

第 1 章

绪 论

1.1 可靠性的基本概念

可靠性(reliability)是指一个元件、设备或系统在规定时间内和规定的条件下完成规定功能的能力。可靠度则用来作为可靠性的特性指标,表示元件可靠工作的概率。可靠性具有以下三个要素:

第一个要素是“规定的时间”,是指规定时间的长短不同,元件或系统的可靠性不同。一般机电类产品的功能、性能都有随时间衰退的特点,规定的时间越长,最终的可靠性越低。同一种产品不同的使用时间范围,其可靠性水平是不同的。这里的时间定义是广义的,可以是统计的日历小时,也可以是工作循环次数、作业班次或行驶里程等,根据产品具体特性而定。

第二个要素是“规定的条件”,是指因使用工况和环境条件的不同,元件或系统的可靠性水平也存在很大差异。例如将要求恒温或净化环境下使用的设备放到不同的环境下工作,可靠性将会大幅下降。因此要保证使用可靠性,必须严格明确使用条件和环境,对于不按规定条件使用的产品,不能要求保证达到原定的可靠性水平。

第三个要素是“规定的功能”,是指因规定的产品功能判据不同,将得到不同的可靠性评定结果。完成功能和发生故障是可靠性问题的正反两个方面,产品完成了规定的功能认为是可靠的,丧失功能就是发生了故障或失效。同一产品,规定的功能要求不一样,其可靠性也不同。例如,同一辆汽车,一种规定是只要汽车能行驶就算完成功能;另一种规定是即使汽车能行驶,但是若噪声、油耗超标,或者发生螺钉松动、漏水、漏油等现象时也要算作故障,这两种判据下的可靠性数值将有很大差异。

可靠性贯穿在产品 and 系统的整个开发过程(包括设计、制造、试验、运行、管理等环节),形成可靠性工程这门新兴学科。可靠性工程涉及元件失效数据的统计和处理、系统可靠性的定量评定、运行维护、可靠性和经济性的协调等各方面,它具有实用性、科学性和时间性三大特点。实用性是指可靠性工程从它诞生开始,就和工程实践紧密联系与结合,具有强大的生命力。科学性是指可靠性工程有一整套独特的科学理论和方法。时间性是指可靠性存在于产品或系统的整个开发过程,不论在设计阶段、研制阶段、制造阶段、应用阶段可靠性都在

起作用。如果在设计阶段不考虑可靠性,到制造阶段就会出现事倍功半的情况。

可靠性按学科分类,一般可分为可靠性数学、可靠性工程、可靠性管理和可靠性物理等分支。但是从可靠性技术在生产过程各阶段应用的目的和任务划分,大致可分为以下5个分支。

(1) 可靠性设计——通过设计奠定产品的可靠性基础,研究在设计阶段如何预测和预防各种可能发生的故障和隐患。

(2) 可靠性试验——通过试验测定和验证产品的可靠性,研究在有限的样本、时间和试验费用下如何获得合理的评定结果。

(3) 制造阶段可靠性——通过制造实现产品的可靠性,研究制造偏差的控制、缺陷的处理和早期故障的排除,保证设计目标的实现。

(4) 使用阶段可靠性——通过使用维持产品的可靠性,研究产品运行中的可靠性监视、诊断预测,采用售后服务和维修策略等防止可靠性劣化。

(5) 可靠性管理——组织实施以较少的费用、时间实现产品的可靠性目标,研究可靠性目标的实施计划和数据反馈系统。

也有按照对故障处理的先后程序将可靠性技术划分为事前、事中和事后分析技术。

事前分析指在产品的设计、制造阶段预测和预防故障和隐患的发生。

事中分析指在产品使用阶段,通过故障监控和诊断技术来预测和预报故障的征兆和发展趋势,以便及时进行预防性维修。

事后分析指在产品失效或发生故障后进行失效机理分析,将信息反馈给设计、制造部门,以便采取改进对策。

可靠性的技术基础包括:概率论和数理统计;材料、结构、物性学;故障物理;基础试验技术;环境技术等。

在可靠性工程中,一方面应用数理统计评定技术和现场使用信息反馈等手段,建立起能收集复杂产品可靠性的管理体系;另一方面通过对故障物理、试验技术的研究,提供有关产品故障的机理分析、检测、诊断和设计等技术。

