

第 1 章

绪 论

1.1 弹性力学的研究对象和任务

弹性力学是固体力学的一个分支学科,是研究可变形固体受到外载荷、温度变化及边界约束变动等作用时,弹性变形和应力状态的科学。本书专门讨论固体材料中的理想弹性体的力学问题。

弹性力学是人们在长期生产实践与科学实验的丰富成果的基础上发展起来的。它的发展与社会生产发展有着特别密切的关系,它来源于生产实践,又反过来为生产实践服务。弹性力学作为固体力学的一个独立分支学科已有一百多年的历史。它有一套较完善的经典理论和方法,在工程技术的许多领域得到了广泛的应用。目前,由于现代科学技术的进一步发展,向弹性力学的新理论提出了一系列新课题,新任务。因而,研究弹性力学的新理论、新方法及其在工程上的应用是非常必要的。在目前,弹性力学仍然是一门富有生命力的学科。

材料力学和结构力学的研究对象及问题,往往也是弹性力学所要研究的问题。不过,在材料力学和结构力学中主要是采用简化的可用初等理论描述的数学模型。在弹性力学中,则将采用较精确的数学模型。有些工程问题(例如非圆形断面柱体的扭转,孔边应力集中,深梁应力分析等问题)用材料力学和结构力学的理论无法求解,而在弹性力学中是可以解决的。有些问题虽然用材料力学和结构力学的方法可以求解,但无法给出精确可靠的结论,而弹性力学则可以给出用初等理论所得结果可靠性与精确度的评价。因而,弹性力学的任务有二:一是建立并给出用材料力学和结构力学方法无法求解的问题的理论和方法;二是给出初等理论可靠性与精确度的度量。

学习本课程的目的大致可归结为:

- 1) 确定一般工程结构在外载荷作用下的弹性变形与内力的分布规律。

- 2) 确定一般工程结构的承载能力。
- 3) 为进一步研究工程结构的强度、振动、稳定性等力学问题打下必要的理论基础。

1.2 基本假定

固体材料通常分为晶体和非晶体两种。晶体是由许多离子、原子或分子按一定规则排列起来的空间格子(称为晶格)构成的。它们一般均处于稳定的平衡状态。普通固体(例如低碳钢、黄铜、铝、铅等)是由许多晶粒方位混乱地组合起来的。它们中间常有一些缺陷存在。非晶体一般是由许多分子的集合组成的高分子化合物。由此可见,固体材料的微观结构是多样的、复杂的。如果我们在研究工程结构的力学性态时,考虑固体材料的这些特征,必将带来数学上的极大困难。为了把本书所研究的问题限制在一个简便可行的范围内,必须引进下列一些假定。

1) 假定固体材料是连续介质。即,这种介质无空隙地分布于物体所占的整个空间。这一假定显然与上述介质是由不连续的粒子所组成的观点相矛盾。但我们采用连续性假定,不仅是为了避免数学上的困难,更重要的是根据这一假定所进行的力学分析,被广泛的实验与工程实践证实是正确的。事实上,连续性假定与现代物质理论的分歧可用统计平均的观点统一起来。从统计学的观点看来,只要所论物体的尺寸足够大,物体的性质就与体积的大小无关。通常工程结构构件的尺寸,与晶粒或分子团的大小相比,其数量级是非常悬殊的。在力学分析中,从物体中取出任一微小单元,在数学上是一个无穷小量,但它却含有大量的晶粒,晶体缺陷与微小单元进而与物体尺寸相比更是小得很多,因而连续性假定实际上是合理的。对于一些多相物体,通常也作为连续性介质看待。

根据**连续性假定**,用以表征物体变形和内力分布的量,就可以用坐标的连续函数来表示。这样,在进行弹性力学分析时,就可以应用数学分析这个强有力的工具。

弹性力学的理论基础仍然是牛顿力学。连续性假定和理论力学中的牛顿力学定律相结合就必然会产生连续介质力学。当进一步给出固体材料的弹性本构关系之后,也就必然会得到弹性力学的基本方程。

2) 物体为均匀各向同性的。即认为物体各点介质的力学特性相同,且各点的各方向的性质也相同。也就是说,表征这些特性的物理参数在整个物体内部是不变的。

3) 物体的变形属于小变形。即认为物体在外力作用下所产生的变形,与其本身几何尺寸相比很小,可以不考虑因变形而引起的尺寸的变化。这样,就可以用变形以前的几何尺寸来代替变形以后的尺寸。此外,物体的变形和各点的位移公式中二阶微量可以略去不计,从而使得几何变形线性化。

4) 物体原来是处于一种无应力的自然状态。即在外力作用以前,物体内部各点应力均为零。我们的分析计算是从这种状态出发的。

以上基本假定是本书讨论问题的基础,还有一些针对具体问题所作的假定,将在以后各章分别给出。

1.3 弹性变形

由材料力学知道,弹性变形是物体卸载以后,就完全消失的那种变形,即,弹性变形是可恢复的、可逆的变形。而非弹性变形则是指卸载后不能消失而残留下来的那部分变形,是不可逆的变形。在小变形假定的条件下,弹性变形与应力的关系是一一对应的线性关系,因而,具有可加性,即叠加原理是适用的。

物体变形的机理,应从材料内部原子间力的作用来分析。实际上,固体材料之所以能保持其内部结构的稳定性是由于组成该固体材料(如金属)的原子间存在着相互平衡的力。吸力使各原子彼此密合在一起,而短程排斥力则使各原子间保持一定的距离。在正常情况下,这两种力保持平衡,原子间的相对位置处于一种规则排列的稳定状态。受外力作用时,这种平衡被打破,为了恢复平衡,原子便须产生移动和调整,使得吸力、斥力和外力之间取得平衡。因此,如果知道了原子间的力相互作用的定律,原则上就能算出晶体在一定外力作用下的弹性反应。

实际上,固体材料的内部结构是多样的、复杂的。例如夹杂、微孔、晶界等,都是影响变形发展的因素。目前的一些学说尚不能解释全部固体材料的微观变形机理。主要是由于所有的工程材料都不可避免的有缺陷存在。对于工程问题来说不必具体分析每一个缺陷对于材料性态的影响,而只需研究其宏观的统计特性,即可解决工程设计中的力学分析问题。

今后,我们仅宏观地研究弹性体在受外部作用时的应力场和位移场的分布,主要是梁、板、壳这一类结构及其他形式的结构物和构筑物的弹性力学问题。

1.4 弹性力学发展历程简介

弹性力学的发展历程与人类文明和社会进步是密切相关的。中国在 7 世纪至 17 世纪这段时期,社会、政治相对稳定,从而出现了以陶瓷、纺织和建筑为代表的生产技术和生活环境的大改造,以及以农、医、天、算四大学科为代表的中国古代科学体系,还有影响世界文明的四大发明。

11 世纪以后,欧洲从漫长的黑夜苏醒,十字军东征带回了中国的四大发明和希腊的学术,通过大翻译运动,出现了以经院哲学、理性论证为代表的学术复苏。诞生了实验科学的前驱罗吉尔·培根(Roger·Bacon, 1219—1292)。文艺复兴以后,人们的世界观发生了重大变化,近代科学体系逐渐形成。人们开始探索天体、地球、大自然。出现了航海罗盘、钟表、枪炮等。社会文明大大的前进了。继欧几里得(Euclid, 约 330—275 BC)以后,哥白尼(Nicolaus Copernicus, 1473—1543)、开普勒(Johannes Kepler, 1571—1630)、伽利略(Galileo Galilei, 1564—1642)、笛卡儿(René Descartes, 1596—1650)、牛顿(Isaac Newton, 1642—1727)等一大批学者的工作推动了社会的进步和科学技术的发展。

