

第3章

线性系统的时域分析

3.1 引言

分析和设计控制系统的首要任务是建立系统的数学模型。一旦获得合理的数学模型,就可以采用不同的分析方法来分析系统的动态性能和稳态性能,同时得出改善系统性能的措施。经典控制理论中常用的工程分析方法有三种,即时域分析法(Time Domain Analysis)、根轨迹法(Root Locus Method)和频率响应法(Frequency Response Method)。不同的方法有不同的特点和适用范围,本章主要讨论线性控制系统的时域分析法。

『Reading Material』

Control systems are required to have satisfactory transient and steady state responses. These are contradictory requirements, and the final design is often a compromise between the two. Quantitative performance measures are required to carry forward the design process and to make comparisons between competing designs. Quantitative performance measures of feedback control systems will enable quantification of design objectives so that design can be carried out logically and systematically (remove fuzziness associated with customer requirements) and enable meaningful comparisons to be made between competing designs. The criteria for selection of performance measures include: ① design objectives translate into simple design rules; ② easy to analyse; ③ experimentally measurable. Design specifications for control systems normally include several time response indices for a specified (test) reference input as well as a desired steady-state accuracy. This topic introduces you to the time domain performance measures that are widely used by control practitioners.

In the following activities, you will explore the relationships between the commonly used quantitative performance measures of feedback control systems and the location of the system transfer function poles and zeros in the s-plane. You will learn that a second order transfer function with damping ratio $\xi \approx 0.7$ has the optimum transient response, while its natural frequency ω_n determines the duration of the transients. It is therefore very desirable to accomplish such a transfer function for feedback control systems.

本章主要内容:

- ☐ 系统时间响应的性能指标
- ☐ 一阶系统的时域分析
- ☐ 二阶系统的时域分析
- ☐ 高阶系统时域分析法概述
- ☐ 控制系统的稳定性分析
- ☐ 控制系统稳态误差的分析及计算
- ☐ MATLAB 在本章中的应用

3.2 系统时间响应的性能指标

时域分析法是指在时间域内研究系统在典型输入信号的作用下,其输出响应随时间变化规律的方法。按照第1章中介绍的对自动控制系统的基本要求,根据时域分析法研究系统性能,可以定量描述包括稳定性(Stability)、快速性(Speed)和准确性(Accuracy)等各项性能指标。时域分析法的物理概念清晰,准确度较高,在已知系统结构和参数并建立了系统的微分方程后,使用时域分析法比较方便,从而它也成为控制系统研究中直观而有效的方法之一。

下面通过阅读英文资料,辨析时域与时变系统的基本定义。

『Terms and Concepts』

Time domain: the mathematical domain that incorporates the time response and the description of a system in terms of time.

Time-varying system: a system for which one or more parameters may vary with time.

1. 典型的输入信号

研究系统的动态特性,就是研究系统在输入信号作用下,考察输出量是如何按输入量的变化而变化的,即系统对输入如何产生响应。控制系统的响应是由系统本身的结构参数、初始状态和输入信号的形式所决定的。为了便于分析和设计,提出两个假定,第一个假定,在输入信号作用于系统的初始状态($t=0$)时,系统相对静止,即为零初始状态;第二个假定,需要假定一些典型的输入信号,作为系统的实验信号。选取这些实验信号时应考虑以下三个方面。

(1) 选取的输入信号的典型性应反映系统工作的大部分情况。

(2) 选取的输入信号具有一定代表性,且其数学表达式简单,以便于数学分析和实验研究。

(3) 应选取能使系统工作在最不利情况下的输入信号作为典型的实验输入信号。

综上所述,选取常用的典型输入信号有:阶跃信号、斜坡(速度)信号、加速度(抛物线)信号、脉冲信号和正弦信号。

1) 阶跃信号

阶跃信号(Step Signal)表示输入中瞬时的变化,如图3-2-1(a)所示。它的数学表达

式为

$$r(t) = \begin{cases} A, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (3-2-1)$$

式中, A 为一常数。当 $A=1$ 时称为单位阶跃信号, 记为 $1(t)$ 。阶跃信号 $r(t)$ 的拉氏变换为

$$\mathcal{L}[r(t)] = \frac{A}{s} \quad (3-2-2)$$

阶跃信号是评价系统动态性能时应用较多的一种典型外作用。在实际运用中, 最经常采用的实验信号就是阶跃信号, 它可以表示指令的突然转换、电源的突然接通、设备故障和负荷的突变等。由于阶跃信号的频谱具有很宽的频带, 通常也作为测试信号, 等价于应用无数个频率范围很宽的正弦信号。

2) 斜坡信号

斜坡信号(Ramp Signal)是指由零值开始随时间作线性增长的信号, 如图 3-2-1(b)所示。它的数学表达式为

$$r(t) = \begin{cases} At, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (3-2-3)$$

式中, A 为一常数。当 $A=1$ 时称为单位斜坡信号。斜坡信号 $r(t)$ 的拉氏变换为

$$\mathcal{L}[r(t)] = \frac{A}{s^2} \quad (3-2-4)$$

斜坡信号可以看作是阶跃信号的积分, 有时又称为速度信号。斜坡信号的变化要比阶跃信号快一个等级, 它具有测试系统将如何对随时间变化的信号做出响应的能力。大型船闸的匀速升降、列车的匀速前进、主拖动系统发出的位置信号等都可以看成斜坡信号。

3) 加速度信号

加速度(抛物线)信号(Parabolic Signal)可以看成是数学上的抛物线函数, 特点是随时间以等加速度不断增长, 如图 3-2-1(c)所示。它的数学表达式为

$$r(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}At^2, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (3-2-5)$$

式中, A 为一常数。当 $A=1$ 时称为单位加速度信号。加速度信号 $r(t)$ 的拉氏变换为

$$\mathcal{L}[r(t)] = \frac{A}{s^3} \quad (3-2-6)$$

加速度信号可以看作是斜坡信号的积分, 有时又称为抛物线信号。加速度信号的变化要比斜坡快一个等级, 在实际运用中很少发现有必要使用变化比加速度信号更快的测试信号。

4) 脉冲信号

脉冲信号(Impulse Signal)可以看成是一个持续时间极短的信号, 如图 3-2-1(d)所示。它的数学表达式为

$$r(t) = \begin{cases} \frac{A}{\epsilon}, & 0 < t < \epsilon \\ 0, & t < 0 \text{ 或 } t > \epsilon \end{cases} \quad (3-2-7)$$

式中, A 为一常数, ϵ 为脉冲的宽度。当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时称为单位理想脉冲信号, 记为 $\delta(t)$, 如

图 3-2-1(e)所示,即

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (3-2-8)$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (3-2-9)$$

(理想)脉冲信号 $\delta(t)$ 的拉氏变换为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\delta(t)] &= \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\epsilon} \frac{1}{\epsilon} e^{-st} dt = \left[\frac{1}{\epsilon} \frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon s} \left[1 - \left(1 - \epsilon s + \frac{1}{2!} \epsilon^2 s^2 - \dots \right) \right] = 1 \end{aligned} \quad (3-2-10)$$

$\delta(t)$ 所描述的脉冲信号实际上是无法获得的,在现实中不存在,只有数学意义,但是它却是一个重要的数学工具。在工程实践中,当 ϵ 远小于被控对象的时间常数时,这种窄脉冲信号就可近似地当成 $\delta(t)$ 信号。脉冲电压信号、冲击力等都可以近似为脉冲信号。

5) 正弦信号

正弦信号(Sinusoidal Signal)如图 3-2-1(f)所示。它的数学表达式为

$$r(t) = A \sin \omega t \quad (3-2-11)$$

式中, A 为振幅, ω 为角频率。

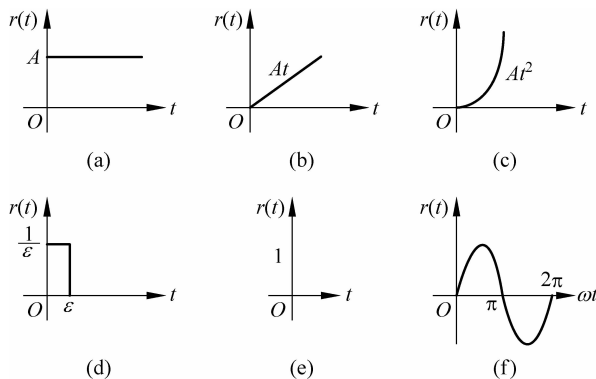


图 3-2-1 典型输入信号

正弦信号可以求得系统对不同频率的正弦函数输入的稳态响应,称为频率响应,将在后续章节阐述。在实际过程中,交流电源、电磁波、机车设备受到的振动、电源和机械振动的噪声等都可以近似为正弦信号。

以上所述输入信号是按时间变化规律来划分的,实际使用时它们可以是任何不同的物理量,如温度、电压、电流、转角、转速、压力等。同时这些测试信号都具有在数学上描述简单和实验室容易实现的特点。究竟采用哪一种典型输入信号分析系统的特性,取决于系统在正常工作情况下最常见的输入信号形式。如果系统的输入信号是一个突变的量,则应选取阶跃信号;如果系统的输入信号是一个瞬时冲击的函数,则选取脉冲信号最为合适;如果系统的输入信号是随时间逐渐变化的函数,则应选取斜坡信号。一般来说,控制系统在实验信号的基础上设计出来以后,在实际信号的作用下,系统响应特性都能满足要求。表 3-2-1

给出了 5 种典型输入信号的时域表达式和复域表达式。

表 3-2-1 典型输入信号

| 名 称 | 时域表达式 | 复域表达式 |
|---------|----------------------------|----------------------------------|
| 单位阶跃信号 | $1(t), t \geq 0$ | $\frac{1}{s}$ |
| 单位斜坡信号 | $t, t \geq 0$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| 单位加速度信号 | $\frac{1}{2}t^2, t \geq 0$ | $\frac{1}{s^3}$ |
| 单位脉冲信号 | $\delta(t), t = 0$ | 1 |
| 正弦信号 | $A \sin \omega t$ | $\frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$ |

『Reading Material』

In practice, actual input signal to the control system is quite varied and unpredictable, and/or too complex to analyse. When carrying out mathematical analysis of linear systems, we can consider the input magnitude to be unity without any loss of generality. In experimental investigation of practical systems, however, the magnitude of the input test signal should be carefully selected (depends on the particular system being tested). Otherwise one or more components of the system may be forced to operate outside their linear range. The linear model will not be applicable then, and the output of the system will differ significantly from that predicted by the transfer function analysis.

2. 单位冲激响应

设系统的输入响应 $R(s)$ 与输出信号 $C(s)$ 之间的传递函数是 $G(s)$, 则有

$$C(s) = G(s)R(s) \tag{3-2-12}$$

若输入信号是单位冲激函数 $\delta(t)$, 即 $r(t) = \delta(t)$, 则

$$\begin{cases} R(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \\ C(s) = G(s) \\ c(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t) \end{cases} \tag{3-2-13}$$

在零初始条件下, 当系统的输入信号是单位冲激函数 $\delta(t)$ 时, 系统的输出信号称为系统的单位冲激响应。系统的单位冲激响应就是系统传递函数 $G(s)$ 的拉氏变换 $g(t)$ 。同传递函数一样, 单位冲激函数也是系统的数学模型。

对式(3-2-12)两边取拉氏反变换, 并利用拉氏变换的卷积定理可得

$$c(t) = g(t) * r(t) = \int_0^t g(\tau) * r(t - \tau) d\tau = \int_0^t g(t - \tau) * r(\tau) d\tau \tag{3-2-14}$$

可见, 输出信号 $c(t)$ 等于单位冲激响应 $g(t)$ 与输入信号 $r(t)$ 的卷积。

3. 系统的时间响应

若系统输出信号的拉氏变换是 $C(s)$, 则系统的时间响应 $c(t)$ 是

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(s)] \quad (3-2-15)$$

根据拉氏反变换中的部分分式法可知, 有理分式 $C(s)$ 的每一个极点(分母多项式的根)都对应于 $c(t)$ 中一个时间响应项, 即运动模态, 而 $c(t)$ 就是由 $C(s)$ 的所有极点所对应的时间响应项(运动模态)的线性组合。不同极点所对应的运动模态如表 3-2-2 所示。

表 3-2-2 极点与运动模态

| 极 点 | 运 动 模 态 |
|------------------------------|---|
| 实数单极点 σ | $ke^{\sigma t}$ |
| m 重实数极点 σ | $(k_1 + k_2 t + \cdots + k_m t^{m-1})e^{\sigma t}$ |
| 一对复数极点 $\sigma + j\omega$ | $ke^{\sigma t} \sin(\omega t + \phi)$ |
| m 重复数极点 $\sigma + j\omega$ | $e^{\sigma t} [k_1 \sin(\omega t + \phi_1) + k_2 t \sin(\omega t + \phi_2) + \cdots + k_m t^{m-1} \sin(\omega t + \phi_m)]$ |

若系统的输入信号是 $R(s)$, 传递函数是 $G(s)$, 则零初始条件下有

$$C(s) = G(s)R(s)$$

可见, 输出信号拉氏变换式的极点是由传递函数的极点和输入信号拉氏变换式的极点组成的。通常把传递函数极点所对应的运动模态称为该系统的自由运动模态或振型, 或称为该传递函数或微分方程的模态或振型。系统的自由运动模态与输入信号无关, 也与输出信号的选择无关。传递函数的零点并不形成运动模态, 但它们却影响各模态在响应中所占的比例, 因而也影响时间响应及其曲线形状。

系统的时间响应中, 与传递函数极点对应的时间响应分量称为瞬(暂)态分量, 与输入信号极点对应的时间响应分量称为稳态分量。

根据数学中拉氏变换的微分性质和积分性质可以推导出线性定常系统的下述重要特性: 系统对输入信号导数的响应, 等于系统对该输入信号响应的导数; 系统对输入信号积分的响应, 等于系统对该输入信号响应的积分, 积分常数由零输出的初始条件确定。可见, 一个系统的单位阶跃响应、单位冲激响应和单位斜坡响应中, 只要知道一个, 就可通过微分或积分运算求出另外两个。

『Reading Material』

Poles are the set of values of s that make the value of the transfer function infinity. Zeros are the set of values of s that make the value of the transfer function zero. The characteristics of poles and zeros of a transfer function can be described as the following.