可靠性工程与传统的技术概念有很大不同,其特点如下:

(1) 管理和技术高度结合

可靠性工程是介于固有技术和管理科学之间的一门边缘学科。日本把可靠性技术比喻为“病疫学”和“病理学”密切结合的技术。所谓病疫学是指分析和追踪故障的起因及产生的环节,从而将信息反馈给有关单位、指导设计、制造环节的改进,即是可靠性管理的任务。“病理学”则是研究具体故障的消除和预防技术。管理和技术结合,通过管理指导技术的合理应用,这就是可靠性技术的基本思想。

(2) 众多学科的综合

产品、系统的可靠性不是孤立存在的,它受许多环节、因素的影响。因此,可靠性技术和很多领域的技术密切相关,需要得到如系统工程、人机工程、生产工程、材料工程、环境工程、数理统计等学科以及以往的失效经验的支持,它综合应用这些领域的技术成果解决产品的可靠性问题。

(3) 反馈和循环

一个产品的可靠性首先是靠设计,通过制造实现设计目标。为了要把可靠性设计到产

品中去,必须在设计阶段能预测和预防一切可能发生的故障,而预测、预防的依据要靠使用信息的反馈。反馈是可靠性管理技术的基本特点,没有反馈就没有可靠性。通过反馈使设计、试验、制造和使用过程形成一个可靠性保证的循环技术体系。随着循环的反复,可靠性水平不断提高。

需要指出的是,虽然可靠性技术已经引入到各个领域,但应用模式并不相同,目前,除了数理统计、故障物理等基础学科的应用基本相同外,对于可靠性管理、可靠性技术的应用程度和范围因受到原有技术基础、管理体制等条件的限制,基本上都是结合具体的特点以各自的形式发展。