本书的全部内容,显然都是建立在牛顿力学的基础上。牛顿力学的诞生与完善经历了漫长的发展历程。谈到牛顿力学就会想到伽利略对牛顿力学的重要贡献。牛顿于 300 多年

前(1687)发表了《自然哲学的数学原理》这一伟大著作,完成了牛顿力学科学体系的建立。以后,又过了100年,拉格朗日(1736—1813)做了出色的工作。他接受了欧拉变分法的概念和理论,建立了分析力学,降低了解题的难度,使得牛顿力学有了新的解题方法和严格的数学表述。可称为拉格朗日力学。又过了半个多世纪,哈密顿(1805—1865)进一步发展了牛顿力学。形成了影响广泛的、具有崭新面貌的哈密顿力学。牛顿、拉格朗日和哈密顿这三位伟大的天才科学家,经过了300多年完成了经典力学的完美体系,至今仍是光彩夺目,应用广泛。

弹性力学完整科学体系的形成也已经有了上百年的历史。有不少著名的经典著作。例如,勒夫(A. E. H. Love, 1863—1940)著,《数学弹性理论》(A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity,)其第一版于1892年问世,第四版为1927年,后被译成各种文字,人们视为不朽经典名著。又如铁摩辛柯(Stephen P. Timoshenko, 1878—1972)著《弹性理论》(Theory of Elasticity, 俄文版,卷一,1914年,卷二,1916年)和以后的各种版本(英文、中文等),以及他的一系列专著(如弹性振动理论、板壳理论、材料力学、弹性稳定理论等),世界各国用它培养了一代又一代的工程师和研究人员。稍后有穆斯海里什维利(N. I. Muskhelishvili, 1891—1976)在他的老师克罗索夫(G. V. Kolosoff)工作的基础上出版了著名著作 *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity*, 俄文第一版于1933年问世,以后多次修订,1966年做最后一次修订。在这本传世名著中用复变函数法和奇异积分对弹性力学平面问题给出了完美的解答。多年来国外出版的弹性力学教科书种类繁多,各有千秋,难以胜数。

国内出版了很多很好的弹性力学专著和教科书。最早问世的有:钱伟长、叶开源著《弹性力学》(1956),之后有徐芝伦著《弹性力学》(上下册),武际可、王敏中著《弹性力学引论》,程昌钧著《弹性力学》、吴家龙著《弹性力学》等,和一大批国外优秀弹性力学专著和教科书的翻译本。

我国学者在弹性力学发展进程中曾做出了卓越的贡献。例如,钱学森在弹性薄壳的非线性稳定理论方面的开创性工作,钱伟长对弹性板壳内禀理论的研究,摄动法、弹性圆板大挠度、穿甲理论等方面的重要贡献,胡海昌对广义变分原理的重要贡献。最近,钟万勰发展了辛弹性力学和弹性力学求解的新方法,武际可对弹性稳定理论和力学史的研究做出了贡献。郭仲衡,黄克智,杜庆华,徐秉业等众多知名学者在弹性力学发展上都做出了各自不同的重要贡献。

思考题

- 1-1 为什么要引进一些基本假定? 如果放弃其中的任一条会出现什么情况?
- 1-2 你对弹性力学的发展历程和展望有何见解?

第 2 章

应 力

2.1 力和应力的概念

作用在物体上的外力可分为表面力和体积力,简称面力和体力。

所谓面力指的是作用在物体表面上的力,如风力、液体压力、两固体间的接触力等。物体上各点所受的面力一般是不同的。为了表明物体表面上的一点 P 所受面力的大小和方向,我们在 P 点的邻域取一包含 P 点在内的微小面积元素 ΔS (图 2-1),设在 ΔS 上的面力为 $\Delta \boldsymbol{p}$,则面力的平均集度为 $\Delta \boldsymbol{p}/\Delta S$ 。如将 ΔS 不断地缩小,则 $\Delta \boldsymbol{p}/\Delta S$ 及 $\Delta \boldsymbol{p}$ 都将不断地改变其大小、方向和作用点。如令 ΔS 无限缩小而趋于 P 点, $\Delta \boldsymbol{p}/\Delta S$ 将趋于一定的极限 $\boldsymbol{p}_s$,即有

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta S} = \boldsymbol{p}_s \quad (2-1)$$

这个极限矢量 $\boldsymbol{p}_s$ 就是 P 点面力的集度。由于 ΔS 是标量,故矢量 $\boldsymbol{p}_s$ 的方向与 $\Delta \boldsymbol{p}$ 的极限方向相同。 $\boldsymbol{p}_s$ 在坐标轴 x, y, z 方向的投影 p_x, p_y, p_z 称为 P 点面力的分量,并规定指向坐标轴正方向的分量为正,反之则为负。

作用在物体表面上的力都占有一定的面积,但对于作用面很小的面力通常理想化为作用在一点的集中力。

体力,则是满布在物体内部各质点上的力,如重力、惯性力、电磁力等。物体内部各点所受的体力一般也是不同的。我们可以仿照对面力的讨论,得出物体内部一点 C 所受的体力为按体积计算的平均集度 $\Delta \boldsymbol{F}_b/\Delta V$,在微小体积元素 ΔV 无限缩小而趋于 C 点时的极限矢量 $\boldsymbol{F}_b$,即

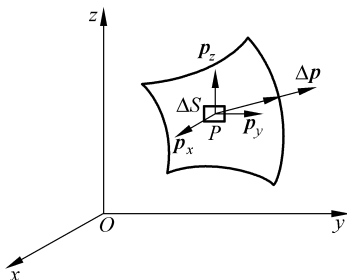
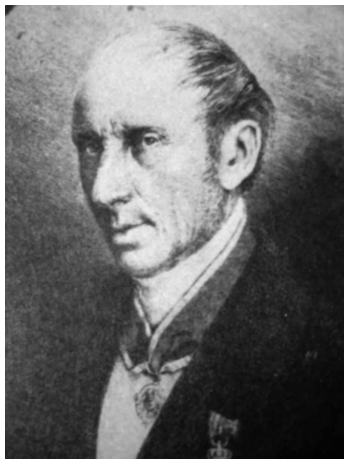


图 2-1

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_b}{\Delta V} = \mathbf{F}_b \quad (2-2)$$

显然,体力矢量 $\mathbf{F}_b$ 的方向就是 ΔV 内的体力 $\Delta \mathbf{F}$ 的极限方向。

固体材料受外力作用后就要产生内力和变形。用以描述物体中任何部位的内力和变形特征的力学量是应力和应变。应力的概念,在材料力学课程中虽已讨论并应用过,但由于这一概念的重要性,我们在这里除了强调应力的确切含义之外,还要进一步给出在受力物体内某一点处的应力状态的描述方法。



Augustin Louis Cauchy

柯西(A. L. Cauchy) 1789 年生于法国,1857 年逝世。数学家和力学家。他奠定了应力和应变的理论,首先指出了矩形截面柱体的扭转与圆形截面柱体的扭转有重大区别,最早研究了板的振动问题。在数学和力学的其他领域有很多重要贡献。

