frac{3}{8},\frac{4}{15},\frac{5}{24},\frac{6}{35},\cdots$

7.2　等差数列

7.2.1　等差数列的定义及其通项公式

温故而知新

观察下列数列：

(1) 3,7,11,15,19,….

(2) 7,2,−3,−8,−13,….

(3) 6,6,6,6,6,….

(4) a,$a+d$,$a+2d$,$a+3d$,….

在数列(1)中，从第 2 项起，每一项减去它的前一项，所得的差都等于常数 4；在数列(2)中，从第 2 项起，每一项减去它的前一项，所得的差都等于常数 −5；在数列(3)中，从第 2 项起，每一项减去它的前一项，所得的差都等于常数 0；在数列(4)中，从第 2 项起，每一项减去它的前一项，所得的差都等于常数 d.

探索新知识

定义　如果一个数列从第 2 项起，每一项减去它的前一项，所得的差都等于同一个常数 d，那么这个数列叫做**等差数列**，常数 d 叫做**公差**.

根据定义，可知

$$d=a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}=\cdots$$

在数列(1)中，公差是 4；数列(2)中，公差是 −5；数列(3)中，公差是 0，它们都是等差数列.

若 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1，公差为 d 的等差数列，则有

$$a_2-a_1=d,\quad a_3-a_2=d,\quad a_4-a_3=d,\quad \cdots,\quad a_n-a_{n-1}=d,\quad \cdots$$

所以

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1+d\\
a_3 &= a_2+d=a_1+2d\\
a_4 &= a_3+d=a_1+3d\\
&\vdots\\
a_n &= a_{n-1}+d=a_1+(n-1)d
\end{aligned}$$

由此得出等差数列的通项公式为

$$a_n=a_1+(n-1)d \tag{7.1}$$

例如,等差数列 3,7,11,15,19,…的首项 $a_1=3$,公差 $d=7-3=4$,将它们代入公式(7.1),可以得出该等差数列的通项公式为 $a_n=3+(n-1)\times 4$,即 $a_n=4n-1$.

巩固新知识

例 1 求数列:2,7,12,17,…的第 20 项.

解 这是一个等差数列,其中 $a_1=2$,$d=7-2=5$,则

$$a_{20}=2+(20-1)\times 5=2+19\times 5=97.$$

例 2 已知等差数列的第 6 项是 17,第 13 项是 38,求它的第 19 项.

解 设等差数列的公差是 d,由题意知:$a_6=17$,$a_{13}=38$,由公式(7.1)可列出方程组$\begin{cases}a_1+(6-1)d=17\\a_1+(13-1)d=38\end{cases}$,即$\begin{cases}a_1+5d=17\\a_1+12d=38\end{cases}$,解得$\begin{cases}a_1=2\\d=3\end{cases}$.

所以该数列的第 19 项是 $a_{19}=2+(19-1)\times 3=56$.

例 3 求数列 $2\frac{1}{2}$,4,$5\frac{1}{2}$,7,…的第几项是 22?

解 这是一个等差数列,其中 $a_1=2\frac{1}{2}$,$d=4-2\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$,代入

$a_1+(n-1)d=22$,即

$$2\frac{1}{2}+(n-1)\left(1\frac{1}{2}\right)=22$$

解得 $n=14$. 即数列的第 14 项是 22.

例 4　已知三个数成等差数列,它们的和为 15,它们的积为 80,求这三个数.

解　设这三个数依次为 $a-d,a,a+d$,则由题意可知

$$\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=15\\(a-d)\times a\times(a+d)=80\end{cases}$$

解此方程组,得$\begin{cases}a=5\\d=3\end{cases}$,或$\begin{cases}a=5\\d=-3\end{cases}$.

因此,所求的三个数从小到大依次为 2,5,8.

练习题 7.2.1

1. 填空题

(1) 已知等差数列 10,6,2,…,则 $a_1=$________,$d=$________,$a_{10}=$________.

(2) 在等差数列$\{a_n\}$中,已知 $a_1=1$, $a_3=5$, 则 $d=$________.

(3) 等差数列$-2,1,4$, …的通项公式是________.