1.2 可靠性工程在电工领域的应用简况

电工领域包括两个大的方面,即电力工程和电工制造。可靠性工程在这两大工业部门都有着广泛的应用,如图 1.2.1 所示。

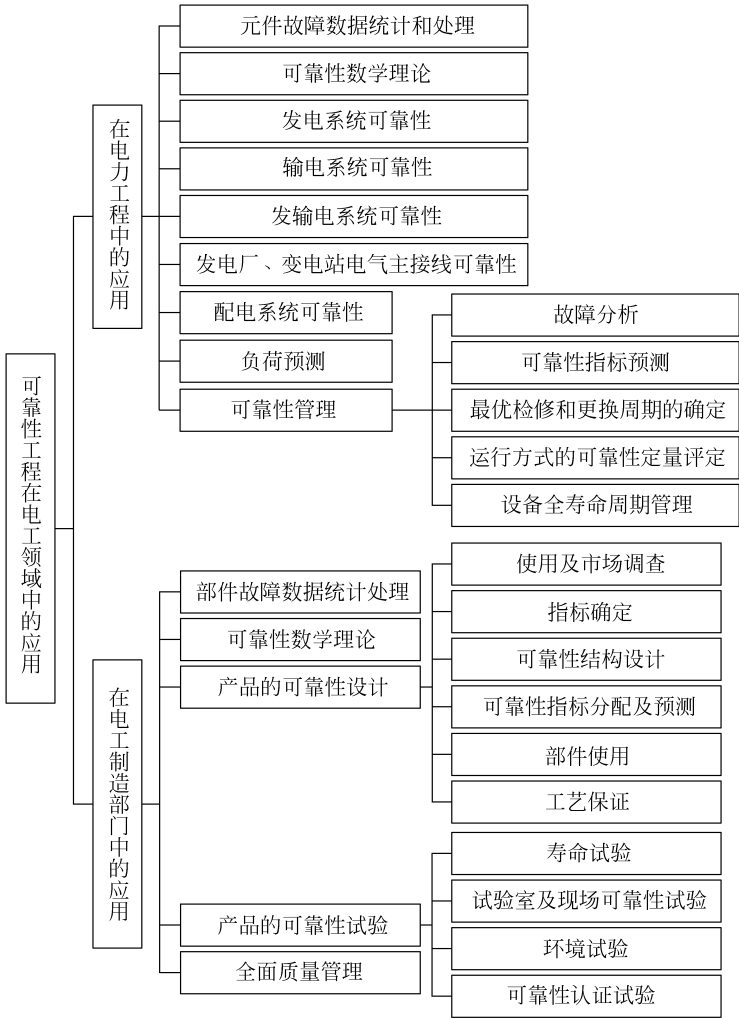


图 1.2.1 可靠性工程在电工领域中的应用

1.3 电力系统可靠性的发展

20 世纪 50 年代,可靠性概念开始用于工业,首先是在军用电子设备中得到应用。到 60 年代中期,美国、西欧、日本、苏联等国家的电力系统陆续出现稳定性的破坏事故,导致大面积停电,由此引起很大的震动,促使可靠性管理和技术引入电力系统。1965 年美国东北部系统发生大停电,美国政府对这次事故组织了调查。在此基础上,1968 年成立了美国电力可靠性协会(National Electric Reliability Council,NERC),将全美分成 12 个安全协作区(后改为 11 个),各自制定了可靠性准则,力求保证电力系统能经受较大事故的冲击,避免由于连锁反应而导致大面积停电。1981 年由于加拿大和墨西哥的一些电力系统的参加,改名为北美电力可靠性协会(North American Electric Reliability Council),英文缩写仍为 NERC。与此同时,西欧、日本各国也纷纷在电力部门开展了电力可靠性管理工作。在推动电力系统可靠性理论和种种技术问题的研究方面,国际大电网会议(Conference Internationale des Grands Reseaux Electriques a Haute Tension,CIGRE)、电气与电子工程师学会(Institute of Electrical and Electronic Engineers,IEEE)、爱迪生电气学会(Edison Electric Institute,EEI)、美国电力科学研究院(Electric Power Research Institute,EPRI)等都做出了重要贡献。

1981 年中国水利电力部颁布实行了《电力系统安全稳定导则》,它是指导电力系统的规划、计划、设计、基本建设、生产运行和科研试验等部门有关电力系统安全稳定运行的三道防线。第一道防线,对常见的单一故障,要保持系统稳定运行和对负荷的正常供电;第二道防线,对出现概率较低的单一严重故障,必须保持系统稳定运行,但允许损失部分负荷;第三道防线,对严重的多重故障,系统可能失去稳定,但必须采取措施防止系统崩溃,避免系统发生长时间大面积停电,并尽可能迅速恢复系统的正常运行。

1983 年我国成立了中国电机工程学会可靠性专业委员会,同年成立了中国电工技术学会电工产品可靠性研究会。1985 年我国水利电力部成立了电力可靠性管理中心,开展了发电设备、输变电设备、配电设备和系统的可靠性统计工作。一些大学和研究机构开展了电力系统可靠性的理论研究和教学,发表了许多论文和专著,大大推动了我国电力系统可靠性的研究。进入 20 世纪 90 年代,中国电力系统可靠性的研究和应用有了新的发展,开发了自主知识产权的评估软件,并得到应用;发电、输变电设备的可靠性统计制度化,并开始用于电力企业的管理。1999 年,电力可靠性管理工作正式纳入行业管理的范畴,电力可靠性管理中心更名为中国电力企业联合会电力可靠性管理中心。2006 年,我国电力可靠性管理正式被纳入国家电力监管委员会的监管体系,电力可靠性管理中心更名为国家电力监管委员会电力可靠性管理中心。现阶段我国电力可靠性管理包括输变电设施与系统可靠性管理、用户供电可靠性管理、直流输电系统可靠性管理以及发电设施及系统可靠性管理等,并建立了相应的标准、准则、制度和规定,形成了电力可靠性管理中心、电网公司、省级电力公司、地市级电力企业、县供电企业、班站多级管理模式。