柯西首先提出了应力和应变的理论。为了说明应力的概念,我们假想把受一组平衡力系作用的物体用任一平面 C 分为 A 、 B 两部分(图 2-2)。如将 B 部分移去,则 B 对 A 的作用应代之以 B 部分对 A 部分的作用力。这种力在 B 移去前是物体内部 A 、 B 之间在 C 截面上的内力,且为分布力。如从 C 面上 P 点的邻域取出一包括 P 点在内的微小面积元素 ΔS_C ,而 ΔS_C 上的内力矢量为 $\Delta \mathbf{p}$,则内力的平均集度为 $\Delta \mathbf{p} / \Delta S_C$ 。如令 ΔS_C 无限缩小而趋于 P 点,则在内力连续分布的条件下 $\Delta \mathbf{p} / \Delta S_C$ 趋于一定的极限 σ ,即

$$\sigma = \lim_{\Delta S_C \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta S_C} \quad (2-3)$$

这个极限矢量 σ 就是物体在过 C 面上 P 点处的应力。由于 ΔS_C 为标量,故 σ 的方向与 $\Delta \mathbf{p}$ 的极限方向一致。

应力 σ 可分解为其所在平面的外法线方向和切线方向这样两个分量。沿应力所在平面的外法线方向(n)的应力分量叫做正应力,记做 σ_n 。沿切线方向的应力分量叫做剪应力,记做 τ_n 。此处脚注 n 标明其所在面的外法线方向。因此, $\Delta \mathbf{p}$ 的正应力和剪应力分别为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \lim_{\Delta S_C \rightarrow 0} \frac{\Delta p_n}{\Delta S_C} \\ \tau_n &= \lim_{\Delta S_C \rightarrow 0} \frac{\Delta p_s}{\Delta S_C} \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

其中, Δp_n 、 Δp_s 分别为 ΔS_C 上的内力矢量 $\Delta \mathbf{p}$ 在 n 平面的法向和切向分量。

如果图 2-2 中的 n 方向与 y 坐标轴的方向一致(图 2-3),则此时有

$$\sigma_n = \sigma_y \text{ 及 } \tau_n = \tau_y$$

其中 τ_y 是作用在 C 截面内的剪应力, 如将 τ_y 分解为沿 x 轴和 z 轴的两个分量, 并记作 τ_{yx} 和 τ_{yz} , 则过 C 面上 P 点的应力分量为 $\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}$ 。以后, 我们对正应力只用一个字母的下标标记, 对剪应力则用两个字母标记, 其中第一个字母表示应力所在面的外法线方向; 第二个字母表示应力分量的指向。应力的正负号规定为: 正应力以拉应力为正, 压应力为负。

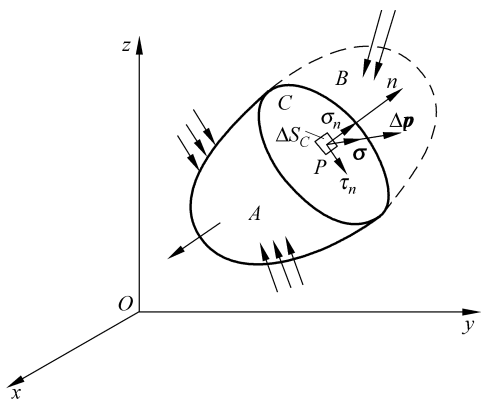


图 2-2

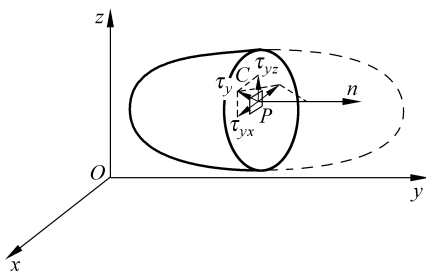


图 2-3

剪应力的正负号规定分为两种情况: 当其所在面的外法线与坐标轴的正方向一致时, 则以沿坐标轴正方向的剪应力为正, 反之为负; 当所在面的外法线与坐标轴的负方向一致时, 则以沿坐标轴负方向的剪应力为正, 反之为负。图 2-3 及图 2-4 中的各应力分量均为正。应力及其分量的量纲为[力][长度]⁻², 单位为帕(Pa)。

在以上的讨论中, 过 P 点的 C 平面是任选的。显然, 过 P 点可以做无穷多个这样的平面 C 。或者说, 过 P 点有无穷多个连续变化的 n 方向。不同面上的应力是不同的。这样, 就产生了一个到底如何描绘一点处应力状态的问题。下面我们讨论这个问题。

为了研究 P 点处的应力状态, 我们在 P 点处沿坐标轴 x, y, z 方向取一个微小的平行六面体(图 2-5), 其六个面的外法线方向分别与三个坐标轴的正、负方向重合, 各边长分别为 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 。假定应力在各面上均匀分布, 于是各面上的应力矢量便可用作用在各面中心点的一个应力矢量来表示。每个面上的应力又可分解为一个正应力和两个剪应力分量。按前面约定的表示法, 图 2-5 给出的各应力分量均为正方向。

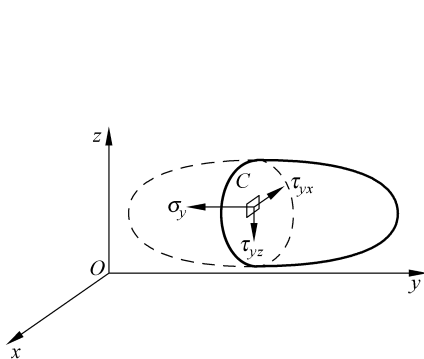


图 2-4

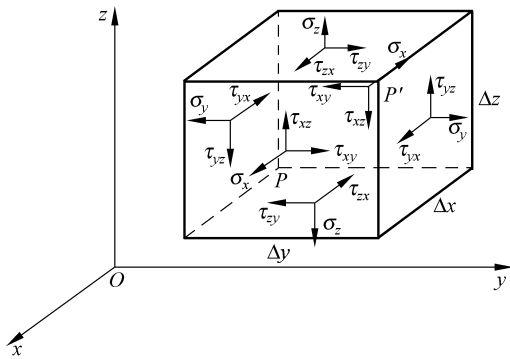


图 2-5

由图 2-5 可知,当微小的平行六面体趋于无穷小时,六面体上的应力就代表 P 点处的应力。因此, P 点处的应力分量共有 9 个,其中有三个正应力分量、六个剪应力分量(以后将证明剪应力互等定理,从而实际上独立的剪应力分量只有三个)。我们把这 9 个应力分量按一定规则排列,令其中每一行为过 P 点的一个面上的三个应力分量,即

$$\begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{array}$$

以上这 9 个应力分量定义一个新的量 Σ ,它描绘了一种物理现象,即 P 点处的应力状态。 Σ 是对坐标系 $Oxyz$ 而言的,当坐标系变换时,它们按一定的变换式变换成另一坐标系 $Ox'y'z'$ 中的 9 个量

$$\begin{array}{ccc} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'} \end{array}$$