- (1) Poles are those values of s that make the transfer function infinity.
- (2) The equation obtained by equating denominator of the transfer function to zero is referred to as the characteristic equation.
- (3) Poles are the roots of the characteristic equation.
- (4) Zeros are those values of s that make the transfer function zero.
- (5) Zeros are the roots of the equation obtained by equating the numerator of the

transfer function to zero.

(6) Poles play much more important role than zeros in determining the system dynamics.

4. 动态响应与稳态响应

系统在输入信号的作用下,其输出随时间变化的过程称为系统的时间响应。任何一个控制系统的时间响应都由瞬态响应和稳态响应两大部分组成。

1) 瞬态过程

瞬态响应(Transient Response)又称为过渡过程或动态响应,是指系统在典型输入信号作用下,系统输出量从初始状态到最终状态的响应过程,由于实际系统具有惯性、摩擦以及其他原因,系统输出量不可能完全复现输入量的变化。根据系统结构和参数选择的情况,动态过程表现为衰减、发散或等幅震荡形式。显然,一个可以实际运行的控制系统,其动态过程必须是衰减的,换句话说,系统必须是稳定的。动态响应除了提供系统稳定性的信息外,还可以提供响应速度及阻尼情况等信息,这些信息用动态性能来描述。

2) 稳态响应

稳态响应(Steady-State Response)又称稳态过程,是指系统在典型输入信号作用下,当时间 t 趋于无穷时,系统输出量的表现方式。它表征系统输出量最终复现输入量的程度,提供系统有关稳态误差的信息。从理论上讲,只有时间趋于无穷大时才进入稳态过程,但这在工程应用中是无法实现的,因此在工程中只讨论典型输入信号加入后一段时间里的动态过程,在这段时间里反映了系统主要的动态性能指标。而在这段时间之后,认为系统进入了稳态过程。

『Reading Material』

The time response of a control system is usually divided into two parts: transient response and steady-state response. If a time response is denoted by $c(t)$, then the transient response and steady-state response may be denoted by $c_t(t)$ and $c_{ss}(t)$. The steady-state response is simply the fixed response when time reaches infinity, i. e. ,

$$c_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t)$$

Therefore, a sine wave is considered as steady-state response because its behavior is fixed as time approaches infinity.

Transient response is defined as the part of the response that goes to zeros as time becomes large. Therefore, $c_t(t)$ has the property of

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_t(t) = 0$$

The transient response of a control system is of importance, since it is a part of the dynamic behavior of the system; and the difference between the response and the input or the desired response, before the steady state is reached, must be closely watched. If the steady-state response of the output does not agree with the steady state of the reference exactly, the system is said to have a steady-state error.

5. 瞬态性能指标与稳态性能指标

在许多实际情况中,控制系统所需要的性能指标常以时域量值的形式体现,即通常使用单位阶跃信号作为测试信号,来计算在时间域的瞬态和稳态的性能。因为单位阶跃信号响应比较容易,而且阶跃信号对系统来说是最严峻的工作状态,如果系统在阶跃信号作用下的性能指标能满足要求,那么系统在其他形式的输入信号下,其性能指标一般也可满足要求。

1) 瞬态性能指标

描述稳定的系统在单位阶跃信号作用下瞬态过程随时间的变化状况的指标,称为瞬态性能指标(Transient Performance Specifications)。图 3-2-2 给出了控制系统的单位阶跃响应曲线,根据图示定义如下瞬态性能指标。

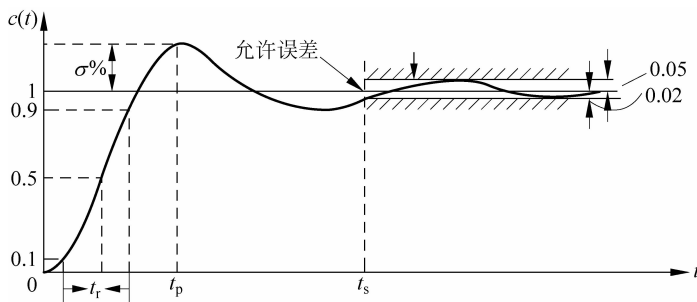


图 3-2-2 控制系统的单位阶跃响应曲线

(1) 上升时间 t_r (Rise Time): 指响应曲线从零时刻开始第一次上升到稳态值所需要的时间,也可以指响应曲线从稳态值的 10% 上升到稳态值的 90% 所需要的时间。

(2) 峰值时间 t_p (Peak Time): 指响应曲线从零时刻开始到达第一个峰值的时间。

(3) 超调量 $\sigma\%$ (Percentage Overshoot): 指响应曲线的最大峰值与稳态值之差和相对稳态值之比的百分数,即

$$\sigma\% = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% \quad (3-2-16)$$

若系统输出响应单调变化,则无超调量。超调量也称最大超调量,或百分比超调量。

(4) 调节时间 t_s (Setting Time): 指响应曲线从零时刻开始到达并保持在稳态值 $\pm 5\%$ 或 $\pm 2\%$ 范围内所需的最短时间。调节时间又称为过渡过程时间。

(5) 振荡次数 N : 在调整时间 t_s 内响应曲线振荡次数。

上述这些指标描述了瞬态响应过程,反映了系统的动态性能。其中,上升时间 t_r 、峰值时间 t_p 均表征系统响应初始阶段的快速性;调节时间 t_s 表示系统过渡过程的持续时间,从总体上反映了系统的快速性;最大超调量 $\sigma\%$ 反映了系统动态过程的平稳性,即用超调量表示实际响应与期望响应的接近程度。由控制系统本身的特性决定,这些要素通常是相互矛盾的,因而必须做出折中的选择。

『Terms and Concepts』

Test input signal: an input signal used as a standard test of a system's ability to

respond adequately.

Performance index: a quantitative measure of the performance of a system.

Overshoot: the amount by which the system output response processed beyond the desired response.

Peak time: the time for a system to respond to a step input and rise to a peak response.

Rise time: the time for a system to respond to a step input and attain a response equal to a percentage of the magnitude of the input.

Setting time: the time required for the system output to settle within a certain percentage of the input amplitude.

2) 稳态性能指标

当响应时间大于调节时间时,系统进入稳态过程。稳态误差(Steady-State Error)是描述系统稳态性能的一种性能指标。其定义为

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - c(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{lime}(t) \quad (3-2-17)$$

稳态误差是控制系统精度和抗干扰能力的一种度量,反映控制系统复现或跟踪输入信号的能力。

3.3 一阶系统的时域分析

用一阶微分方程描述的控制系统称为一阶系统。一阶系统在控制工程中应用广泛,一些控制部件及简单系统(如 RC 网络、发电机、空气加热器、液面控制系统等)都可用一阶系统来描述。有些高阶系统的特征,常可用一阶系统的特征来近似表征。

『Terms and Concepts』

The order of a system is defined as the degree of its characteristic polynomial. A first-order system is represented by a first-order differential equation.

3.3.1 一阶系统的数学模型和结构图

如图 3-3-1 所示 RC 滤波电路为一阶系统,其微分方程为

$$RC \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t) \quad (3-3-1)$$

当该电路的初始条件为零时,一阶系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (3-3-2)$$

式中, $T=RC$ 为时间常数,它是表征系统惯性重要的特征参数,反映了系统过渡过程的品质。 T 越小,系统响应越快。

一阶系统的结构图及其简化形式如图 3-3-2(a)和图 3-3-2(b)所示。

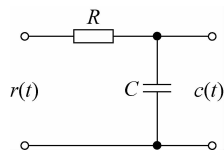


图 3-3-1 RC 滤波电路

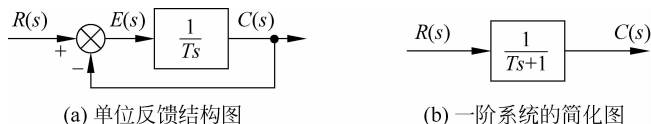


图 3-3-2 一阶系统结构图

3.3.2 一阶系统的单位阶跃响应

单位阶跃函数的拉氏变换为 $R(s)=1/s$, 故输出的拉氏变换式为

$$C(s) = G(s)R(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1} \quad (3-3-3)$$

取 $C(s)$ 的拉氏逆变换, 得

$$c(t) = C_{ss} + C_{tt} = 1 - e^{-t/T} \quad t \geq 0 \quad (3-3-4)$$

由式(3-3-4)可以看出:

- (1) 输出量的初始值为零, 而终值将变为 1。
 - (2) C_{ss} 称为稳态分量, 它的变化规律由输入信号的形式决定; C_{tt} 称为暂态分量。
 - (3) 该响应曲线的一个重要特征是, 当 $t=T$ 时, $c(t)$ 的数值等于 0.632, 即响应 $c(t)$ 达到了其总变化的 63.2%。
 - (4) 该响应曲线时间常数 T 越小, 系统的响应越快。
- 下面分析一阶系统的输入单位阶跃信号的特性指标。

1. 调节时间 t_s

图 3-3-3 为一阶系统的单位响应曲线。当 $t=T$ 时, 指数响应曲线将从 0 上升到稳定值的 63.2%; 当 $t=2T$ 时, 指数响应曲线上升到稳定值的 86.5%; 当 $t=3T, 4T, 5T$ 时, 曲线分别上升到稳定值的 95%、98.2% 和 99.3%。故一般取 $t_s=(3\sim 4)T$ 。

2. 最大超调量 $\sigma\%$

一阶系统的单位阶跃响应为非周期响应, 故系统无振荡、无超调, $\sigma\%=0$ 。

3. 稳态误差 e_{ss}

由于 $c(t)$ 的终值为 1, 因而系统在阶跃输入时稳态误差为零。

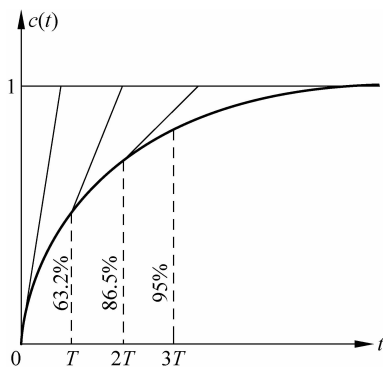


图 3-3-3 一阶系统的单位阶跃响应曲线

3.3.3 一阶系统的单位脉冲响应

单位脉冲信号的拉氏变换为 1, 所以系统的输出为

$$C(s) = G(s)R(s) = \frac{1}{Ts+1} \quad (3-3-5)$$

其拉氏反变换为

$$c(t) = \frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}} \quad t \geq 0 \quad (3-3-6)$$

一阶系统的单位脉冲响应为一单调下降的指数曲线,如图 3-3-4 所示。单位脉冲响应在 $t=0$ 时等于 $1/T$,它与单位阶跃响应在 $t=0$ 时的变化率相等。这说明单位脉冲响应是单位阶跃响应的导数,而单位阶跃响应就是单位脉冲响应的积分。这个结果进一步说明了单位阶跃信号作为典型输入信号的重要性和代表性。

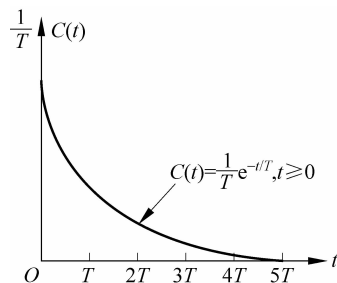


图 3-3-4 一阶系统的脉冲响应曲线

3.3.4 一阶系统的单位斜坡响应

单位斜坡信号 $r(t)=t$ 的拉氏变换为 $R(s)=1/s^2$, 所以系统的输出为

$$C(s) = G(s) \cdot R(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1} \quad (3-3-7)$$

其拉氏反变换为

$$c(t) = C_{ss} + C_{tt} = (t - T) + Te^{-\frac{t}{T}} \quad t \geq 0 \quad (3-3-8)$$

式中,稳态分量 $C_{ss}=t-T$,表示一个与单位斜坡信号斜率相同、时间滞后 T 的斜坡函数。暂态分量 $C_{tt}=Te^{-\frac{t}{T}}$ 按指数规律衰减至零。

因为

$$C_{tt} = Te^{-\frac{t}{T}} \quad (3-3-9)$$

所以一阶系统的斜坡相应稳态误差为

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - c(t)] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} T(1 - e^{-\frac{t}{T}}) = T \end{aligned} \quad (3-3-10)$$

从提高斜坡响应的精度来看,要求一阶系统的时间常数 T 要小,即时间常数 T 越小,响应速度越快,跟踪误差越小,输出信号滞后于输入信号的时间也越短。同样地,单位斜坡响应就是单位阶跃响应的积分。图 3-3-5 为一阶系统的单位斜坡响应。