2. 在等差数列中,已知 $a_4=10,a_7=19$,求 a_1 与 d .

3. 小明、小明的爸爸和小明的爷爷三个人的年龄恰好构成一个等差数列,他们三人的年龄之和为 120 岁,爷爷的年龄比小明年龄的 4 倍还多 5 岁,求他们祖孙三人的年龄.

7.2.2　等差数列前 n 项的和

探索新知识

一般的,设等差数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$的前 n 项和为 S_n,则

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

根据通项公式(7.1)，有

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (n-1)d] \qquad (7.2)$$

若将 S_n 写成 $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1$，则 $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1$ 就构成了公差为 $-d$ 的等差数列，此时，

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + [a_n - (n-1)d] \qquad (7.3)$$

将式(7.2)与式(7.3)相加，得

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)}_{n\text{个}}$$

即

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

所以等差数列前 n 项和的公式是

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \qquad (7.4)$$

这就是说，等差数列前 n 项的和等于首项与末项的平均数的 n 倍.

例如，若等差数列的 $a_1 = 1, a_{10} = 10$，则前 10 项和为 $S_{10} = \frac{10}{2} \times (1 + 10) = 55$.

若将通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 代入公式(7.4)中，就可得到等差数列前 n 项和公式的另外一种形式：

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \qquad (7.5)$$

巩固新知识

例 5 求数列 5，9，13，17，…前 12 项的和.

解 这是一个等差数列，其中 $a_1 = 5, d = 9 - 5 = 4$，则

$$S_{12} = 12 \times 5 + \frac{12 \times (12 - 1)}{2} \times 4 = 60 + 264 = 324.$$

例 6 一个剧场有 30 排座位，每后一排比前一排多 2 个座位，最后一排有 120 个座位，问这个剧场共有多少个座位？

解 1 设这个剧场从前排起每排的座位数分别是 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$，则它们构成等差数列，其中 $n=30$，$d=2$，$a_n=120$.

由等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$，得 $120=a_1+(30-1)\times 2$，求出 $a_1=62$.

再由等差数列求和公式(7.4)得

$$S_n=\frac{30}{2}\times(62+120)=2730$$

解 2 设这个剧场从最后排起每排的座位数分别是 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$，则它们构成等差数列，其中 $n=30$，$d=-2$，$a_1=120$.

再由等差数列求和公式(7.5)得

$$S_n=30\times 120+\frac{30\times(30-1)}{2}\times(-2)=2730$$

答 这个剧场共有 2730 个座位.

练习题 7.2.2

1. 填空题

(1) 前 20 个正整数的和是________.

(2) 等差数列 1,3,5,…,前 15 项的和是________.

(3) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_{18}=66$，则 $S_{18}=$________.

(4) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=6$，$d=\frac{4}{3}$，则 $S_{16}=$________.

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_n=77$，$S_n=780$，求项序号 n.

3. 如图 7-2 所示，一个堆放铅笔的 V 形架的最下面一层放一支铅笔，往上每一层都比它下面一层多放一支笔，最上面一层放了 30 支，问这个 V 形架上共放了多少支铅笔？

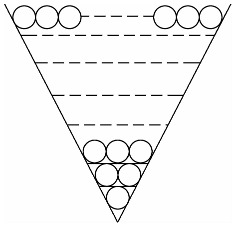

图 7-2

习题 7.2

1. 求数列 8，14，20，26，…的第 11 项.
2. 已知等差数列的第 1 项是 2.5，第 10 项是 16，求数列的第 15 项.
3. 数列 7，9.2，11.4，13.6，…的第几项是 29？
4. 求数列 4，7，10，13，…的前 11 项的和.
5. 求数列 6.5，8.0，9.5，11.0，…，32 的和.
6. 三个数成等差数列，它们的和是 9，它们的积 20.25，求这三个数.
7. 数列 5，8，11，…前多少项的和是 1025？
8. 在 5 和 22.5 中间插入 4 个数，使它们成一个等差数列，求这四个数.

7.3 等比数列

7.3.1 等比数列的定义及其通项公式

观察下列数列：

(1) 1，2，4，8，16，…；

(2) $1,-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27},\frac{1}{81},\cdots$；