这 9 个分量描绘同一点 P 的同一物理现象,所以它们定义的仍为 Σ 。而 $\sigma_x, \sigma_y, \dots$, 这 9 个量就称为 Σ 的元素。数学上,在坐标变换时,服从一定坐标变换式的九个数所定义的量叫做二阶张量。根据这一定义, Σ 是一个二阶张量,并称为应力张量。以后将证明,应力张量为一对称的二阶张量。各应力分量即为应力张量的元素。在第 2.3 节中我们将给出应力分量在坐标变换时服从的变换公式。

应力张量通常表示为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

其中 $i, j = x, y, z$, 当 i, j 任取 x, y, z 时,便得到相应的分量^①。

式(2-5)与 3×3 的矩阵写法相同。如令 i 代表行, j 代表列,行列数 1, 2, 3, 对应于 x, y, z 。例如第二行第三列的元素为 τ_{23} , 即应力分量为 τ_{yz} , 余类推。

应当指出,物体各点的应力状态,一般来说是不同的,即非均匀分布的。亦即,各点的应力分量应为坐标 x, y, z 的函数。所以,应力张量 σ_{ij} 与给定点的空间位置有关,谈到应力张量总是针对物体中的某一确定点而言的。以后我们将看到,应力张量 σ_{ij} 完全确定了一点处的应力状态。

张量符号与下标记号法使冗长的弹塑性力学公式变得简明醒目,在文献中已被广泛应用,今后我们将逐渐熟悉这种标记法。

2.2 二维应力状态与平面问题的平衡方程

上一节中讨论力和应力概念时,是从三维受力物体出发的,其中 P 点是从一个三维空间中取出来的点。现为简单起见,我们首先讨论平面问题。掌握了平面问题以后,再讨论空

① $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ 已简写为 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 。

间问题就比较容易了。

平面问题的特点是物体所受的面力和体力以及其应力都与某一个坐标轴(例如 x 轴)无关。平面问题又分为平面应力问题与平面应变问题。

在平面应力问题中,所考虑的物体是一个很薄的平板,载荷只作用在板边,且平行于板面(图 2-6),即 z 方向的体力分量 F_{bz} 及面力分量 p_z 均为零。故取图 2-6 中的坐标系,则板面上($z = \pm t/2$ 处)

$$(\sigma_z)_{z=\pm t/2} = 0$$

$$(\tau_{zx})_{z=\pm t/2} = (\tau_{zy})_{z=\pm t/2} = 0$$

由于板的厚度很小,外载荷又沿厚度均匀分布,所以可以近似地认为应力沿厚度均匀分布。由此,在垂直于 z 轴的任一微小面积上均有

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

根据我们后面将要证明的剪力互等定理,即应力张量的对称性,还有 $\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ 。这就是说,过任一点处不等于零的应力分量只有 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$, 且均为 x, y 的函数。此时,应力张量为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

现在讨论平面应变问题。设有等截面柱体,其纵轴方向(Oz 坐标方向)很长。外载荷及体力为作用在垂直于 Oz 方向且沿 z 轴均匀分布的一组力。图 2-7 所示的挡土墙是这类问题的典型例子。如略去端部效应,则由于外载荷沿 z 轴方向为一常数,故可以认为,沿纵轴方向各点的位移与其所在 z 方向的位置无关,就是说 z 方向各点的位移均相同。如令 u, v, w 分别为一点在 x, y, z 坐标方向的位移分量,则有 $w = \text{常数}$, 等于常数的位移 w 并不伴随产生任一 Oxy 平面的翘曲变形,故在研究应力、应变问题时,可取 $w = 0$ 。此外,由于物体的变形只在 Oxy 平面内产生,故 u, v 均与 z 无关。因而,对于平面应变状态有

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \\ w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

由对称条件可知在 Oxy 平面内,过任一点处的应力分量 τ_{xz}, τ_{zy} (从而 τ_{xz}, τ_{yz}) 均等于零,但由于 z 方向对变形的约束,故 σ_z 一般不等于零。此时,应力张量 σ_{ij} 为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

实际上,以后将证明, σ_z 不是一个独立的量,它可以由 σ_x 和 σ_y 求出。所以不管是平面

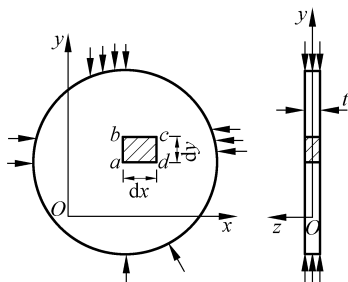


图 2-6

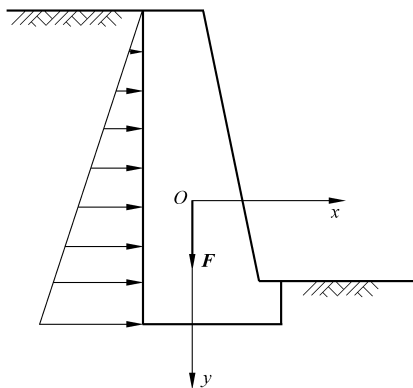


图 2-7

应力问题还是平面应变问题,独立的应力分量只有三个,即 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} (= \tau_{yx})$, 在求解过程中, σ_z 可暂不考虑。

下面讨论物体处于平衡状态时,各点应力及体力的相互关系,并由此导出平衡方程。

假定从处于平面应力状态的物体中取出一个微小矩形单元 $abcd$ (图 2-6 中的阴影部分), 其两边的长度分别为 dx, dy , 厚度就是原物体的厚度 t (图 2-8)。这里, 因 dxt, dyt 为微小面元, 可以把 dxt 和 dyt 上的应力看成是均匀分布的, 故面元上任意点的应力分量值, 可以用该面元中点的应力分量表示 (图 2-8)。在此微小单元体不同的边上, 应力分量的值也不同。如 ab 边上^①的正应力分量为 σ_x , 则 cd 边上, 由于距 y 轴的距离增加了 dx , 正应力分量应随之变化。应力分量的这种变化可用泰勒级数展开来求。实际上, 我们有

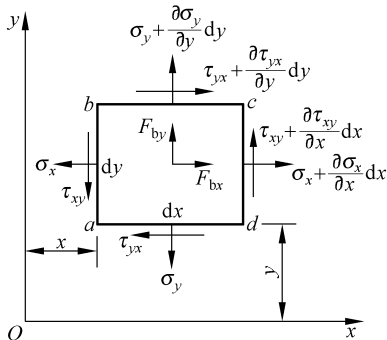


图 2-8

$$\sigma_x \Big|_{cd} = \sigma_x \Big|_{ab} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \Big|_{ab} dx + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \Big|_{ab} dy + o(dx^2, dy^2)$$

注意到, ab 线元与 cd 线元上的应力分量, 皆可用相应线元中点处的应力分量来表示。

显然, 如 ab 边上的正应力为 σ_x , 则当略去二阶以上微量后 cd 边上的正应力应为

$$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

同理, 如 ab 边上的剪应力分量为 τ_{xy} , ad 边上的两个应力分量为 σ_y, τ_{yx} , 则得 cd 边上的剪应力分量及 bc 边的两个应力分量分别为 (图 2-8)

$$\begin{aligned} & \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) \\ & \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) \\ & \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) \end{aligned}$$

在静力平衡条件下, 各应力分量必然满足平衡条件的要求。对于厚度 $t=1$ 的微小矩形单元 $abcd$ (图 2-8), 由平衡条件 $\sum M_a = 0$ 得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy dx \right) \frac{dx}{2} - \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dy dx \right) \frac{dy}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dx \\ & - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dy + F_{by} dx dy \frac{dx}{2} - F_{bx} dx dy \frac{dy}{2} = 0 \end{aligned}$$