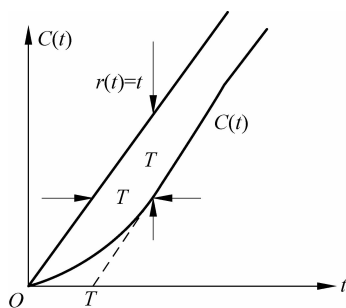


图 3-3-5 一阶系统的斜坡响应曲线

3.3.5 一阶系统的单位加速度响应

单位加速度信号 $r(t)=\frac{1}{2}t^2$ 的拉氏变换为 $R(s)=1/s^3$, 所以系统的输出为

$$C(s) = G(s)R(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s^3} = \frac{1}{s^3} - \frac{T}{s^2} + \frac{T^2}{s} - \frac{T^3}{Ts+1} \quad (3-3-11)$$

其拉氏反变换为

$$c(t) = C_{ss} + C_{tt} = \frac{1}{2}t^2 - Tt + T^2(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad t \geq 0 \quad (3-3-12)$$

因为

$$e(t) = r(t) - c(t) = Tt - T^2(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad (3-3-13)$$

所以一阶系统的加速度响应稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - c(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} Tt - T^2(1 - e^{-\frac{t}{T}}) = \infty \quad (3-3-14)$$

这就意味着,对于一阶系统来说,不能实现对加速度输入信号的跟踪。

比较一阶系统对上述信号的输出响应可以发现,脉冲响应、阶跃响应、斜坡响应之间也存在同样的对应关系。这表明,系统对某种输入信号导数的响应,等于对该输入信号响应的导数;反之,系统对某种输入信号积分的响应,等于系统对该输入信号响应的积分。这是线性定常系统的一个重要特征,它不仅适用于一阶线性定常系统,也适用于高阶线性定常系统。因此,在后面的分析中,将主要研究系统的单位阶跃响应。

【例 3-3-1】 已知系统结构图如图 3-3-6 所示,其中, $G(s) = \frac{10}{0.2s+1}$, 加上 K_0, K_H 环节,使 t_s 减小为原来的 0.1 倍,且总放大倍数不变,求 K_0, K_H 。

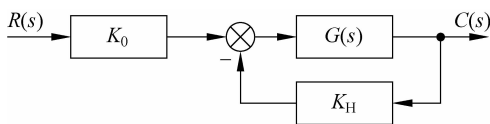


图 3-3-6 系统结构图

解: 依题意,要使闭环系统 $t_s^* = 0.1 \times 0.2 = 0.02$, 且闭环增益为 10。

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= K_0 \frac{G(s)}{1 + K_H G(s)} = K_0 \frac{\frac{10}{0.2s+1}}{1 + \frac{10K_H}{0.2s+1}} \\ &= \frac{10K_0}{0.2s+1+10K_H} = \frac{10K_0/(1+10K_H)}{\frac{0.2}{1+10K_H}s+1} \end{aligned}$$

$$\text{令} \begin{cases} T = \frac{0.2}{1+10K_H} = 0.02 \\ K = \frac{10K_0}{1+10K_H} = 10 \end{cases} \quad \text{联立解出} \begin{cases} K_H = 0.9 \\ K_0 = 10 \end{cases}$$

3.4 二阶系统的时域分析

如果控制系统的运动方程为二阶微分方程,或者自动控制系统的特征方程 s 的最高阶次为二次,则该系统为二阶系统。例如 RLC 网络、机械平移系统和位置随动系统。

『Terms and Concepts』

The second-order system is described by second-order differential equations. Second-order systems are important because their behavior is very different from first-order systems and may exhibit feature such as oscillatory response, or overshoot. Moreover, their analysis generally is helpful to form basis for the understanding of analysis and design techniques.

已知 RLC 网络如第 2 章中所示,其运动方程为

$$LC \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + RC \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t) \quad (3-4-1)$$

传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{1/LC}{s^2 + (R/L)s + 1/LC} \quad (3-4-2)$$

令 $\omega_n^2 = 1/LC$, 则 $\omega_n = 1/\sqrt{LC}$ 称为无阻尼振荡频率或自然频率, 属于闭环系统的固有频率;

令 $2\xi\omega_n = R/L$, 则 $\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ 称为二阶系统的阻尼比 (Damping Ratio) 或相对阻尼系数, 量纲为 1。传递函数变形为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-4-3)$$

令式 (3-4-3) 的分母多项式为零, 得到二阶系统的特征方程

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3-4-4)$$

其特征根为

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (3-4-5)$$

由上可知, 二阶系统的动态特性取决于 ξ 和 ω_n 这两个参数。其中, 根据阻尼比 ξ 的取值, 这两个极点可以是实数或者一对共轭复数, 即其特征根和瞬态响应也有很大的差异。

『Terms and Concepts』

Critical damping: The case where damping is on the boundary between underdamping and overdamping.

Damp ratio: A measure of damping. A dimensionless number for the second-order characteristic equation.

3.4.1 二阶系统的单位阶跃响应

1. 无阻尼 ($\xi = 0$, Underdamped)

当 $R=0$, 即 $\xi=0$ 时, 系统具有一对共轭虚根 $s_{1,2} = \pm j\omega_n$, 对应的单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 - \cos\omega_n t \quad (3-4-6)$$

式 (3-4-6) 表明系统在无阻尼时, 响应是一个纯正弦信号, 电路中将发生不衰减的电磁振荡现象, 振荡频率为 ω_n 。

2. 欠阻尼 ($0 < \xi < 1$, Underdamping)

当 $0 < R < R_c$ ($R_c = 2\sqrt{C/L}$), 即 $0 < \xi < 1$ 时, 系统具有一对共轭复根, 即

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d \quad (3-4-7)$$

式中, $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ 称为有阻尼振荡频率 (或有阻尼自然频率)。

对于单位阶跃输入信号, $R(s) = 1/s$, 则系统输出的拉氏变换为

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \xi\omega_n - j\omega_d)(s + \xi\omega_n + j\omega_d)} \quad (3-4-8)$$

对式(3-4-8)取拉氏反变换,得到对应的单位阶跃响应为

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(s)] = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\omega_d t + \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) \quad t \geq 0 \quad (3-4-9)$$

由式(3-4-9)可知,欠阻尼二阶系统的单位阶跃响应有稳态响应分量和瞬态响应分量组成,等式右边第一项为稳态响应分量 1,第二项为瞬态响应分量,是一个幅值按指数规律衰减的阻尼正弦振荡,振荡频率为 ω_d ,而 ω_d 正好由极点的虚部给出,衰减速度则由常数决定,正好由极点的实部给出。从电路中分析,当 $0 < R < R_c$ ($R_c = 2\sqrt{C/L}$),即 $0 < \xi < 1$ 时,电路中将发生衰减振荡的电磁现象, R 越大,电磁振荡衰减越快。

3. 临界阻尼($\xi = 1$, Critical Damping)

当 $R \neq 0$,即 $\xi = 1$ 时,系统具有一对重负实根,即

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} = -\omega_n \quad (3-4-10)$$

对于单位阶跃输入信号, $R(s) = 1/s$,则系统输出的拉氏变换为

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} \quad (3-4-11)$$

对式(3-4-11)取拉氏反变换得对应的单位阶跃响应为

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(s)] = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \quad t \geq 0 \quad (3-4-12)$$

由式(3-4-12)可知,临界阻尼二阶系统的单位阶跃响应有稳态响应分量和瞬态响应分量组成,等式右边第一项为稳态响应分量 1,第二项为瞬态响应分量,是一个衰减的过程。从电路中分析,当 $R \neq 0$ 时,将对电磁振荡起阻尼作用。 R 越大,阻尼越大,故 R 称为 RLC 电路的阻尼系数, $R = R_c$ 称为临界阻尼系数。而 $\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{R_c} = \frac{\text{实际阻尼系数}}{\text{临界阻尼系数}}$,故 ξ 称为相对阻尼系数或阻尼比。

4. 过阻尼($\xi > 1$, Overdamp/Overdamping)

当 $R > R_c$,即 $\xi > 1$ 时,系统具有一对不相等的负实根,即

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (3-4-13)$$

对于单位阶跃输入信号, $R(s) = 1/s$,则系统输出的拉氏变换为

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \xi\omega_n + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1})(s + \xi\omega_n - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1})} \cdot \frac{1}{s} \quad (3-4-14)$$

对式(3-4-14)取拉氏反变换,得到对应的单位阶跃响应为

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(s)] = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right) \quad t \geq 0 \quad (3-4-15)$$

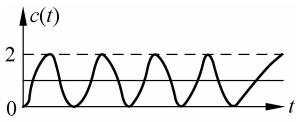
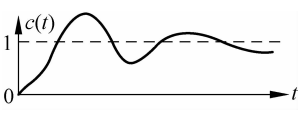
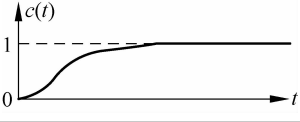
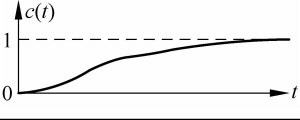
式中, $s_1 = (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n$, $s_2 = (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n$ 。

由式(3-4-15)可知,过阻尼二阶系统的单位阶跃响应由稳态响应分量和瞬态响应分量组成,等式右边第一项为稳态响应分量 1,第二项为瞬态响应分量,是两个指数衰减过程的叠加,因而瞬态响应是单调的衰减过程。从电路中分析,当 $R > R_c$ ($R_c = 2\sqrt{C/L}$),即 $\xi > 1$

时,电路中将发生单调变化的电磁现象。

表 3-4-1 表示当 ξ 为不同值时,其相应系统极点的数值与阶跃响应曲线。

表 3-4-1 ξ 不同取值时的二阶系统的单位阶跃响应

| 阻 尼 比 | 特 征 根 | 单 位 阶 跃 响 应 |
|------------------------|--|--|
| 无 阻 尼 ($\xi=0$) | 一对共轭纯虚根 $s_{1,2} = \pm j\omega_n$ | 等幅振荡过程  |
| 欠 阻 尼 ($0<\xi<1$) | 一对实部为负的共轭负根 $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\xi^2}$ | 衰减振荡过程  |
| 临 界 阻 尼 ($\xi=1$) | 两个相等的负实根 $s_{1,2} = -\omega_n$ | 非周期过程  |
| 过 阻 尼 ($\xi>1$) | 两个不相等的负实根 $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2-1}$ | 非周期过程  |

3.4.2 欠阻尼二阶系统的动态性能分析

通常,控制系统的性能指标是通过其单位阶跃响应的特征量来描述的。为了定量地评价二阶系统的控制质量,需要进一步分析 ξ 和 ω_n 对系统单位阶跃响应的影响,并定义二阶系统单位阶跃响应的一些特征量作为评价系统的性能指标。

在实际工程控制中,除了一些不允许产生振荡的系统之外,通常希望系统的响应过程在具有适当的振荡特性情况下,能有较短的调整时间和较高的响应速度。在设计二阶系统时,一般取 $\xi=0.4\sim 0.8$,即系统工作在欠阻尼状态下。小的 $\xi(\xi<0.4)$ 会造成系统瞬态响应的严重超调,而大的 $\xi(\xi>0.8)$ 会使系统的响应变得缓慢。因此,针对二阶系统欠阻尼的工作响应,来确定二阶系统的性能指标和定量关系的推导,如图 3-4-1 所示。控制系统的单位阶跃响应一般来说是与初始条件有关的,为了便于比较各种系统的控制质量,通常假设系统的初始条件为零。

假设系统为欠阻尼系统($0<\xi<1$),此时系统的单位阶跃响应为

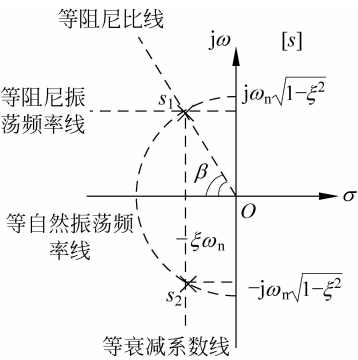


图 3-4-1 欠阻尼二阶系统各特征参量间的关系

$$\begin{aligned}
 c(t) &= 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos\omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\omega_d t \right) \\
 &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta) \quad t \geq 0
 \end{aligned} \quad (3-4-16)$$

其中, β 为共轭复数对负实轴的张角, 称为阻尼角或滞后角, $\beta = \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = \arccos \xi = \arcsin \sqrt{1-\xi^2}$ 。由式(3-4-16)可得, 响应特性完全由 ξ 和 ω_n 这两个特征参量决定。

1. 上升时间 t_r

根据上升时间的定义, 令 $c(t_r) = 1$, 可得到

$$c(t_r) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t_r} \sin(\omega_d t_r + \beta) = 1 \quad (3-4-17)$$

因为 $e^{-\xi\omega_n t_r} \neq 0$, 所以

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - \arccos \xi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad (3-4-18)$$

由式(3-4-18)可知, 当阻尼比 ξ 一定时, 阻尼角 β 不变, 系统的响应速度与 ω_n 成反比。在 ω_d 一定时, 阻尼比越小, 上升时间就越短。

2. 峰值时间 t_p

根据定义, 对系统的单位阶跃响应求导, 并令该导数为零, 即可求得峰值时间。

$$\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=t_p} = 0 \quad (3-4-19)$$