1.4 电力系统可靠性的基本概念

电力系统可靠性是可靠性理论在电力系统中的应用。电力系统可靠性是对电力系统按可接受的质量标准和所需数量不间断地向电力用户供应电力和电能量能力的度量。

由于电力系统规模巨大、结构复杂,通常将其划分为若干子系统,分别研究各子系统的可靠性,一般将电力系统可靠性研究分为三个层次,如图 1.4.1 所示。第一层(hierarchical level I, HL I)为发电系统可靠性评估,又叫电源可靠性评估。第二层(hierarchical level II, HL II)为发输电系统可靠性评估,又叫大电力系统可靠性评估或主网架可靠性评估,第二层在第一层上增加了输电系统可靠性评估。第三层(hierarchical level III, HL III)是包括发输电配电网在内的电力系统可靠性评估,在第二层的基础上增加发电厂变电站电气主接线和配电系统可靠性评估,由于问题的复杂性,目前只单独进行发电厂变电站电气主接线或配电系统可靠性评估。

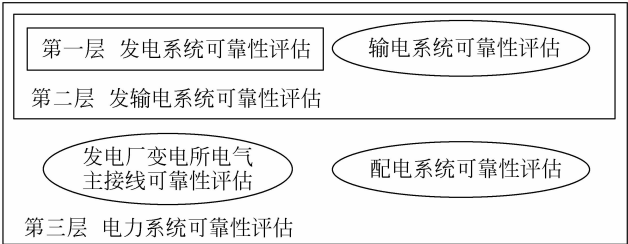


图 1.4.1 电力系统可靠性评估研究层次

发电系统可靠性是对统一并网后的全部发电机组按可接受标准及期望数量,满足电力系统负荷电力和电能量需求的能力的度量。

输电系统可靠性是对从电源点输送电力到供电点按可接受标准及期望数量满足供电负荷电力和电能量需求的能力的度量。

发输电系统可靠性是由统一并网后运行的发电系统和输电系统综合组成的发输电系统按可接受标准和期望数量向供电点供应电力和电能的能力的度量。其可靠性包括充裕性(adequacy)和安全性(security)两方面。充裕性是指发输电系统在系统内发、输、变电设备额定容量和电压波动容许限度内,考虑元件的计划和计划停运以及运行约束条件下连续向用户提供电力和电能的能力。充裕性又称静态可靠性,即在静态条件下,系统满足用户对电力和电能量需求的能力。安全性是指发输电系统经受住突然扰动并不间断地向用户提供电力和电量的能力,突然扰动是指突然短路或失去非计划停运的系统元件。安全性又称动态可靠性,即在动态条件下,系统经受住突然扰动,并满足用户对电力和电能量需求的能力。

配电系统可靠性是对供电点到用户,包括配电变电站、高低压配电线路及接户线在内的整个配电系统及设备按可接受标准及期望数量满足用户电力及电能量需求的能力的度量。

发电厂变电站电气主接线可靠性是发电厂或变电站主接线系统(包括母线、变压器、断路器、电压互感器、隔离开关以及继电保护和自动装置等辅助设备)按可靠性准则满足供电点电力及电能量需求的能力的度量。

1.5 电力系统可靠性学科的主要任务

电力系统可靠性工程从各个方面、各个环节研究系统的故障现象,提出定量评定指标和提高可靠性的措施。具体地说,本学科的主要任务如下:

(1) 研究单个元件和由元件组成的系统的计算模型,定量计算指标,研究如何应用统计的方法去获得元件的可靠性指标。

(2) 鉴于电力系统的范围很大,在研究可靠性时要根据不同环节(发电、输电、配电)的要求,突出主要矛盾,构成不同环节的可靠性数学模型和计算方法。例如发电系统可靠性主要研究发电机组和负荷之间的可靠性,它假定输电环节的可靠度等于1。研究发电厂和变电站的电气主接线的可靠性则把组成主接线的断路器、变压器、母线等作为元件,这些元件的总体便构成系统。这样一来,电力系统可靠性便形成若干主要分支,如电源可靠性、输电系统可靠性、电气主接线可靠性、配电系统可靠性等。描述电力系统不同环节的可靠性的性能指标是不同的,可靠与不可靠的标准也是有差别的。

(3) 寻找提高电力系统可靠性的途径和方法。主要有:

① 尽可能采用可靠性高的电力系统元件(如发电机、变压器、断路器等)。为了保证电力系统元件的可靠性,需要进行产品的可靠性设计,在生产过程中要实行全面质量管理(total quality control),严格进行部件筛选和检验,采用标准化生产,等等。在管理方面,应坚持设计、生产、使用三方的信息交流,还要注意对生产人员进行可靠性工程的宣传教育。

② 在保证系统能够完成预定功能的前提下,把系统的复杂性降至最低限度。实际上,非工作所需元件和不必要的复杂结构只会增加系统故障的概率。

③ 在系统结构上采用储备。典型的做法有工作储备及非工作储备。

④ 进行修理。由工程师和工厂对故障元件进行修理,以恢复元件的功能。

⑤ 维护。定期地用新元件来替换旧元件,使系统处在完成预定功能的良好状态。

(4) 研究可靠性和经济性的最佳搭配。对元件来说,要努力做到在规定的重量、体积或费用条件下最大限度地提高系统的可靠性。或者,在满足规定的可靠度的前提下尽量降低重量、体积、费用或其他要求。

在确定系统某一阶段的可靠性水平时,考虑的也是较高的可靠性增益与为此而付出的成本之间的最佳平衡。系统要有较高的可靠度就要求安装可靠性高的元件或在结构上采用更多的冗余,这样势必提高一次投资与运行费用。反之,如果系统的可靠性太低,则将引起停电损失的增加,而停电损失不仅包括停供负荷造成的工厂收入的净损失,也包括工人窝工、产品报废造成的损失。一般说来,停电损失是可靠度的减函数。图1.5.1表示一个系统的可靠度与成本的关系。其中,曲线C表示一次投资与可靠度的关系;曲线D表示停电成本与可靠度的关系; $C+D$ 表示系统总成本与系统可靠度的关系,是一条下凹曲线,有一个经济上的最佳点,这就是系统最优可靠度的目标值。

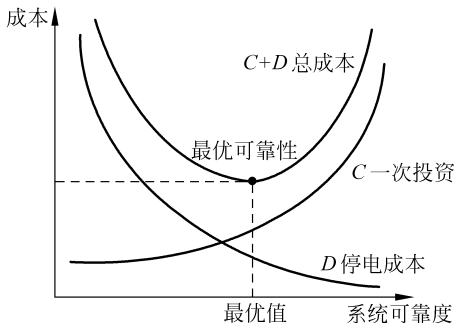


图 1.5.1 系统可靠度与成本的关系

第 2 章

概率与随机过程

2.1 概率的定义与性质

自然界的现象根据其在一定条件下是否出现,可以分为 3 类:必然出现的称为必然事件(如在 1 标准大气压下,水冷却到 0°C 必然结冰);必然不出现的称为不可能事件(如同种电荷相互吸引);可能出现也可能不出现的称为随机事件(如在某一特定时刻电力系统中的故障)。

实践证明,虽然随机事件似乎具有复杂性与紊乱性,但观察大量同类随机事件后,通常总可揭露出一种完全确定和简单的规律性。这种类型的特殊规律,称为统计规律。例如,在一定长时间内进行观察,电力系统中某一设备发生故障的次数或电力系统负荷的变化都具有稳定的统计规律,因此可以对它们进行估计或预测。事实上,正是这种集体随机事件的稳定统计规律,才确定了概率方法的应用基础,而概率论就是研究和揭示随机现象的统计规律性。