略去 dx, dy 的三次方的项, 得

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2-9)$$

这就是前面曾经提到的剪应力互等定理^②。以下我们常不再区分 τ_{xy} 和 τ_{yx} 。

① 即 dyt 面积上, 以下的讨论取 $t=1$, 故 dyt 上的应力就以 ab 线上的应力来表示。下同。

② 剪应力互等定理的成立仅限于“非极化”介质, 对于微极性介质则该定理不再成立。详见, W. Nowacki, Theory of Asymmetric Elasticity, Pergamon Press 1986

由平衡条件 $\sum X=0$ 得

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy - \sigma_x dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx - \tau_{yx} dx + F_{bx} dx dy = 0$$

化简后为

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_{bx}\right) dx dy = 0$$

其中 $dx dy$ 不等于零, 故有

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_{bx} = 0 \quad (2-10a)$$

同理由 $\sum Y=0$ 得

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_{by} = 0 \quad (2-10b)$$

式(2-10)是平面问题的平衡方程。

对于三维应力状态的情况, 可从受力物体中取出一微小六面体单元, 可类似地导出(具体推导, 留作练习)

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2-11)$$

及

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_{bx} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_{by} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_{bz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-12)$$

式(2-12)为三维情况下的平衡方程。

如采用张量符号与下标记号法, 则剪应力互等定理可缩写为

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i, j = x, y, z) \quad (2-13)$$

由此可知, 应力张量为一对称张量, 其中只有 6 个独立元素

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \text{(对称)} & & \sigma_z \end{bmatrix}$$

在平面应力状态, 有

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ & \sigma_y & 0 \\ \text{(对称)} & & 0 \end{bmatrix}$$

平衡方程(2-12)可缩写为

$$\sigma_{ij,j} + F_{bi} = 0 \quad (2-14)$$

其中 $\sigma_{ij,j}$ 表示 σ_{ij} ($i, j = x, y, z$) 对于 $j (= x, y, z)$ 取偏导数。下同(下标记号法和求和约定详见附录 I)。

所以 $\sigma_{ij,j} = 0$, 就代表

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

2.3 一点处应力状态的描述

现以平面问题为例说明一点处应力状态的描述。为此,我们在受力物体中取一个微小

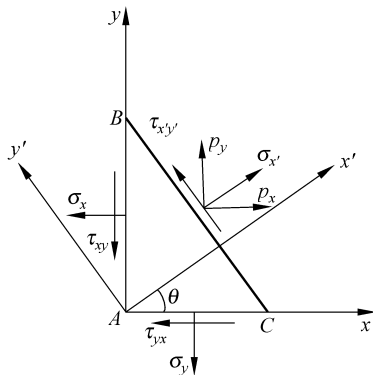


图 2-9

三角形单元,如图 2-9 所示,其中 AB, AC 与坐标 y, x 重合,而 BC 的外法线与 x 轴成 θ 角。取 $x'y'$ 坐标,使 BC 的外法线方向与 x' 方向重合(如图 2-9)。在这种情况下,如果 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 已给定,则 BC 面上的正应力 $\sigma_{x'}$ 与剪应力 $\tau_{x'y'}$ 可用已知量表示,由于 θ 角的任意性,则当 BC 面趋于 A 点时,便可以说求得了描绘过 A 点处的应力状态的表达式。实际上,此处所讨论的问题,是一点处不同方向的面上的应力的转换,即 BC 面无限趋于 A 点时,该面上的应力如何用与原坐标相平行的面上的应力来表示。在这种问题的分析中,可不引入应力增量和体力,因为它们与应力相比属于小量。

假定 BC 的面积为 1,则 AB 和 AC 的面积分别为 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 。于是,由平衡条件 $\sum X=0$ 和 $\sum Y=0$ 可得

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} \sin\theta \\ p_y &= \tau_{xy} \cos\theta + \sigma_y \sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (2-15)$$

其中 p_x, p_y 为 BC 面上单位面积的力 $\mathbf{p}$ 在 x, y 方向的投影(图 2-9)。把 p_x, p_y 投影到 x', y' 坐标方向得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x'} &= p_x \cos\theta + p_y \sin\theta \\ \tau_{x'y'} &= p_y \cos\theta - p_x \sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (2-16)$$

把式(2-15)代入式(2-16)得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x'} &= \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy} \sin\theta \cos\theta \\ \tau_{x'y'} &= \tau_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin\theta \cos\theta \end{aligned} \right\} \quad (2-17)$$

或改写为

$$\sigma_{x'} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (2-18a)$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (2-18b)$$

把式(2-18a)中的 θ 换成 $\theta + \frac{\pi}{2}$, 则得

$$\sigma_{y'} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (2-18c)$$

式(2-18)在材料力学中曾经讨论过,并给出了莫尔圆的作图法。于是当 BC 面趋于 A 点时,若已知 A 点的应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$,则由式(2-18)即可求得过该点任意方向平面上的应力分量。换言之,对于平面问题,式(2-18)充分地描述了一点的应力状态。

在三维的情况下,我们在任意一点 O 附近取出一微小四面体单元 $OABC$,斜面 ABC 的外法线为 n (图 2-10)。如令斜面 ABC 的面积为 1,则三角形 OBC, OAC, OAB 的面积分别为

$$\begin{aligned} 1 \times \cos(n, x) &= l_1 \\ 1 \times \cos(n, y) &= l_2 \\ 1 \times \cos(n, z) &= l_3 \end{aligned}$$

如 ABC 面上单位面积的面力为 p ,其沿坐标轴方向的分量用 p_x, p_y, p_z 表示,则不难由微小四面体单元的平衡条件得出

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \sigma_x l_1 + \tau_{xy} l_2 + \tau_{xz} l_3 \\ p_y &= \tau_{yx} l_1 + \sigma_y l_2 + \tau_{yz} l_3 \\ p_z &= \tau_{zx} l_1 + \tau_{zy} l_2 + \sigma_z l_3 \end{aligned} \right\} \quad (2-19)$$

图 2-10

式(2-19)按下标记号法与求和约定可缩写为

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \quad (i, j = x, y, z) \quad (2-19')$$

此处 n_j 为斜面 ABC 外法线 n 与 $j (= x, y, z)$ 轴间夹角的方向余弦 $\cos(n, j)$,根据以上定义,有

$$\begin{aligned} n_x &= \cos(n, x) = l_1 \\ n_y &= \cos(n, y) = l_2 \\ n_z &= \cos(n, z) = l_3 \end{aligned}$$

以上讨论的是在空间坐标系 $Oxyz$ 内,与坐标轴呈任意倾斜的面上单位面积的面力 p_x, p_y, p_z 的表达式(2-19)。现在考虑当坐标系 $Oxyz$ 变换到坐标系 $Ox'y'z'$ 时,新旧坐标系内各应力分量间的关系。并由此给定应力张量的各元素在坐标变换时所遵循的法则。