因为峰值时间对应第一个峰值的时间, 所以

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad (3-4-20)$$

峰值时间 t_p 等于阻尼振荡周期的一半。同时, 峰值时间 t_p 与阻尼振荡频率 ω_d 成反比。当阻尼比一定时, ω_d 越大, t_p 越短, 响应速度越快。当一定时, 阻尼比越小, t_p 越短, 响应速度也越快。

3. 最大超调量 $\sigma\%$

当 $t = t_p$ 时, $c(t)$ 有最大值 $c_{\max}(t) = c(t_p)$, 也就是说超调量发生在峰值时间。并且单位阶跃响应的稳态值为 $c(\infty) = 1$, 这样得到响应的最大值为

$$c(t_p) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \sin(\pi + \beta) = 1 + e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (3-4-21)$$

所以

$$\sigma\% = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% \quad (3-4-22)$$

由式(3-4-22)可知, 超调量 $\sigma\%$ 仅由阻尼比 ξ 来

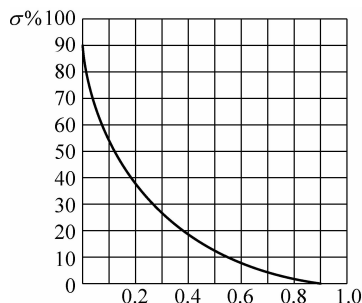


图 3-4-2 超调量 $\sigma\%$ 和 ξ 的关系曲线

决定,而与自然频率 ω_n 无关。由图 3-4-2 和

表 3-4-2 典型阻尼比对应的超调量

| ξ | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.68 | 0.707 | 0.8 | 0.9 |
|-------------|-------|-----|-------|-----|------|-------|------|------|
| $\sigma \%$ | 37.2% | 25% | 16.3% | 9% | 5% | 4.3% | 1.5% | 0.2% |

表 3-4-2 可知,阻尼比越大,超调量越小,平稳性越好。

在自动控制系统设计中,通常取 $\xi=0.4\sim 0.8$,响应的 $\sigma\%=25.4\%\sim 1.5\%$ 。在这样的条件下,系统的总体性能良好。

4. 调节时间 t_s

从调整时间的定义来看,由于 t_s 既出现在指数上,又出现在正弦函数内,故调整时间的表达式很难确定。根据

$$|c(t) - c(\infty)| \leq \Delta \cdot c(\infty) \quad t \geq t_s \quad (3-4-23)$$

(Δ 等于 1/2 误差带宽度)求得调整时间的计算公式为

$$t_s \approx \frac{1}{\xi\omega_n} \ln \frac{1}{\Delta / \sqrt{1-\xi^2}} \quad (3-4-24)$$

在 ξ 较小时,若取 $\Delta=5\%$ 时,得到 $t_s \approx \frac{3}{\xi\omega_n} = 3T$ 。若取 $\Delta=2\%$ 时,得到 $t_s \approx \frac{4}{\xi\omega_n} = 4T$ 。

由式(3-4-24)可知,调整时间与系统的阻尼比和自然频率的乘积成反比。通常阻尼比 ξ 是根据最大允许超调量的要求来决定的,也就是说,在不改变最大允许超调量的前提下,通常通过调整自然频率就可以改变瞬时响应的持续时间。

1) 振荡次数 N

振荡次数 N 表示在调节时间内,系统响应的振动次数,用数学公式表示为

$$N = \frac{t_s}{2\pi/\omega_d} = \frac{\omega_d t_s}{2\pi} \geq \frac{1}{\xi\omega_n} \ln \frac{1}{\Delta / \sqrt{1-\xi^2}} \quad (3-4-25)$$

当考虑 $\Delta=5\%$ 时,有

$$N = \frac{3}{2\pi\xi} \sqrt{1-\xi^2} \quad (3-4-26)$$

当考虑 $\Delta=2\%$ 时,有

$$N = \frac{2}{\pi\xi} \sqrt{1-\xi^2} \quad (3-4-27)$$

通常 N 取整数。

2) 稳态误差

欠阻尼系统在阶跃信号作用下的稳态误差恒为零。

现在讨论一下上升时间和调节时间之间的关系。对于较小的 ξ 将可以得到较短的上升时间,而较快的调节时间则需要较大的 ξ 。因此在设计问题中为了得到满意的结果, ξ 的取值需要做出折中的处理。如果需要同时考虑最大超调量的要求时,一般取阻尼比 $\xi=0.4\sim 0.8$ 。工程上常取 $\xi=0.707$ 作为设计依据,称为二阶工程最佳。此时,超调量为 4.3%,调节时间最短(5%的误差标准)。

【例 3-4-1】二阶系统如图 3-4-3 所示,其中 $\xi=0.6$, $\omega_n=5\text{rad/s}$, $r(t)=1(t)$,求 t_r , t_p , t_s , $\sigma\%$ 和 N 。

解: $\sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{1-0.6^2} = 0.8$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} = 5 \times 0.8 = 4$$

$$\xi\omega_n = 0.6 \times 5 = 3$$

$$\phi = \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = \arctan \frac{0.6}{0.8} = 0.93\text{rad}$$

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - 0.93}{4} = 0.55\text{s}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3.14}{4} = 0.785\text{s}$$

$$\sigma\% = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = e^{-\frac{3.14 \times 0.6}{0.8}} \times 100\% = 9.5\%$$

$$t_s \approx \frac{3}{\xi\omega_n} = 1\text{s} \quad (\Delta=5\%)$$

$$t_s \approx \frac{4}{\xi\omega_n} = 1.33\text{s} \quad (\Delta=2\%)$$

$$N = \frac{\omega_d t_s}{2\pi} = \frac{1.33}{2 \times 0.785} = 0.8 \quad (\Delta=2\%)$$

$$N = \frac{\omega_d t_s}{2\pi} = \frac{1}{2 \times 0.785} = 0.6 \quad (\Delta=5\%)$$

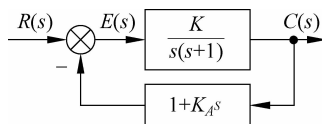


图 3-4-3 二阶系统结构图

【例 3-4-2】根据图 3-4-4 的过渡过程曲线确定质量 M 、黏性摩擦系数 f 和弹簧刚度 K 的值。

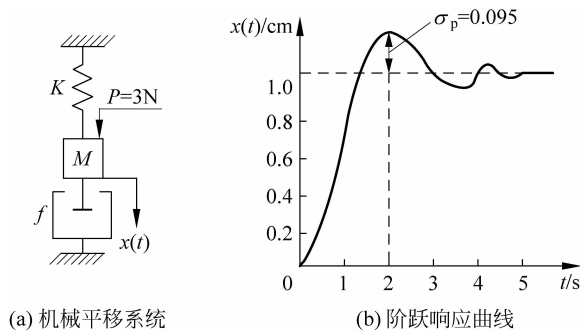


图 3-4-4 机械平移系统和响应曲线

解: 由图可知, $\sigma_p=0.095$, $t_p=2\text{s}$, $x(\infty)=\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)=0.01\text{m}$
根据题意,得

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + Kx = P$$

则有

$$\frac{X(s)}{P(s)} = \frac{1}{Ms^2 + fs + K} = \frac{1}{K} \cdot \frac{K/M}{s^2 + (f/M)s + K/M}$$

根据公式,得

$$\omega_n^2 = K/M, 2\xi\omega_n = f/M$$

当 $p(t) = 3 \cdot 1(t)$ 时, 有

$$X(s) = \frac{1}{Ms^2 + fs + K} \cdot \frac{3}{s}$$

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{Ms^2 + fs + K} \cdot \frac{3}{s} = \frac{3}{K} = 0.01$$

则

$$K = 300 \text{ N/m}$$

$$\sigma_p = 0.095 \Rightarrow \xi = 0.6$$

$$t_p = 2 \Rightarrow \omega_n = 1.96 \text{ rad/s}$$

$$\omega_n^2 = K/M \Rightarrow 300/M = 1.96^2 \Rightarrow M = 78 \text{ kg}$$

$$2\xi\omega_n = f/M \Rightarrow 2 \times 0.6 \times 1.96 = f/78 \Rightarrow f = 180 \text{ N} \cdot \text{s/m}$$

3.5 高阶系统时域分析法概述

按照前述章节中关于系统阶次的定义,通常将三阶及三阶以上的系统称为高阶系统。从严格意义上讲,大多数实际的控制系统都属于高阶系统,对于这些系统,从理论上进行定量时域分析比较复杂,计算机仿真一般是有效的解决办法之一。这里仅对高阶系统时间响应进行简单的定性分析。一般认为,高阶系统具有如下的传递函数

$$\begin{aligned} G_B(s) &= \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \\ &= \frac{K(s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0)}{\prod_{j=1}^q (s + p_j) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\xi_k\omega_k s + \omega_k^2)} \quad m \leq n, q + 2r = n \end{aligned}$$

设输入信号为单位阶跃函数,则

$$C(s) = G_B(s)R(s) = \frac{K(s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0)}{s \prod_{j=1}^q (s + p_j) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\xi_k\omega_k s + \omega_k^2)} \quad (3-5-1)$$

如果其各极点互不相同,则式(3-5-1)可展开成

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{a_j}{s + p_j} + \sum_{k=1}^r \frac{\beta_k(s + \xi_k\omega_k) + \gamma_k(\omega_k/\sqrt{1-\xi_k^2})}{(s + \xi_k\omega_k)^2 + (\omega_k/\sqrt{1-\xi_k^2})^2}$$

经拉氏逆变换,得

$$\begin{aligned} c(t) &= a + \sum_{j=1}^q a_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^r \beta_k e^{-\xi_k\omega_k t} \cdot \cos(\omega_k/\sqrt{1-\xi_k^2} t) \\ &\quad + \sum_{k=1}^r \gamma_k e^{-\xi_k\omega_k t} \cdot \sin(\omega_k/\sqrt{1-\xi_k^2} t) \end{aligned} \quad (3-5-2)$$

由式(3-5-2)可见,一般的高阶系统的动态响应是由一些一阶惯性环节和二阶振荡环节的响应函数叠加组成的。当所有极点均具有负实数时,除了常数 a ,其他各项随着时间 $t \rightarrow \infty$ 而衰减为零,即系统是稳定的。

某些高阶系统通过合理的简化,可以用低阶系统近似,以下两种情况可以作为简化的

依据。

(1) 由式(3-5-1)和式(3-5-2)可见,系统极点的负实部越是远离虚轴,该极点对应的项在动态响应中衰减得越快;反之,距虚轴最近的闭环极点对应着动态响应中衰减最慢的项,该极点对(或极点)对动态响应起主导作用,称为“主导极点”。一般工程上当极点 A 距离虚轴的距离大于 5 倍的极点 B 距虚轴的距离时,分析系统时可忽略极点 A 。

(2) 闭环传递函数中,如果负实部的零点和极点在数值上相近,则可将该零点和极点一起消掉,称为“偶极子相消”。

综上所述,高阶系统时间响应可分为稳态分量和瞬态分量,有以下结论。

(1) 瞬态分量的各个运动模态衰减的快慢取决于对应的极点和虚轴的距离,离虚轴越远的极点对应的运动模态衰减得越快。

(2) 各模态所对应的系数和初相角取决于零点和极点的分布。

① 若某一极点越靠近零点,且远离其他极点和原点,则相应的系数越小。

② 若一对零极点相距很近,该极点对应的系数就非常小。

③ 若某一极点远离零点,它越靠近原点或其他极点,则相应的系数越大。

(3) 系统的零点和极点共同决定了系统响应曲线的形状。

(4) 对系统响应起主要作用的极点称为主导极点。

(5) 非零初始条件时的响应由零初始条件时的响应和零输入响应组成。

『Reading Material』

Under certain circumstances, a higher order transfer function maybe approximated to a lower order transfer function. This approximation is based on the concept of dominant poles. We will use numerical examples to illustrate this concept.

Firstly, by mapping the poles and zeros of the system transfer function in the complex s -plane, we can draw useful conclusions about the transient behavior of a dynamic system. Each negative real pole of the transfer function will contribute an exponentially decaying transient term. If any positive real pole is present, it gives rise to an exponentially increasing term thereby rendering the system unstable. Complex poles, if present, always occur in conjugate pairs. Each complex pole pair gives rise to an exponentially decaying sinusoidal waveform if the real part of the poles is negative. An exponentially increasing sinusoidal waveform would result if the real part of the complex pole pair is positive (unstable response). Whether a particular high order transfer function can be approximated or not by a lower order transfer function depends on the pole-zero distribution in the s -plane.

If a single negative real pole is distinctly closer to the imaginary axis, and all other poles and zeros are at least six times further away into the negative half of the s -plane, then the system can be approximated by a first order transfer function having the above nearest pole as its pole. If instead of a real pole, a pair of complex poles are distinctly near the imaginary axis, then the system can be approximated by a second order transfer function (complex time lag) having the above two complex poles as its poles. If a pole of a

transfer function is very near a zero of the same transfer function, then they cancel one another. They can be disregarded in analysing the transient response.

3.6 控制系统的稳定性分析

在控制系统的分析研究中,最重要的问题是系统的稳定性问题,它是保证系统能够正常运行的首要条件。控制系统在实际运行中,总会受到外界或内部的一些因素扰动,例如负载和能源的波动、系统参数的变化、环境条件的改变等,都会使被控制量偏离原来的平衡工作状态,并随时间的推移而发散。因此,不稳定的系统是无法正常工作的。如何分析系统的稳定性并提出保证系统稳定的措施,就成了自动控制理论的基本任务之一。

『Reading Material』

When the analysis and design of control systems are considered, stability is of utmost importance. From a practical point of view an unstable system is of little value. In practical operation, almost all control systems are subject to extraneous or inherent disturbances, such as fluctuation of load or power source, variation of system parameters or circumstance.