对于一个随机事件来说,它在一次试验中可能发生,也可能不发生,为了表征这种可能性的大小,数学上引入了概率的概念。概率是赋予事件的一种测度,每一事件都有一个与之相关的概率值。概率值只能处于 $0\sim 1$ 的闭区间,其中 0 表示不可能事件,1 表示必然事件。概率(probability)的公理化定义为:

设 E 是随机试验, S 是它的样本空间。对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数,记为 $P(A)$,称为事件 A 的概率,如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件:

- (1) 非负性: 对于每一个事件 A , 有 $P(A) \geq 0$;
- (2) 规范性: 对于必然事件 S , 有 $P(S) = 1$;
- (3) 可列可加性: 设 $A_1, A_2, \dots$ 是两两互不相容的事件, 即对于 $i \neq j, A_i \cap A_j = \Phi, i, j = 1, 2, \dots$, 则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots \quad (2-1)$$

由概率的定义,可以推得概率的一些重要性质:

性质 1

$$P(\Phi) = 0 \quad (2-2)$$

性质 2(有限可加性) 若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是两两互不相容的事件, 则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \quad (2-3)$$

性质 3 设 A, B 是两个事件, 若 $A \subset B$, 则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A) \quad (2-4)$$

$$P(B) \geq P(A) \quad (2-5)$$

性质 4 对于任一事件 A , 有

$$P(A) \leq 1 \quad (2-6)$$

性质 5(逆事件的概率) 对于任一事件 A , 有

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (2-7)$$

性质 6(加法公式) 对于任意两事件 A, B 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (2-8)$$

一般地, 对于任意 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, n \geq 2$, 有

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = & \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ & + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned} \quad (2-9)$$

性质 7(乘法公式) 对于任意两事件 A, B , 设 $P(A) > 0$, 则有

$$P(A \cap B) = P(B | A)P(A) \quad (2-10)$$

式中, $P(B|A)$ 为 A 出现的条件下 B 发生的条件概率。如果 A 和 B 独立, 则式(2-10)变成

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (2-11)$$

一般地, 对于任意 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, n \geq 2$, 且 $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, 则有

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = & P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})P(A_{n-1} | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-2}) \\ & \times \dots \times P(A_2 | A_1)P(A_1) \end{aligned} \quad (2-12)$$

性质 8(全概率公式) 若 $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ 表示互斥事件的全集, 即 $P(B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = 1$, 且 $P(B_i \cap B_j) = 0 (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n)$, 则对任意事件 A 有

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A | B_i) \quad (2-13)$$

性质 9(贝叶斯公式) 若 $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ 表示互斥事件的全集, 且 $P(A) > 0, P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 则

$$P(B_i | A) = \frac{P(A | B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A | B_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2-14)$$

2.2 随机变量及其分布

如果随机试验的结果可以用一个数值变量来表示, 这个变量随着试验结果的不同可以取各种不同的数值, 而且以确定的概率取这些数值, 则称此变量为随机变量。随机变量(random variable)的严格数学定义如下:

设随机试验的样本空间为 $S = \{e\}$, $X = X(e)$ 是定义在样本空间 S 上的实值单值函数, 称 $X = X(e)$ 为随机变量。

常见的随机变量可以分为两种类型。如“基荷发电机组的运行状态”这一随机变量的取值通常为运行或停运两个离散状态,这类随机变量称为离散型随机变量;如“发电机修复时间”这一随机变量的取值可能连续地充满某个区间,这类随机变量称为连续型随机变量。