为此令新坐标系 $Ox'y'z'$ 的 Ox' 轴与图 2-10 中的 n 方向相合,新旧坐标系间的方向余弦为 $l_{11} = \cos(x', x), l_{12} = \cos(x', y), \dots$,如表 2-1 所示,则 x' 方向的正应力 $\sigma_{x'}$ 为

$$\sigma_{x'} = p_x l_{11} + p_y l_{12} + p_z l_{13}$$

表 2-1

	x	y	z
x'	l_{11}	l_{12}	l_{13}
y'	l_{21}	l_{22}	l_{23}
z'	l_{31}	l_{32}	l_{33}

将式(2-19)代入上式,并注意到其中之 l_1, l_2, l_3 分别等于 l_{11}, l_{12}, l_{13} ,则得

$$\sigma_{x'} = \sigma_x l_{11}^2 + \sigma_y l_{12}^2 + \sigma_z l_{13}^2 + 2(\tau_{xy} l_{11} l_{12} + \tau_{yz} l_{12} l_{13} + \tau_{xz} l_{11} l_{13})$$

类似地,有 p_x, p_y, p_z 在 y', z' 方向的投影,可得用 $\sigma_{ij} (i, j = x, y, z), l_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ 表

示的 $\tau_{x'y'}, \tau_{x'z'}$ 。之后将 y' 轴与 n 方向重合, 类似地可得用 σ_{ij}, l_{ij} 表示的 $\sigma_{y'}, \tau_{y'x'}, \tau_{y'z'}$ 。再将 z' 轴与 n 方向重合, 可得用 σ_{ij}, l_{ij} 表示的 $\sigma_{z'}, \tau_{z'x'}, \tau_{z'y'}$ 。这样最终可得用 σ_{ij}, l_{ij} 表示的全部 $Ox'y'z'$ 坐标系内的应力分量 $\sigma_{i'j'}$

$$\sigma_{i'j'} = l_{i'i} l_{j'j} \sigma_{ij} \quad (2-20)$$

变换式(2-20)即 σ_{ij} 在坐标变换时所遵守的法则。

凡一组 9 个量 σ_{ij} , 在坐标变换时服从式(2-20)给出的法则, 就称为二阶张量。

2.4 边界条件

当物体处于平衡状态时, 其内部各点的应力状态应满足平衡微分方程(2-12), 在边界上应满足边界条件。边界条件可能有三种情况: (1)在边界上给定面力称为**应力边界条件**; (2)在边界上给定位移称为**位移边界条件**; (3)在边界上部分给定面力, 部分给定位移称为**混合边界条件**。下面分别以平面问题为例给出几种边界条件的表示法。

1. 应力边界条件

当物体的边界上给定面力时(以后称给定面力的边界为 S_σ), 则物体边界上的应力应满足与面力相平衡的力的平衡条件。如边界附近有一点 A , 物体的坐标系为 Oxy (图 2-9), 边界线为 BC , 其外法线方向为 n ; A 点的应力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 的值尚为未知, BC 面上单位面积的面力为 $\mathbf{p}$, 其在 x, y 方向的分量为 p_x, p_y 。当 A 点无限趋于 BC 时, 由应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 与面力 p_x, p_y 之间的平衡条件可得应力边界条件。 BC 的外法线方向为 n , 它的方向余弦为 $\cos(n, x) = l_1, \cos(n, y) = l_2$, 则式(2-15)可改写为

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \sigma_x l_1 + \tau_{xy} l_2 \\ p_y &= \tau_{xy} l_1 + \sigma_y l_2 \end{aligned} \right\} \quad (2-15')$$

在三维条件下, 则可由边界附近任取一微小四面体 $OABC$, 如图 2-10 所示。如面力已知为 $\mathbf{p}$, 则相应的应力边界条件为式(2-19)

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \sigma_x l_1 + \tau_{xy} l_2 + \tau_{xz} l_3 \\ p_y &= \tau_{yx} l_1 + \sigma_y l_2 + \tau_{yz} l_3 \\ p_z &= \tau_{zx} l_1 + \tau_{zy} l_2 + \sigma_z l_3 \end{aligned} \right\}$$

或即

$$p_i = \sigma_{ij} n_j$$

此处 $n_j = \cos(x_j, n)$, 从应力边界条件的表达式(2-15')或(2-19)看出应力边界条件与坐标系 $Oxyz$ 的选取及物体边界的方向余弦有关。

对于平面问题, 当边界与某一坐标轴相垂直时, 应力边界条件可得到简化。在垂直于 x 轴的边界上 n 与 x 轴方向重合, 故有 $l_1 = \cos(n, x) = \pm 1, l_2 = \cos(n, y) = 0$, 于是(2-15')简化成为

$$\sigma_x = \pm p_y, \quad \tau_{xy} = \pm p_x$$

同理在垂直于 y 轴的边界上, 由于 n 与 y 轴方向相重合故有

$$l_1 = \cos(n, x) = 0, \quad l_2 = \cos(n, y) = \pm 1$$

应力边界条件可化为

$$\sigma_y = \pm p_x, \quad \tau_{yx} = \pm p_y$$

在这种情况下,边界处应力分量的数值与单位面积上的面力分量相等。且当边界的外法线方向沿坐标轴的正向时,取正号。反之,取负号。

2. 位移边界条件

当边界上已知位移时,应建立物体边界上点的位移与给定位移相等的条件。如令给定位移的边界为 S_u ,则有(在 S_u 上)

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v} \tag{2-21}$$

其中 $\bar{u}, \bar{v}$ 分别为边界上 x, y 方向的已知位移分量。

对于三维问题,位移边界条件为(在 S_u 上)

$$u_i = \bar{u}_i \tag{2-22}$$

此处 $i=1, 2, 3(u_1, u_2, u_3$ 与 u, v, w 相对应)。

3. 混合边界条件

混合边界条件有两种情况:一种情况是在物体的整个边界 S 中,一部分已知应力,即给定应力的边界 S_σ ,此部分边界应用应力边界条件(2-19);其余部分给定位移,即给定位移的边界 S_u ,在 S_u 上用位移边界条件(2-22)。这时相当于给了两种边界。另一种情况是在同一部分边界上已知部分位移和部分应力,即给定位移与应力混合条件。如图 2-11 给出的由一组连杆支承的深梁就是这种情况,已知 AB 面上 y 方向的位移及 x 方向剪应力均等于零,即(在 S_{AB} 上)

$$v = \bar{v} = 0, \quad \tau_{yx} = -p_x = 0$$

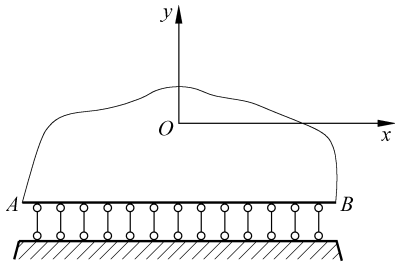


图 2-11

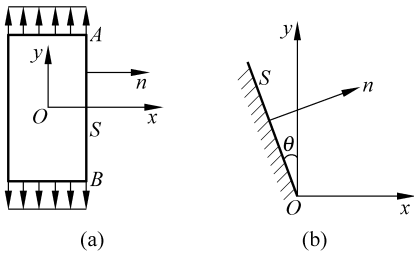


图 2-12

例 2-1 若已给定坐标系 Oxy 如图 2-12 所示,试列出图中各平面问题的自由边界的应力边界条件。

解

(a) (1) 题中已给定坐标系 Oxy 。

(2) 求方向余弦。已知边界 S 与 x 轴相垂直,故有

$$l_1 = \cos(n, x) = \pm 1, \quad l_2 = \cos(n, y) = 0$$

(3) 已知 $p_x = p_y = 0$ 。

(4) 代入应力边界条件公式(2-15')