Many physical systems are inherently open loop unstable. Introducing feedback is useful to stabilize the unstable plant and then adjust the transient performance with an appropriate controller. For open-loop stable plants feedback is still used to improve the system performance.

(1) When considering the design and analysis of feedback control system, stability is of utmost important.

(2) A stable system is defined as a system with a bounded(limited)system response.

Or: a stable system is a dynamic system with a bounded response and to a bounded input(Bounded Input Bounded Output,BIBO).

(3) The concept of stability can be illustrated by considering a right circular cone placed on a plane horizontal surface,see Fig. 3-6-1.

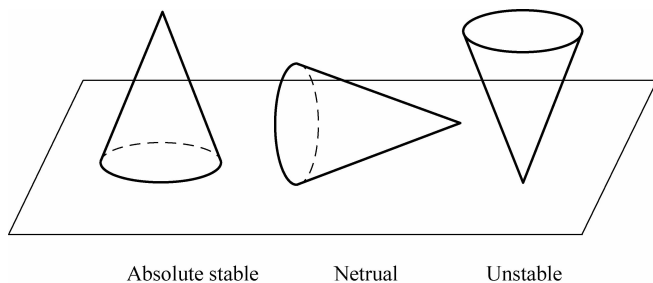


Fig. 3-6-1 The concept of stability

(4) The location in the s -plane of the poles of a system indicates the resulting

transient response.

3.6.1 稳定的基本概念和稳定的充分必要条件

1. 稳定的基本概念

在自动控制理论中,有多种稳定性的定义,本书只讨论其中最常见的一种,即渐近稳定性系统。图 3-6-2(a)为一个单摆系统(Pendulum System)示意图,设在外界作用下,单摆由原平衡点 A 偏移到的位置 A' ,偏移角 ϕ 。当外界扰动力取消后,单摆在重力作用下围绕原平衡点 A 反复振荡,经过一段时间单摆因受介质阻碍作用使其回到原平衡点 A ,故称 A 为稳定平衡点。图 3-6-2(c)中,小球超出了 C 、 D 范围后系统就不再是线性的,故可以认为该系统在线性范围内是稳定的。

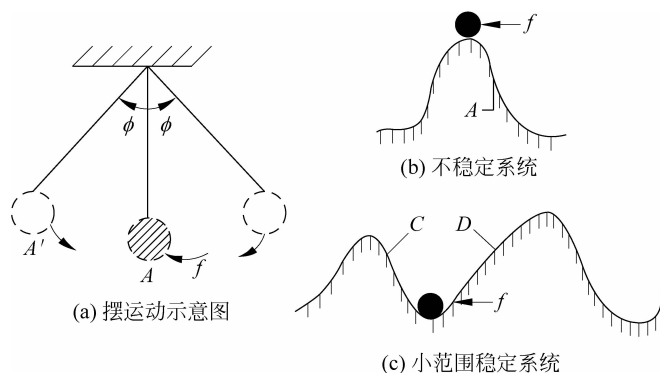


图 3-6-2 稳定系统和不稳定系统

根据李雅普诺夫稳定性理论(Liapunov Stability Theory),线性控制系统的稳定性可叙述如下:若线性控制系统在初始扰动的影响下,其动态过程随时间的推移逐渐衰减并趋于零(原平衡工作点),则称系统渐近稳定,简称稳定;反之,若在初始扰动的影响下,系统的动态过程随时间的推移而发散,则称系统不稳定。

2. 线性系统稳定的充要条件

线性系统的稳定性是系统在外界扰动消失后,自身具有的一种恢复能力,也就是说系统的稳定性取决于系统自身的固有特性,即系统的结构和参数,而与外界条件(输入信号)无关。

设线性定常系统在初始条件为零时,输入一个理想单位脉冲 $\delta(t)$,这相当于系统在零平衡状态,受到一个外界扰动信号的作用下,如果 $t \rightarrow \infty$ 时,系统的输出响应 $c(t)$ 收敛到原来的零平衡状态,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0 \quad (3-6-1)$$

则称该系统是稳定的。

『Terms and Concepts』

In a mathematical manner, the definition of stability may be stated: if the zero-input of the linear time-invariant system, subject to nonzero initial condition, approaches zeros

as time approaches infinity, i. e. ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$$

then the system is said to be stable; otherwise the system is unstable.

设系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad n \geq m \quad (3-6-2)$$

其特征方程为 $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$ 。如果特征方程的所有根互不相同,且有 q 个实数根 P_i 和 r 对共轭复数根,则在单位脉冲函数 $\delta(t)$ 的作用下,系统输出量的拉氏变换可表示为

$$C(s) = \frac{K_r \prod_{j=1}^m (s - Z_j)}{\prod_{i=1}^q (s - P_i) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\xi_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2)} \cdot 1 \quad (3-6-3)$$

式中, k 为常数; P_i 为特征方程的实根, $q + 2r = n$ 。将式(3-6-3)用部分分式法展开并进行拉氏反变换得

$$c(t) = \sum_{i=1}^q A_i e^{P_i t} + \sum_{k=1}^r e^{-\xi_k \omega_{nk} t} (B_k \cos \omega_{nk} t + C_k \sin \omega_{nk} t) \quad (3-6-4)$$

式中, $\omega_{dk} = \omega_{nk} \sqrt{1 - \xi_k^2}$ 。

式(3-6-4)表明,①当系统特征方程的根都具有负实部时,各瞬态分量都是衰减的,且有 $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$,此时系统是稳定的。②如果特征根中有一个或一个以上具有正实部,则该根对应的瞬态分量是发散的,此时有 $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) \rightarrow \infty$,系统是不稳定的。③如果特征根中具有一个或一个以上的零实部根,而其余的特征根具有负实部,则 $c(t)$ 趋于常数或作等幅振荡,即 $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = k$ 这时系统处于稳定和不稳定的临界状态,常称为临界稳定状态(不属于渐近稳定)。对于大多数实际系统,当它处于临界状态时,也是不能正常工作的,所以临界稳定的系统在工程上属于不稳定系统。在经典控制理论中,只有渐近稳定的系统才称为稳定系统,否则称为不稳定系统。

由此可见,线性定常系统稳定的充分必要条件是闭环系统特征方程的所有根都具有负实部,或者说闭环传递函数的所有极点均位于 s 平面的左半部分(不包括虚轴)。

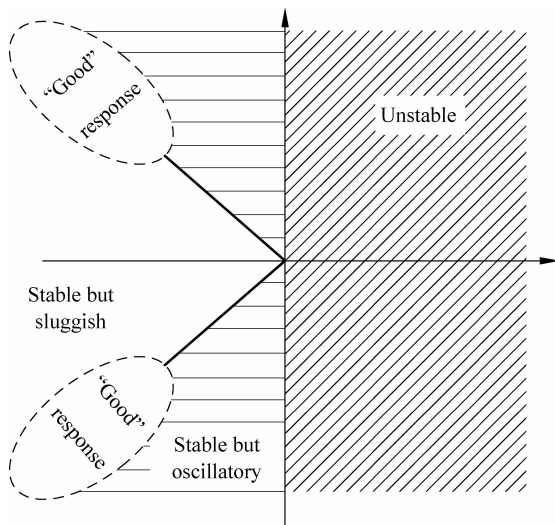
『Terms and Concepts』

A necessary and sufficient condition for a feedback system to be stable is that all the poles of the system transfer function have negative real parts.

The closed-loop poles close to imaginary axis dominate those farther away, and in many cases the response may be approximated by the response of the closed-loop poles closest to the imaginary axis. Fig. 3-6-3 is the good region of the close-loop poles in s -plane.

3.6.2 代数稳定判据

由以上讨论可知,控制系统稳定的充要条件是其特征方程的根均具有负实部。因此,为了判别系统的稳定性,就要求出系统特征方程的根,并检验它们是否都具有负实部。但是,

Fig. 3-6-3 The good region of the close-loop poles in s -plane

这种求解系统特征方程的方法,对低阶系统尚可以进行,而对高阶系统,求根就很烦琐。因此,人们希望寻求一种不需求解特征方程而能判别系统稳定性的间接代数方法,这种方法称为代数稳定判据(Algebraic Criterion of Stability),主要有劳斯稳定判据和赫尔维兹判据。

『Terms and Concepts』

Routh-Hurwitz Stability Criterion will enable us to find out whether a feedback control system is stable or not from its characteristic function, $1 + G(s)H(s)$, without having to actually factories the characteristic function. Routh-Hurwitz method is based on ordering the coefficients of the characteristic equation into an array as follows.

When we construct Routh's Array, four distinct cases arise.

Case 1: No elements of the first column is zero.

Case 2: Zero in the 1st column while some other elements of the row containing the zero are nonzero.

Case 3: Zero in the 1st column and other elements of the row containing the zero are also zero.

Case 4: Characteristic equation has repeated roots on the $j\omega$ axis.

1. 劳斯稳定判据

劳斯稳定判据(Routh's Stability Criterion)利用特征方程的各项系数进行代数运算,得出全部特征根具有负实部的条件,以此作为判别系统是否稳定的依据。

设线性系统的特征方程为

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (3-6-5)$$

系统稳定的必要条件是其特征方程的各项系数均为正,即 $a_i > 0 (i=0, 1, 2, \cdots, n)$ 。根据必要条件,在判据系统的稳定性时,可事先检查系统特征方程的系数是否都大于零,若有任何

系数是负数或等于零,则系统是不稳定的。但是,当特征方程满足稳定的必要条件时,并不意味着系统一定是稳定的,要判断系统是否稳定还需检验其是否满足系统稳定的充分条件。稳定的充分条件是:劳斯阵列的第一列元素均大于零,则系统稳定。

应用劳斯判据分析系统的稳定性时,可按照下面方法进行。将系统特征方程各项系数组成劳斯阵列表,如表 3-6-1 所示。

表 3-6-1 劳斯阵列表

| 对应项 | 第 1 列 | 第 2 列 | 第 3 列 | ... |
|-----------|---|---|---|-----|
| s^n | a_n | a_{n-2} | a_{n-4} | ... |
| s^{n-1} | a_{n-1} | a_{n-3} | a_{n-5} | ... |
| s^{n-2} | $c_{13} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_na_{n-3}}{a_{n-1}}$ | $c_{23} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_na_{n-5}}{a_{n-1}}$ | $c_{33} = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_na_{n-7}}{a_{n-1}}$ | ... |
| s^{n-3} | $c_{14} = \frac{c_{13}a_{n-3} - a_{n-1}c_{23}}{c_{13}}$ | $c_{24} = \frac{c_{13}a_{n-5} - a_{n-1}c_{33}}{c_{13}}$ | $c_{34} = \frac{c_{13}a_{n-7} - a_{n-1}c_{43}}{c_{13}}$ | ... |
| s^{n-4} | c_{15} | c_{25} | c_{35} | ... |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | ... |
| s^2 | $c_{1,n-1}$ | $c_{2,n-1}$ | | ... |
| s^1 | $c_{1,n}$ | | | ... |
| s^0 | $c_{1,n+1} = a_0$ | | | ... |

由劳斯阵列表结构可知,其线性系统稳定的劳斯判据可归结为以下几点。

1) 劳斯阵列表第一列所有系数均不为零的情况

如果劳斯阵列表中第一列的系数都具有相同的符号,则系统是稳定的,否则系统是不稳定的。劳斯阵列表中第一列系数符号改变的次数等于该特征方程式的根在 s 右半平面的个数,即不稳定根的个数等于劳斯阵列表中第一列系数符号改变的次数。

【例 3-6-1】 已知系统的特征方程为

$$s^5 + 6s^4 + 14s^3 + 17s^2 + 10s + 2 = 0$$

试用劳斯判据分析系统的稳定性。

解: 列劳斯阵列表

| | | | |
|-------|--|---|----|
| s^5 | 1 | 14 | 10 |
| s^4 | 6 | 17 | 2 |
| s^3 | $\frac{6 \times 14 - 1 \times 17}{6} = \frac{67}{6}$ | $\frac{6 \times 10 - 1 \times 2}{6} = \frac{58}{6}$ | |
| s^2 | $\frac{\frac{67}{6} \times 17 - 6 \times \frac{58}{6}}{\frac{67}{6}} = \frac{791}{6}$ | $\frac{\frac{67}{6} \times 2 - 6 \times 0}{\frac{67}{6}} = 2$ | |
| s^1 | $\frac{\frac{791}{6} \times \frac{58}{6} - \frac{67}{6} \times 2}{\frac{791}{6}} = \frac{6150}{791}$ | | |
| s^0 | 2 | | |

劳斯阵列表第一列的系数符号相同,故系统是稳定的。由于判别系统是否稳定只与劳斯阵列表中第一列系数的符号有关,而把劳斯阵列表中某一行系数同乘以一个正数不会改变第一列系数的符号,所以为简化运算,常把劳斯阵列表的某一行同乘以一个正数后,再继续运算。