一般在应用中主要感兴趣的不是随机变量可能取什么数值,而是它取某一数值或者某一数值范围的概率。为此引入随机变量的累积概率分布函数这一概念,简称分布函数。

设有一连续随机变量 X , 则 X 不大于一个实数 x 的概率是 x 的一个函数, 这个函数称为随机变量 X 的累积概率分布函数(cumulative probability distribution function, CDF), 可表示为

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du \quad (2-15)$$

其中, $f(x)$ 是概率密度函数(probability density function, PDF), 显然有

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (2-16)$$

X 位于 a 和 b 之间的概率可计算如下:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx \quad (2-17)$$

对于离散随机变量, 其概率密度函数可表示为

$$p_k = P(X = x_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2-18)$$

其累积概率分布函数可表示为

$$F(x_k) = P(X \leq x_k) = \sum_{i \leq k} p_i, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2-19)$$

显然有

$$p_k = F(x_k) - F(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2-20)$$

在可靠性模型和计算中, 有一广泛应用且等值于概率密度函数的函数, 称为风险函数(hazard function), 用 $h(x)$ 来表示, 其定义为

$$h(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < \xi \leq x + \Delta x \mid \xi > x)}{\Delta x} \quad (2-21)$$

为说明其物理意义, 假定选取某设备正常工作时间为随机变量 ξ , 并用 t 作为时间变量, 则式(2-21)的意义可表述为

$$h(t) \Delta t \approx P[\text{在}(t, t + \Delta t) \text{ 间隔发生故障} \mid t \text{ 以前无故障}] \quad (2-22)$$

这就是说, 若已知某设备 t 以前都在工作, 则 $h(t)$ 是在时间 t 以后的短暂瞬间 Δt 内发生故障的概率密度。在第 3 章中将指出, 对于不可修复元件, 机率函数可作为一重要的可靠性尺度, 并与元件寿命的分布和密度函数密切相关。实际上, 随着使用场合的不同, 机率函数可以有不同的名称, 如故障率、修复率等。

进一步可以得到机率函数与概率密度函数和概率分布函数的关系:

$$\begin{aligned} h(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < \xi \leq x + \Delta x \mid \xi > x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P[(x < \xi \leq x + \Delta x) \cap (\xi > x)]}{\Delta x \cdot P(\xi > x)} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < \xi \leq x + \Delta x)}{\Delta x \cdot [1 - P(\xi \leq x)]} \\ &= \frac{f(x)}{1 - F(x)} \end{aligned} \quad (2-23)$$

随机变量的分布函数给出了随机变量的统计规律的完整描述。但实际应用中,通常采用一个或几个称为数字特征的参数来刻画随机变量的基本性质,以下讨论几个常用的数字特征:

1. 数学期望(mathematical expectation)

定义 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P(X = x_k) = p_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

若级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

绝对收敛,则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 的和为随机变量 X 的数学期望,记为 $E(X)$,即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \quad (2-24)$$

设连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$,若积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

绝对收敛,则称积分 $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ 的值为随机变量 X 的数学期望,记为 $E(X)$,即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (2-25)$$

数学期望简称期望,又称均值。数学期望 $E(X)$ 完全由随机变量 X 的概率分布所确定。若 X 服从某一分布,也称 $E(X)$ 是这一分布的数学期望。

定理 设 Y 是随机变量 X 的函数: $Y = g(X)$ (g 是连续函数)。

(i) X 是离散型随机变量,它的分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$,若 $\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k$ 绝对收敛,则有

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k \quad (2-26)$$

(ii) X 是连续型随机变量,它的概率密度函数为 $f(x)$ 。若 $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$ 绝对收敛,则有

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx \quad (2-27)$$

随机变量的数学期望具有下述几个重要性质:

(1) 设 C 是常数,则有 $E(C) = C$ 。

(2) 设 X 是随机变量, C 是常数,则有

$$E(CX) = CE(X) \quad (2-28)$$

(3) 设 X, Y 是两个随机变量,则有

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad (2-29)$$

(4) 设 X, Y 是相互独立的随机变量,则有

$$E(XY) = E(X)E(Y) \quad (2-30)$$