$$\sigma_x = +p_x = 0, \quad \tau_{xy} = +p_y = 0$$

即应力边界条件为(在 S 上):

$$\sigma_x = \tau_{xy} = 0$$

(b) (1) 题已给出坐标系 Oxy 。

(2) 求方向余弦。已知边界 S 与 y 轴成 θ 角, 故有

$$l_1 = \cos(n, x) = \cos\theta$$

$$l_2 = \cos(n, y) = \sin\theta$$

(3) S 为自由边界, 故有

$$p_x = p_y = 0$$

(4) 代入式(2-15')得

$$0 = \sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} \sin\theta$$

$$0 = \tau_{xy} \cos\theta + \sigma_y \sin\theta$$

得边界条件为

$$\sigma_x = -\tau_{xy} \tan\theta$$

$$\sigma_y = -\tau_{xy} \cot\theta$$

例 2-2 设有图 2-13 所示水坝, 试列出光滑的 OA 面的应力边界条件。

解 此问题可作为平面应变问题考虑。

(1) 选取坐标系 Oxy 如图 2-13 所示, 坐标原点在坝顶 O 处。

(2) 计算方向余弦。因 OA 与 x 轴垂直, 故

$$l_1 = \cos(n, x) = -1$$

$$l_2 = \cos(n, y) = 0$$

(3) 求出面力分量 p_x, p_y (设水的容重为 γ) 代入边界条件(2-15'), 整理后得

$$\sigma_x = -\gamma y$$

$$\tau_{xy} = 0$$

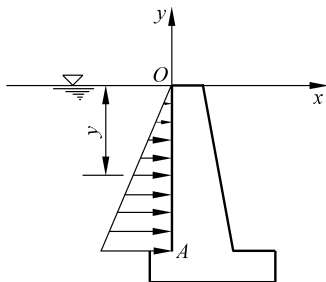


图 2-13

2.5 主应力与主方向

在过受力物体内一点任意方向的微小面元上, 一般都有正应力与剪应力, 不同方向的面元上这些应力有不同的数值。当此微小面元转动时, 它的法线方向 n 随之改变, 面元上的正应力 σ_n 与剪应力 τ_n 的方向和它们的值也都要发生变化。在 n 方向不断改变的过程中, 必然要出现这样的情况, 即面元上只有正应力, 而剪应力 τ_n 等于零。我们把这时面元的法线方向 n 称为主方向, 相应的正应力 σ_n 称为主应力, σ_n 所在的面称为主平面。以下将说明, 物体中任一点都有三个主应力和相应的三个主方向。

在图 2-10 中, 如令 p_x, p_y, p_z 为 ABC 面上单位面积面力 $\mathbf{p}$ 的三个分量, 则有

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \quad (\text{a})$$

ABC 面上的正应力 σ_n 即为

$$\sigma_n = p_x l_1 + p_y l_2 + p_z l_3 \quad (\text{b})$$

将式(2-19)代入式(b)得

$$\begin{aligned} \sigma_n &= (\sigma_x l_1 + \tau_{xy} l_2 + \tau_{xz} l_3) l_1 + (\tau_{yx} l_1 + \sigma_y l_2 + \tau_{yz} l_3) l_2 \\ &\quad + (\tau_{zx} l_1 + \tau_{zy} l_2 + \sigma_z l_3) l_3 \\ &= \sigma_x l_1^2 + \sigma_y l_2^2 + \sigma_z l_3^2 + 2(\tau_{xy} l_1 l_2 + \tau_{xz} l_1 l_3 + \tau_{yz} l_2 l_3) \end{aligned} \quad (2-23)$$

式(2-23)为 n 方向(亦即任意方向)的斜面上正应力的表达式。该面上的剪应力为

$$\tau_n^2 = p^2 - \sigma_n^2 \quad (2-24)$$

将式(a)及式(2-23)代入式(2-24),可得法线方向为 n 的面上的剪应力。

如果在一个斜面上的剪应力为零,即 $\tau_n = 0$,则从式(2-24)有 $\sigma_n^2 = p^2$,此时该斜面上的正应力 σ_n 就是正应力。在这种情况下,该斜面的正应力 σ_n 即与 $\mathbf{p}$ 的大小和方向完全相同^①。于是有

$$\left. \begin{aligned} p_x &= p l_1 = \sigma_n l_1 \\ p_y &= p l_2 = \sigma_n l_2 \\ p_z &= p l_3 = \sigma_n l_3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{c})$$

将式(c)代入式(2-19)得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x l_1 + \tau_{xy} l_2 + \tau_{xz} l_3 &= \sigma_n l_1 \\ \tau_{xy} l_1 + \sigma_y l_2 + \tau_{yz} l_3 &= \sigma_n l_2 \\ \tau_{xz} l_1 + \tau_{yz} l_2 + \sigma_z l_3 &= \sigma_n l_3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{d})$$

上式可改为

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_n) l_1 + \tau_{xy} l_2 + \tau_{xz} l_3 &= 0 \\ \tau_{xy} l_1 + (\sigma_y - \sigma_n) l_2 + \tau_{yz} l_3 &= 0 \\ \tau_{xz} l_1 + \tau_{yz} l_2 + (\sigma_z - \sigma_n) l_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-25)$$

或

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_n) l_j = 0 \quad (2-25')$$

此处 δ_{ij} 为柯氏 δ (Kronecker- δ), 定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j \\ 0, & \text{当 } i \neq j \end{cases}$$

l_1, l_2, l_3 满足下列关系式

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1 \quad (2-26)$$

于是我们得到含有 σ_n, l_1, l_2, l_3 四个未知数的四个方程式(2-25)和式(2-26), 求解之后便可得到主应力及与之对应的主方向。现在我们用下述方法来讨论问题的解。由于式(2-26)说明 l_1, l_2, l_3 这三个方向余弦不可能同时等于零, 所以式(2-25)可看成关于 l_1, l_2, l_3 的线性齐次方程组, 而且应当有非零解存在。由齐次方程组有非零解的条件得到

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n \end{vmatrix} = 0 \quad (2-27)$$

① 该斜面的面积取为 1。

上式展开后得

$$(\sigma_x - \sigma_n)(\sigma_y - \sigma_n)(\sigma_z - \sigma_n) + \tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} + \tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - \tau_{xz}\tau_{xz}(\sigma_y - \sigma_n) - \tau_{yz}\tau_{yz}(\sigma_x - \sigma_n) - \tau_{xy}\tau_{xy}(\sigma_z - \sigma_n) = 0$$

$$\text{或} \quad \sigma_n^3 - I_1\sigma_n^2 + I_2\sigma_n - I_3 = 0 \quad (2-28)$$

$$\text{其中} \quad I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (2-29a)$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 \quad (2-29b)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (2-29c)$$

方程(2-28)是关于 σ_n 的三次方程,它的三个根,即为三个主应力,其相应的三组方向余弦对应于三组主平面。方程(2-28)的三个根都是实根,因为(2-25)说明主应力是应力张量 σ_{ij} 的特征值,式(2-27)或式(2-28)为特征方程。因应力张量为对称张量,其各元素均为实数,故必有实特征根,即三个主应力都是实数,其方向余弦为应力张量 σ_{ij} 的特征向量。方程(2-28)的三个根均为实数的证明还可以从三次方程根的性质代数理论中得到。上述讨论证实了下列事实:在物体内部任意一点,必有三个互相垂直的主应力,它们的方向就是主方向。