本例中,劳斯阵列表可按照如下方法计算。

| | | | | |
|-------|-------|-----|----|---------|
| s^5 | 1 | 14 | 10 | |
| s^4 | 6 | 17 | 2 | |
| s^3 | 67 | 58 | | |
| s^2 | 791 | 134 | | 同乘以 6 |
| s^1 | 36900 | | | 同乘以 67 |
| s^0 | 134 | | | 同乘以 791 |

由于第一列系数的符号相同,故本系统稳定,结论与前面的一致。

【例 3-6-2】 已知系统的特征方程为

$$s^4 + 2s^3 + s^2 + s + 1 = 0$$

试用劳斯判据分析系统的稳定性。

解: 列劳斯阵列表

| | | | |
|-------|---|---|---|
| s^4 | 1 | 1 | 1 |
| s^3 | 2 | 1 | 0 |
| s^2 | $\frac{2 \times 1 - 1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$ | $\frac{2 \times 1 - 1 \times 0}{2} = 1$ | |
| s^1 | $\frac{1 \times 1 - 2 \times 2}{1} = -3$ | | |
| s^0 | $\frac{-3 \times 2 - 1 \times 0}{-3} = 2$ | | |

由于劳斯阵列表第一列的系数变号两次,一次由 $1/2$ 变为 -3 ,另一次由 -3 变为 2 ,故特征方程有两个根在 s 平面右半部分,故系统是不稳定的。

2) 劳斯阵列表某行的第一列系数等于零,而其余各项不全为零的情况

解决的办法是用一个很小的正数 ϵ 代替第一列的零项,然后按照通常方法计算劳斯阵列表中的其余项。而劳斯阵列表中第一列系数的变号次数不依赖于 ϵ 。

【例 3-6-3】 已知系统的特征方程为

$$s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 5 = 0$$

试用劳斯判据分析系统的稳定性。

解: 列劳斯阵列表

| | | | |
|-------|----------------------------|---|---|
| s^4 | 1 | 2 | 5 |
| s^3 | 1 | 2 | 0 |
| s^2 | $0 \approx \epsilon$ | 5 | |
| s^1 | $(2\epsilon - 5)/\epsilon$ | | |
| s^0 | 5 | | |

当 ε 的取值足够小时, $(2\varepsilon-5)/\varepsilon$ 将取负值, 故劳斯阵列表第一列系数变号两次, 由劳斯判据可知, 特征方程有两个根具有正实部, 系统是不稳定的。

3) 劳斯阵列表某行所有系数均为零的情况

如果劳斯阵列表中某一行(如第 K 行)各项为零, 这说明在 s 平面内存在以原点为对称的特征根。解决方法是利用第 $K-1$ 行的系数构成辅助方程, 使辅助方程 $A(s)=0$ 。然后求辅助方程对 s 的导数, 将其系数代替原全部为零的第 K 行, 继续计算劳斯阵列。辅助方程给出了特征方程中成对根对称分布在 s 平面内的位置及数目, 显然根的数目是偶数, 辅助方程的次数总是偶数。

【例 3-6-4】 已知系统的特征方程为

$$s^5 + s^4 + 4s^3 + 24s^2 + 3s + 63 = 0$$

试用劳斯判据分析系统的稳定性。

解: 列劳斯阵列表

| | | | | |
|-------|-----|-----|----|-------------------------|
| s^5 | 1 | 4 | 3 | |
| s^4 | 1 | 24 | 63 | |
| s^3 | -20 | -60 | 0 | |
| s^2 | 21 | 63 | 0 | 构造辅助方程 |
| | | | | $A(s) = 21s^2 + 63 = 0$ |
| s^1 | 0 | 0 | 0 | 辅助方程求导 |
| | | | | $A(s) = 42s = 0$ |
| s^0 | | | | |

由上表看出, s^1 行的各项全为零, 为了求出 s^1 和 s^0 各行, 由 s^2 行的各项系数构成辅助方程 $A(s)$ 。此辅助方程对 s 求导, 用 42 代替零行的第一个系数, 则劳斯阵列表变为

| | | | |
|-------|-----|-----|----|
| s^5 | 1 | 4 | 3 |
| s^4 | 1 | 24 | 63 |
| s^3 | -20 | -60 | 0 |
| s^2 | 21 | 63 | 0 |
| s^1 | 42 | 0 | |
| s^0 | 63 | | |

由上表可见, 第一列有两次符号变化, 因此有两个实部为正的根在 s 平面右半平面, 故系统是不稳定的。另外, 由辅助方程

$$A(s) = 21s^2 + 63 = 0$$

求得 $s_{1,2} = \pm j\sqrt{3}$ 。这是一对共轭虚根, 从这一点来看, 系统也是不稳定的。

由上可知, 运用劳斯判据, 不仅可以判定系统是否稳定, 还可以用来分析系统参数的变化对稳定性产生的影响, 从而给出使系统稳定的参数范围。

【例 3-6-5】 已知系统的结构图如图 3-6-4 所示。当 $\xi=0.2$ 时, $\omega_n=86.6$ 。试确定 K 为何值时, 系统稳定。

解: 根据图(3-6-4)写出开环传递函数为

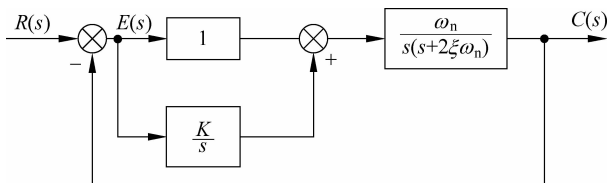


图 3-6-4 系统结构图

$$G(s) = \frac{\omega_n^2(s+K)}{s^2(s+2\xi\omega_n)}$$

其闭环传递函数为

$$\phi(s) = \frac{s^2(s+2\xi\omega_n)}{s^3 + 2\xi\omega_n s^2 + \omega_n^2 s + K\omega_n^2}$$

特征方程为

$$s^3 + 2\xi\omega_n s^2 + \omega_n^2 s + K\omega_n^2 = 0$$

将 $\xi=0.2, \omega_n=86.6$ 代入特征方程,得

$$s^3 + 34.6s^2 + 7500s + 7500K = 0$$

由特征方程列劳斯阵列表

| | | | |
|-------|-----------------------------------|-------|---|
| s^3 | 1 | 7500 | 0 |
| s^2 | 34.6 | 7500K | |
| s^1 | $(34.6 \times 7500 - 7500K)/34.6$ | | |
| s^0 | 7500K | | |

要使系统稳定,必须满足

$$\begin{cases} \frac{34.6 \times 7500 - 7500K}{34.6} > 0 \\ 7500K > 0 \end{cases}$$

解得

$$0 < K < 34.6$$

在系统的分析中,劳斯判据可以根据系统特征方程的系数来确定系统的稳定性,同时还能确定反馈系统稳定时开环增益或某些参数的取值范围。但是,它并不能指出系统是否具有满意的动态过程,同时也不能提供改善系统稳定性的方法和途径。

『Terms and Concepts』

Routh-Hurwitz criterion: A criterion for determining the stability of a system by examining the characteristic equation of the transfer function. The criterion states that the number of roots of the characteristic equation with positive real parts is equal to the number of change of sign of the coefficients in the first column of the Routh array.

2. 赫尔维兹判据

赫尔维兹判据(Hurwitz Criterion)也是根据特征方程的系数来判别系统的稳定性。设

线性系统的特征方程为

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

以特征方程式的各项系数组成如下行列式

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \cdots \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \cdots \\ a_{n-7} & a_{n-6} & a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_n \end{vmatrix} \quad (3-6-6)$$

赫尔维兹判据指出,系统稳定的充要条件是,上述行列式及其各阶顺序主子式 $\Delta_i (i=1, 2, \cdots, n-1)$ 均大于零,即

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_{n-1} > 0 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0 \\ &\vdots \\ \Delta_n &> 0 \end{aligned} \quad (3-6-7)$$

【例 3-6-6】 已知系统的特征方程为

$$3s^4 + 10s^3 + 5s^2 + s + 2 = 0$$

试用赫尔维兹判据判断系统的稳定性。

解: 系统的行列式

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= \begin{vmatrix} 10 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \Delta_1 &= 10 > 0 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} > 0 \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 10 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -153 < 0 \end{aligned}$$

由赫尔维兹判据可知,该系统不稳定。

『Reading Material』

Once the block diagrams of control systems are developed, the next step is to carry out analysis. There are two types of analysis: quantitative and qualitative. In quantitative analysis, we are interested in the exact response of control systems due to a specific excitation. In qualitative analysis, we are interested in general properties of control systems. We discuss first the former and then the latter.

Control systems are inherently time-domain systems, so the introduced specifications are natural and have simple physical interpretation. For example, in pointing a telescope at

a star, the steady-state performance(accuracy) is the main concern; the specifications on the rise time, overshoot, and settling time are not critical. However, in aiming missiles at an aircraft, both accuracy and speed of response are important. In the design of an aircraft, the specification is often given as shown in Fig. 3-6-5. It is required that the step response of the system be confined to the region shown. This region is obtained by a compromise between the comfort or physical limitations of the pilot and the maneuverability of the aircraft. In the design of an elevator, any appreciable overshoot is undesirable. Different applications have different specifications.

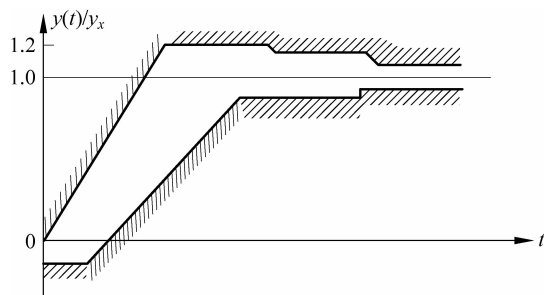


Fig. 3-6-5 Allowable step response

A system is said to be sluggish if its rise time and settling time are large. If a system is designed for a fast response, or to have a small rise time and a small settling time, then the system may exhibit a large overshoot, as can be seen from Fig. 3-6-5. Thus, the requirements on the rise time and overshoot are often conflicting and must be reached by compromise.

The steady-state response of $G_o(s)$ depends only on a number of coefficients of $G_o(s)$, thus the steady-state performance can easily be incorporated into the design. The transient response of $G_o(s)$ depends on both its poles and zeros. Except for some special cases, no simple relationship exists between the specifications and pole-zero locations. Therefore, designing a control system to meet transient specifications is not as simple as designing one to meet steady-state specifications.

3.7 控制系统稳态误差的分析及计算

控制系统时间响应的特征可以用瞬态响应和稳态响应表示。系统的稳态分量反映系统跟踪控制信号的准确度或抑制扰动信号的能力,用稳态误差来描述。稳态误差适用于衡量特定类型的输入施加与控制系统时系统稳态精度的一种判别标准,具有不可避免性。稳态误差的来源有多种,在系统的分析和设计中,稳态误差是一项重要的性能指标,它与元器件的不灵敏、零点漂移、老化及各种传动机械的间隙、摩擦等因素有关,习惯上称这些由非线性因素造成的稳态误差为静差,静差不属于本书讨论范畴之内。本章主要讨论由于系统本身的结构、输入信号的形式、参数及外作用等因素所引起的稳态误差。

『Terms and Concepts』

Disturbance signal: An unwanted input signal that affects the system's output signal.

Error signal: The difference between the desired output and the actual output.

Steady-state error: The error when the time period is large and the transient response has decayed, leaving the continuous response.

System sensitivity: The ratio of the change in the system transfer function to the change of a process transfer function(or parameter)for a small incremental change.

As a function of the time, the error signal consists of two parts: The transient component and the steady-state component. Since the steady-state error is meaningful only for the stable systems, the transient component must approach zero as time approaches infinite. Hence, the steady-state error of a feedback control system is defined as the error when time approaches infinity.

3.7.1 稳态误差的定义

系统的稳态误差(Steady-State Error)是指在稳定条件下(即对于稳定系统)输入加入后经过足够长的时间,其瞬态响应已经衰减到足够小时,稳态响应的期望值与实际值之间的误差,以 e_{ss} 来表示稳态误差,即

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (3-7-1)$$

系统的输出误差为

$$e(t) = y_d(t) - y(t) \quad (3-7-2)$$

其中, $y(t)$ 表示输出实际值, $y_d(t)$ 表示输出期望值。

如果 $H(s)=1$, 输出量的期望值为输入量 $x(t)$, 则输出误差即为

$$e(t) = x(t) - y(t) \quad (3-7-3)$$

当 $H(s) \neq 1$ 时, $x(t)$ 和 $y(t)$ 可能具有完全不同的量纲, 因此不能应用式(3-7-3)。可定义输出误差为

$$e(t) = x(t) - b(t) \quad (3-7-4)$$

或表示成

$$E(s) = X(s) - B(s) = X(s) - H(s)Y(s) = X(s) - H(s)G(s)E(s) \quad (3-7-5)$$

即

$$E(s) = \frac{X(s)}{1 + H(s)G(s)} \quad (3-7-6)$$

根据拉氏变换的终值定理(Final-Value Theorem), 可以得到稳态误差的表达式

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sX(s)}{1 + H(s)G(s)} \quad (3-7-7)$$

式(3-7-7)表明, 系统稳态误差取决于输入信号 $X(s)$ 的形式以及开环传递函数 $H(s)G(s)$ 的结构。对于一个给定的稳态系统, 当输入信号 $X(s)$ 形式确定时, 系统是否存在稳态误差就取决于开环传递函数 $H(s)G(s)$ 所描述的系统结构。因此, 按照控制系统跟踪不同输入信号的能力来进行系统分类是很有必要的。

【例 3-7-1】单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(0.5s+1)}{s(s+1)(2s+1)}$$

确定对于单位斜坡输入的稳态误差。

解：闭环系统的特征方程为

$$\Delta(s) = 2s^3 + 3s^2 + (1+0.5K)s + K = 0$$

由于二阶赫尔维兹行列式为

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & K \\ 2 & 1+0.5K \end{vmatrix}$$

系统稳定的充要条件为 $D_2 > 0$, 即 $0 < K < 6$ 。

由于 $R(s) = 1/s^2$, 误差函数为

$$E(s) = \phi_e(s)R(s) = \frac{(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1) + (1+0.5s)K} \cdot \frac{1}{s^2}$$

因此, 在 $0 < K < 6$ 的情况下, 稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{1}{K}$$

3.7.2 系统类型与稳态误差

令系统开环传递函数(Open-Loop Transfer Function)为

$$H(s)G(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^v \prod_{i=1}^n (T_i s + 1)} \quad n \geq m \quad (3-7-8)$$

其中, K 为系统的开环增益(Open-Loop Gain); τ_j 和 T_i 为时间常数(Time Constant); v 为开环传递函数在 s 平面坐标原点上的极点个数, 即开环传递函数中串联的积分环节个数。为了分析稳态误差与系统结构的关系, 可以根据开环传递函数积分环节来规定控制系统的类型, 系统分类如下。

(1) $v=0$ 称为 0 型系统, 或者称为有差系统。

(2) $v=1$ 称为 I 型系统, 或者称为一阶无差系统。

(3) $v=2$ 称为 II 型系统, 或者称为二阶无差系统。

(4) $v>2$, 除复合控制外, II 型以上的系统, 实际上很难使之稳定, 所以这种类型的系统在控制工程中一般不会碰到, 在此不作讨论。

令

$$H_0(s)G_0(s) = \frac{\prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{\prod_{i=1}^n (T_i s + 1)} \quad (3-7-9)$$

当 $s \rightarrow 0$ 时, 有 $H_0(s)G_0(s) \rightarrow 1$, 则式(3-7-9)近似为

$$H(s)G(s) = \frac{K}{s^v} H_0(s)G_0(s) = \frac{K}{s^v} \quad (3-7-10)$$

这样系统稳态误差计算通式可表示为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sX(s)}{1 + K/s^v} = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} [s^{v+1} X(s)]}{K + \lim_{s \rightarrow 0} s^v} \quad (3-7-11)$$

式(3-7-11)表明,稳态误差 e_{ss} 与系统的类型、系统的增益以及输入类型有关。下面分别讨论阶跃信号、斜坡信号和加速度信号的稳态误差情况。

3.7.3 给定输入信号下的稳态误差计算

1. 阶跃输入

令 $x(t) = A \cdot u(t)$, A 为常量, 即 $X(s) = A/s$, 则系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sX(s)}{1 + H(s)G(s)} = \frac{A}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} H(s)G(s)} = \frac{A}{1 + K_p} \quad (3-7-12)$$

式中, $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} H(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^v}$ 为静态位置误差系数(Static Position Error Constant), K_p 的大小反映系统在阶跃输入下的稳态精度。 K_p 越大, e_{ss} 就越小, 所以说 K_p 反映了系统跟踪阶跃输入的能力。各种类型系统的静态位置误差系数为

$$K_p = \begin{cases} K, & v = 0 \\ \infty, & v \geq 1 \end{cases} \quad (3-7-13)$$

从而得到各种类型系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \begin{cases} \frac{A}{1 + K} = \text{常数}, & v = 0 \\ \infty, & v \geq 1 \end{cases} \quad (3-7-14)$$

式(3-7-14)表明, 由于 0 型系统中没有积分环节, 它对阶跃输入的稳态误差为一定值, 误差的大小与系统的开环放大系数 K 成反比, K 越大, 稳态误差越小。对于实际系统来说, 通常是允许存在稳态误差的, 但不允许超过规定的指标。为了降低稳态误差, 可在稳定条件允许的前提下, 增大系统的开环放大系数, 若要求系统对阶跃输入作用下不存在稳态误差, 则必须选用 I 型或高于 I 型的系统。

2. 斜坡输入

令 $x(t) = A \cdot t$, A 为常量, 即 $X(s) = A/s^2$, 则系统的稳态误差为

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sX(s)}{1 + H(s)G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s + sH(s)G(s)} \\ &= \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} sH(s)G(s)} = \frac{A}{K_v} \end{aligned} \quad (3-7-15)$$

式中, $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s)G(s) = \frac{K}{s^{v-1}}$ 为静态速度误差系数(Static Velocity Error Constant), K_v 的大小反映系统在斜坡输入下的稳态精度。 K_v 越大, e_{ss} 就越小, 所以说 K_v 反映了系统跟踪斜坡输入的能力。各种类型系统的静态速度误差系数为

$$K_v = \begin{cases} 0, & v = 0 \\ K, & v = 1 \\ \infty, & v \geq 2 \end{cases} \quad (3-7-16)$$

从而得到各种类型系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \begin{cases} \infty, & v = 0 \\ \frac{A}{K} = \text{常数}, & v = 1 \\ 0, & v \geq 2 \end{cases} \quad (3-7-17)$$

式(3-7-17)表明,在单位斜坡输入作用下,0型系统的稳态误差为 ∞ ,即不能跟踪。I型系统稳态时能跟踪斜坡输入,但存在一定值的稳态误差,且误差与开环放大系数 K 成反比。为了使稳态误差不超过规定值,可以增大系统的 K 值。在稳态时,系统的输出量与输入信号虽以同一速度变化,但前者在位置上要落后后者一个常量。II型或高于II型系统的稳态误差总为零,即稳态时总能准确跟踪斜坡信号。因此,对于单位斜坡输入,要使系统的稳态误差为一定值或为零,系统必须有足够的积分环节。

3. 加速度输入

令 $x(t) = \frac{1}{2}At^2$, A 为常量,即 $X(s) = A/s^3$,则系统的稳态误差为

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sX(s)}{1 + H(s)G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s^2 + s^2 H(s)G(s)} \\ &= \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 H(s)G(s)} = \frac{A}{K_a} \end{aligned} \quad (3-7-18)$$

式中, $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 H(s)G(s) = \frac{K}{v-2}$ 为静态加速度误差系数(Static Acceleration Error Constant), K_a 的大小反映系统在加速度输入下的稳态精度。 K_a 越大, e_{ss} 就越小,所以说 K_a 反映了系统跟踪加速度输入的能力。各种类型系统的静态加速度误差系数为

$$K_a = \begin{cases} 0, & v = 0, 1 \\ K, & v = 2 \\ \infty, & v \geq 3 \end{cases} \quad (3-7-19)$$

从而得到各种类型系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \begin{cases} \infty, & v = 0, 1 \\ \frac{A}{K} = \text{常数}, & v = 2 \\ 0, & v \geq 3 \end{cases} \quad (3-7-20)$$

式(3-7-20)表明,在加速度输入作用下,0型和I型系统的稳态误差为 ∞ ,即说明0型和I型系统不能跟踪加速度输入信号。只有II型系统能跟踪,它的稳态误差为一定值,且误差与开环放大系数成反比。对高于II型的系统,其稳态误差为零。但是此时要使系统稳定则比较困难。

各种输入信号作用下的稳态误差如表 3-7-1 所示。

表 3-7-1 各种输入信号作用下的稳态误差

| 系 统 类 型 | 静态误差系数 | | | 输 入 信 号 | | |
|---------|----------|----------|----------|-----------------|---------------|-------------------|
| | K_p | K_v | K_a | $A \cdot u(t)$ | $A \cdot t$ | $\frac{1}{2}At^2$ |
| 0 型 | K | 0 | 0 | $\frac{A}{1+K}$ | ∞ | ∞ |
| I 型 | ∞ | K | 0 | 0 | $\frac{A}{K}$ | ∞ |
| II 型 | ∞ | ∞ | K | 0 | 0 | $\frac{A}{K}$ |
| III 型 | ∞ | ∞ | ∞ | 0 | 0 | 0 |

由表 3-7-1 可以看出,为了减少给定误差,可以增加前向通道上的积分环节个数或增大系统的开环放大系数。若给定的输入信号是上述典型信号的线性组合时,则系统相应的稳态误差就由叠加原理求出。例如,若输入信号为

$$x(t)=A+Bt+\frac{1}{2}Ct^2$$

则系统的总稳态误差为

$$e_{ss}=\frac{A}{1+K_p}+\frac{B}{K_v}+\frac{C}{K_a} \tag{3-7-21}$$

综上所述,稳态误差系数 K_p 、 K_v 和 K_a 描述了系统对减小和消除稳态误差的能力,因此它们是系统稳态特性的一种表示方法。提高开环放大系数 K 或增加开环传递函数中的积分环节数,都可以达到减小或消除系统稳态误差的目的。但是,这两种方法都受到系统稳定性的限制。因此,对于系统的准确性和稳定性必须统筹兼顾、全面衡量。

3.7.4 扰动作用下的稳态误差计算

稳态误差可以分为两种。一种是当系统仅仅受到输入量的作用而没有任何扰动时的稳态误差,称为给定稳态误差;另一种是输入信号为零,而由扰动量作用于系统上时所引起的稳态误差,称为扰动稳态误差,反映了系统抗干扰能力的强弱。当线性系统即受到输入信号作用,同时又受到扰动作用时,系统的稳态误差是这两项误差之和,如图 3-7-1 所示。

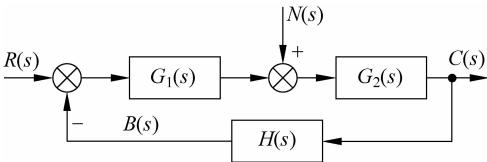


图 3-7-1 扰动输入作用下系统结构图

扰动输入可以作用在系统的不同位置,因此,即使系统对于某种形式给定输入的稳态误差为零,但对同一形式扰动输入的稳态误差则不一定为零。根据线性系统的叠加原理,以图 3-7-1 所示系统来讨论由扰动输入所产生的稳态误差。按照前面给出的误差信号的定

义可得扰动输入引起的误差为

$$E(s) = R(s) - B(s) = -H(s)C(s) \quad (3-7-22)$$

而此时系统的输出为

$$C(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s) \quad (3-7-23)$$

所以

$$E(s) = -\frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s) = \Phi_{\text{en}}(s) \cdot N(s) \quad (3-7-24)$$

式中, $\Phi_{\text{en}}(s) = -\frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$, 称为扰动输入作用下系统的误差传递函数。此时, 系统的稳态误差为

$$e_{\text{ssn}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{sG_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \cdot N(s) \quad (3-7-25)$$

若 $\lim_{s \rightarrow 0} G_1(s)G_2(s)H(s) \gg 1$ 时, 式(3-7-25)可近似表示为

$$e_{\text{ssn}} = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{sN(s)}{G_1(s)} \quad (3-7-26)$$

由式(3-7-26)可知, 扰动信号作用下产生的稳态误差 e_{ssn} 除了与扰动信号的形式有关外, 还与扰动作用点之前的传递函数(即参数)有关, 但与扰动作用点之后的传递函数无关。

3.7.5 减少稳态误差的方法

由前面的讨论可知, 采取以下措施可以改善系统的稳态精度。

(1) 增大系统开环增益或扰动作用点之前系统的前向通道增益, 但增加太大可能引起系统稳定性下降。

(2) 在系统的前向通道或主反馈通道设置串联积分环节, 可以消除系统在特定输入信号和特定扰动作用下的稳态误差。

(3) 采用串联控制抑制内回路扰动。

(4) 采用复合控制方法。

『Reading Material』

What is meant by stability of a dynamic system? A stable system is a dynamic system with a bounded response to a bounded input. How do we find out whether a system is stable or not? The stability of a linear dynamic system is directly related to the location of the poles of system transfer function in the complex s -plane. For stability, all poles of system transfer function must lie in the left half of the complex s -plane.

As we have seen in chapter 1, introduction of the negative feedback control loop to dynamic systems brings about several benefits. Provision of feedback control on the other hand might result in an unstable system under some circumstances. An unstable feedback control system is generally of no practical value. The issue of ensuring the stability of a feedback control system is therefore central to control system design.

The stability of a dynamic system is directly related to the location of the poles of the system transfer function in the s -plane. By careful choice of the closed-loop parameters, the designer is required to ensure that the resulting transfer function of the closed loop system has the poles in the desired locations of the s -plane. Provision of feedback control to a dynamic system may sometimes (depending on the characteristics of the plant being controlled) result in a system transfer function having one or more of its poles with positive real part. Such a system will be useless and unsafe. Therefore our top priority when designing control systems is to make sure that we don't end up with an unstable system.

3.8 MATLAB 在本章中的应用

时域分析法是控制系统重要的分析方法之一。在 MATLAB 环境下,提供了多种函数和工具箱用于时域分析。下面主要采用英文阅读材料的方式,首先介绍在 MATLAB 下如何建立控制系统的传递函数模型,例如第 1 章介绍过的单输入单输出模型(SISO Model)等。

『Reading Material』

1. SISO Transfer Function Models

A continuous-time SISO(Single-Input/Single-Output)transfer function

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

is characterized by its numerator and denominator, both polynomials of the Laplace variable s .

There are two ways to specify SISO transfer functions.