主应力的大小与坐标选择无关,故方程(2-28)的三个系数 I_1, I_2, I_3 也必与坐标选择无关。不然的话,主应力就要随坐标选择的不同而变化。所以 I_1, I_2, I_3 为不变量,分别称为第一、第二、第三应力张量的不变量,简称应力不变量。

解式(2-28)后,得到所考虑点的三个主应力,从大到小记为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, 即 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 。如果坐标轴恰与主方向重合,则应力不变量用主应力表示为

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad (2-30)$$

以主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的方向为坐标轴(记为 1, 2, 3)的几何空间,称为主向空间。要了解在主向空间任意斜面上的应力,可假定某一斜面的应力矢量为 $\mathbf{p}$, 该斜面的方向余弦为 l_1, l_2, l_3 (图 2-14), 注意到 $\mathbf{p}$ 在坐标轴方向的三个投影分别为 $p_1 = \sigma_1 l_1, p_2 = \sigma_2 l_2, p_3 = \sigma_3 l_3$, 于是该面上的正应力 σ 与剪应力 τ 的关系为

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= p^2 - \tau^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - \tau^2 \\ &= \sigma_1^2 l_1^2 + \sigma_2^2 l_2^2 + \sigma_3^2 l_3^2 - \tau^2 \end{aligned} \quad (2-31)$$

由于

$$\sigma = p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 l_2^2 + \sigma_3 l_3^2 \quad (2-32)$$

故有

$$\tau = \sqrt{\sigma_1^2 l_1^2 + \sigma_2^2 l_2^2 + \sigma_3^2 l_3^2 - (\sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 l_2^2 + \sigma_3 l_3^2)^2} \quad (2-33)$$

现在我们讨论一种特殊情况,即在主向空间取一斜面,该斜面的法线 n 与三个坐标轴呈

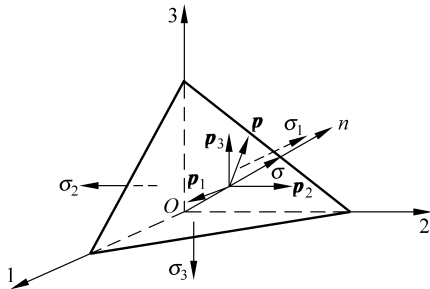


图 2-14

等倾斜,即

$$l_1 = l_2 = l_3$$

由于

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$$

故

$$l_1 = l_2 = l_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

或

$$\arccos(l_1) = \arccos(l_2) = \arccos(l_3) = 54^\circ 44'$$

在这一三维空间中的上半空间(xy 平面以上,即 z 的正方向)可构成四个这样的面,在下半空间(xy 平面以下,即 z 的负方向)也可构成四个这样的面,共有八个。这八个面组成了一个正八面体,其中每一个面称为八面体平面。图 2-15 给出了八面体的图形。

鉴于八面体平面上的应力在塑性理论中的重要性,下面我们给出八面体平面上的正应力和剪应力。八面体平面上的正应力 σ_8 由式(2-32)得

$$\sigma_8 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (2-34)$$

由式(2-33)得八面体平面上的剪应力 τ_8 为

$$\tau_8 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (2-35)$$

一般情况为

$$\tau_8 = \frac{1}{3} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)]^{\frac{1}{2}} \quad (2-35')$$

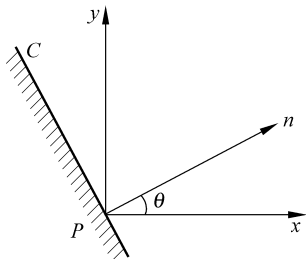


图 2-16

例 2-3 设在平面问题条件下,一点 P 的应力状态为已知,试求(1)主应力及主方向,(2)最大剪应力及其所在的面 θ_p 。

解 (1) 已知一点的应力状态,即给定应力张量

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

设在某一平面 C 与 x 轴成 θ 角(图 2-16),则有

$$l_1 = \cos\theta, \quad l_2 = \sin\theta, \quad l_3 = 0$$

代入式(2-18),得 C 面上的正应力及剪应力分别为

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \quad (a)$$

$$\tau_n = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \quad (b)$$

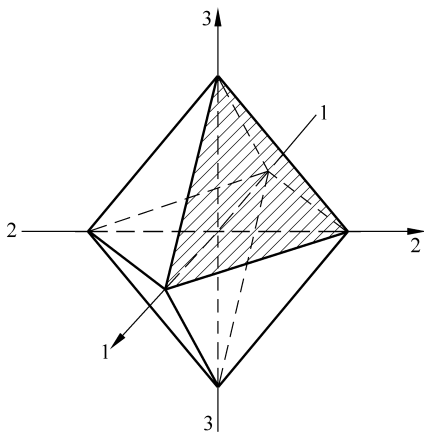


图 2-15

如 n 方向为主方向, C 平面为主平面, 则 $\tau_n = 0$ 由(b)得到

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (c)$$

由于 $\tan 2\theta = \tan(\pi + 2\theta)$, 所以, n 方向及与之正交的方向是两个主方向。两个主平面的法线与 Ox 轴分别呈 θ 及 $\theta + \frac{\pi}{2}$ 角度

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

将由式(c)所得之结果代入式(a), 可得两个主应力 σ_1, σ_2 之值, 亦可由代数运算求出主应力的一般公式为

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (d)$$

(2) 欲求最大或最小剪应力所在的面, 可由下列条件求出:

$$d\tau_n/d\theta = 0$$

由此得

$$\cot 2\theta_p = -2\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y) \quad (e)$$

和前一种情况类似, $2\theta_p$ 和 $2\theta_p + \pi$ 同时满足上式, 由此可知最大和最小剪应力作用面相互垂直。由式(e)求出 $\cos\theta, \sin\theta$ 后, 代入式(b)可得

$$\left. \begin{matrix} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{matrix} \right\} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

当 $\tau_{xy} = 0$ 时, $\sigma_x = \sigma_1, \sigma_y = \sigma_2$ 为两个主应力, 此时最大最小剪应力为

$$\left. \begin{matrix} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{matrix} \right\} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

比较式(c)与(e)可以看出

$$\tan 2\theta = -\cot 2\theta_p = \tan\left(2\theta_p + \frac{\pi}{2}\right)$$

所以, 最大、最小剪应力所在的面与主平面成 45° 角。

2.6 球张量与应力偏量

在外力作用下, 物体的变形通常可分为体积改变和形状改变两种成分。并且认为, 体积的改变是由于各向相等的应力引起的。试验证明^①, 固体材料在各向相等的应力作用下, 一般都表现为弹性性质。因而可以认为, 材料的塑性变形主要是物体产生形状变化时产生的。这样, 在塑性理论中, 常根据这一特点把应力状态进行分解。

在一般情况下, 某一点处的应力状态可以分解为两部分, 一部分是各向相等的压(或拉)应力 σ , 另一部分记为 s_{ij} , 即

^① P. W. Bridgman(1925)的实验证明, 对于金属材料, 在大约 2.5GPa 的静水压力作用下, 才呈现出很小的压缩性(约 0.06%)。