1) Using the tf command

To specify a SISO transfer function model $G(s) = n(s)/d(s)$ using the tf command, type

```
h = tf(num,den)
```

where num and den are row vectors listing the coefficients of the polynomials $n(s)$ and $d(s)$, respectively, when these polynomials are ordered in descending powers of s . The resulting variable h is a TF object containing the numerator and denominator data.

For example, you can create the transfer function $h(s) = s/(s^2 + 2s + 10)$ by typing

```
h = tf([1 0],[1 2 10])
```

Note the customized display used for TF objects.

2) As rational expressions in the Laplace variable s

You can also specify transfer functions as rational expressions in the Laplace variable s by

(1) Defining the variable s as a special TF model

```
s = tf('s');
```

(2) Entering your transfer function as a rational expression in s
For example, once s is defined with `tf` as in 1)

```
H = s/(s^2 + 2*s + 10);
```

Produces the same transfer function as

```
h = tf([1 0],[1 2 10]);
```

Note: You need only define the variable s as a TF model once. All of the subsequent models you create using rational expressions of s are specified as TF objects, unless you convert the variable s to `zpk`.

2. MIMO Transfer Function Models

MIMO (Multiple-Input/Multiple-Output) transfer functions are two-dimensional arrays of elementary SISO transfer functions. There are several ways to specify MIMO transfer function models, including.

- ☐ Concatenation of SISO transfer function models
- ☐ Using `tf` with cell array arguments

Consider the rational transfer matrix

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s+1} \\ \frac{s+2}{s^2+4s+5} \end{bmatrix}$$

You can specify $H(s)$ by concatenation of its SISO entries. For instance,

```
h11 = tf([1 1],[1 1]);
h21 = tf([1 2],[1 4 5]);
```

or, equivalently,

```
s = tf('s')
h11 = (s-1)/(s+1);
h21 = (s+2)/(s^2+4*s+5);
```

then, it can be concatenated to form $H(s)$.

```
H = [h11; h21]
```

This syntax mimics standard matrix concatenation and tends to be easier and more readable for MIMO systems with many inputs and/or outputs. Alternatively, to define MIMO transfer functions using `tf`, you need two cell arrays (say, N and D) to represent the sets of numerator and denominator polynomials, respectively.

For example, for the rational transfer matrix $H(s)$, the two cell arrays N and D should contain the row-vector representations of the polynomial entries of

$$N(s) = \begin{bmatrix} s-1 \\ s+2 \end{bmatrix} \quad D(s) = \begin{bmatrix} s+1 \\ s^2+4s+5 \end{bmatrix}$$

You can specify this MIMO transfer matrix $H(s)$ by typing

```
N = {[1 1];[1 2]};           % cell array for N(s)
D = {[1 1];[1 4 5]};        % cell array for D(s)
H = tf(N,D)
```

Notice that both N and D have the same dimensions as H . For a general MIMO transfer matrix $H(s)$, the cell array entries $N\{i,j\}$ and $D\{i,j\}$ should be row-vector representations of the numerator and denominator of $H_{ij}(s)$, the ij th entry of the transfer matrix $H(s)$.

3. Pure Gains

You can use `tf` with only one argument to specify simple gains or gain matrices as TF objects. For example,

$$G = \text{tf}([1 \ 0; 2 \ 1])$$

produces the gain matrix

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

while

$$E = \text{tf}$$

creates an empty transfer function.

4. Zero-Pole-Gain Models

This section explains how to specify continuous-time SISO and MIMO zero-pole-gain models. The specification for discrete-time zero-pole-gain models is a simple extension of the continuous-time case.

1) SISO Zero-Pole-Gain Models

Continuous-time SISO zero-pole-gain models are of the form

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = k \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \quad n \geq m$$

where k is a real-or complex-valued scalar (the gain), and z_1, z_2, \dots, z_m and p_1, p_2, \dots, p_n are the real or complex conjugate pairs of zeros and poles of the transfer function $H(s)$. This model is closely related to the transfer function representation; the zeros are simply the numerator roots, and the poles, the denominator roots.

There are two ways to specify SISO zero-pole-gain models:

- ☐ Using the `zpk` command
- ☐ As rational expressions in the Laplace variable s

The syntax to specify ZPK models directly using `zpk` is

```
h = zpk(z,p,k)
```

where z and p are the vectors of zeros and poles, and k is the gain. This produces a ZPK object h that encapsulates the z , p , and k data. For example, typing

```
h = zpk(0, [1-i 1+i 2], 2)
```

produces

```
Zero/pole/gain:
      2s
-----
(s-2)(s^2+2s+2)
```

You can also specify zero-pole-gain models as rational expressions in the laplace variable s by

(1) Defining the variable s as a ZPK model.

```
s = zpk('s')
```

(2) Entering the transfer function as a rational expression in s .

For example, once s is defined with ZPK,

```
H = 2 * s / ((s-2) * (s^2 + 2 * s + 2))
```

returns the same ZPK model as

```
h = zpk([0], [2 1-i 1+i], 2);
```

Note: You need only define the ZPK variable s once. All subsequent rational expressions of s will be ZPK models, unless you convert the variable s to TF.

2) MIMO Zero-Pole-Gain Models

Just as with TF models, you can also specify a MIMO ZPK model by concatenation of its SISO entries.

You can also use the command `zpk` to specify MIMO ZPK models. The syntax to create a p -by- m MIMO zero-pole-gain model using `zpk` is

```
H = zpk(Z,P,K)
```

where

- ☐ Z is the p -by- m cell array of zeros($Z\{i,j\}$ = zeros of $H_{ij}(s)$)
- ☐ P is the p -by- m cell array of poles($P\{i,j\}$ = poles of $H_{ij}(s)$)
- ☐ K is the p -by- m matrix of gains($K\{i,j\}$ = gain of $H_{ij}(s)$)

For example, typing

```
Z = { [ ], 5; [1-i 1+i] [ ] };
P = { 0, [ 1 1]; [1 2 3], [ ] };
K = [ 1 3; 2 0];
H = zpk(Z,P,K)
```

creates the two-input/two-output zero-pole-gain model

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{s} & \frac{3(s+5)}{(s+1)^2} \\ \frac{2(s^2-2s+2)}{(s-1)(s-2)(s-3)} & 0 \end{bmatrix}$$

Notice that you use $\begin{bmatrix} \end{bmatrix}$ as a place-holder in Z (or P) when the corresponding entry of $H(s)$ has no zeros(or poles).

由上可见,在 MATLAB 环境下,可以采取多种方式对自动控制系统建模。下面以直流电机为例,以英文阅读材料的方式说明整个建模过程。

『Reading Material』

SISO Example: the DC Motor

A simple model of a DC motor (Fig. 3-8-1) driving an inertial load shows the angular rate of the load, $\omega(t)$, as the output and applied voltage, $v_{app}(t)$, as the input. The ultimate goal of this example is to control the angular rate by varying the applied voltage. This picture shows a simple model of the DC motor.

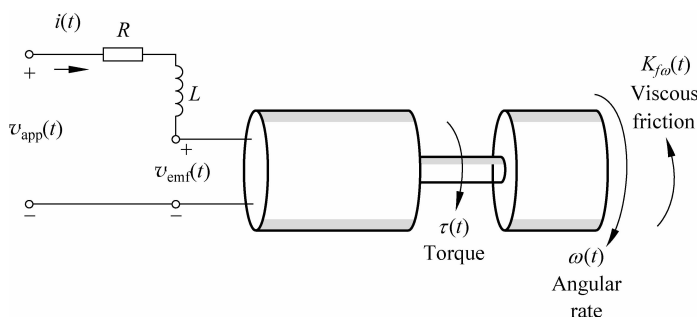


Fig. 3-8-1 A simple model of the DC motor

1. A Simple Model of a DC Motor Driving an Inertial Load

In this model, the dynamics of the motor itself are idealized, for instance, the magnetic field is assumed to be constant. The resistance of the circuit is denoted by R and the self-inductance of the armature by L . If you are unfamiliar with the basics of DC motor modeling, consult any basic text on physical modeling. The important thing here is that with this simple model and basic laws of physics, it is possible to develop differential equations that describe the behavior of this electromechanical system. In this example, the relationships between electric potential and mechanical force are Faraday's law of induction and Ampere's law for the force on a conductor moving through a magnetic field.

2. Mathematical Derivation

The torque τ seen at the shaft of the motor is proportional to the current i induced by the applied voltage

$$\tau(t) = K_m i(t)$$

where K_m , the armature constant, is related to physical properties of the motor, such as magnetic field strength, the number of turns of wire around the conductor coil, and so on. The back(induced) electromotive force, v_{emf} , is a voltage proportional to the angular rate ω seen at the shaft

$$v_{\text{emf}}(t) = K_b \omega(t)$$

where K_b , the emf constant, also depends on certain physical properties of the motor.

The mechanical part of the motor equations is derived using Newton's law, which states that the inertial load J times the derivative of angular rate equals the sum of all the torques about the motor shaft. The result is this equation

$$J \frac{d\omega}{dt} = \sum \tau_i = -K_f \omega(t) + K_m i(t)$$

where $K_f \omega$ is a linear approximation for viscous friction.

Finally, the electrical part of the motor equations can be described by

$$v_{\text{app}}(t) - v_{\text{emf}}(t) = L \frac{di}{dt} + Ri(t)$$

or, solving for the applied voltage and substituting for the back emf

$$v_{\text{app}}(t) = L \frac{di}{dt} + Ri(t) + K_b \omega(t)$$

This sequence of equations leads to a set of two differential equations that describe the behavior of the motor, the first for the induced current

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{K_b}{L}\omega(t) + \frac{1}{L}v_{\text{app}}(t)$$

and the second for the resulting angular rate

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{J}K_f \omega(t) + \frac{1}{J}K_m i(t)$$

3. State-Space Equations for the DC Motor

Given the two differential equations derived in the last section, you can now develop a state-space representation of the DC motor as a dynamic system. The current i and the angular rate ω are the two states of the system. The applied voltage, $v_{\text{app}}(t)$, is the input to the system, and the angular velocity is the output.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{R}{L} & -\frac{K_b}{L} \\ \frac{K_m}{J} & -\frac{K_f}{J} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot v_{\text{app}}(t) \\ y(t) &= [0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} + [0] \cdot v_{\text{app}}(t) \end{aligned}$$

4. Constructing SISO Models

Once you have a set of differential equations that describe your plant, you can

construct SISO models using simple commands in the Control System Toolbox.

The following sections discuss

- ☐ Constructing a state-space model of the DC motor.
- ☐ Converting between model representations.
- ☐ Creating transfer function and zero/pole/gain models.

5. Constructing a State-Space Model of the DC Motor

Listed below are nominal values for the various parameters of a DC motor.

```
R = 2.0           % Ohms
L = 0.5           % Henrys
Km = 0.015        % torque constant
Kb = 0.015        % emf constant
Kf = 0.2          % Nms
J = 0.02          % kg.m^2/s^2
```

Given these values, you can construct the numerical state-space representation using the `ss` function.

```
A = [ -R/L - Kb/L; Km/J - Kf/J];
B = [ 1/L; 0];
C = [ 0 1];
D = [ 0];
sys_dc = ss(A,B,C,D)
```

This is the output of the last command.

```
a =
      x1      x2
x1      -4    -0.03
x2     0.75    -10
b =
      u1
x1      2
x2      0
c =
      x1      x2
y1      0      1
d =
      u1
y1      0
```

6. Converting Between Model Representations

Now that you have a state-space representation of the DC motor, you can convert to other model representations, including transfer function (TF) and zero/pole/gain (ZPK) models.

(1) Transfer Function Representation. You can use `tf` to convert from the state-space representation to the transfer function. For example, use this code to convert to the transfer function representation of the DC motor.

```
sys_tf = tf(sys_dc)
```

Transfer function:

$$\frac{1.5}{s^2 + 14s + 40.02}$$

(2) Zero/Pole/Gain Representation. Similarly, the `zpk` function converts from state-space or transfer function representations to the zero/pole/gain format. Use this code to convert from the state-space representation to the zero/pole/gain form for the DC motor.

```
sys_zpk = zpk(sys_dc)
```

Zero/pole/gain:

$$\frac{1.5}{(s + 4.004)(s + 9.996)}$$

Note: The state-space representation is best suited for numerical computations. For highest accuracy, convert to state space prior to combining models and avoid the transfer function and zero/pole/gain representations, except for model specification and inspection.

以上学习了在 MATLAB 工作环境下,自动控制系统的建模过程。这里通过两个例子,实现时域分析控制,讨论其控制效果。

【例 3-8-1】 已知连续系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{3s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 4s + 6}{s^5 + 3s^4 + 4s^3 + 2s^2 + 7s + 2}$$

要求: (1) 求出该系统的零、极点及增益;

(2) 绘出其零、极点图,判断系统稳定性。

解:

```
% This program create a transfer function and then finds/displays its poles, zeros and gain
NUM = [3,2,5,4,6];
DEN = [1,3,4,2,7,2];
[z,p,k] = tf2zp(NUM,DEN)
pzmap(NUM,DEN);
title('Poles and zeros map');
You should get the following response.
z = 0.4019 + 1.1965i
    0.4019 - 1.1965i
    -0.7352 + 0.8455i
    -0.7352 - 0.8455i
p = -1.7680 + 1.2673i
    -1.7680 - 1.2673i
```

```

0.4176 + 1.1130i
0.4176 - 1.1130i
-0.2991
k = 3

```

【例 3-8-2】 应用 MATLAB 分析系统的动态特性。在 MATLAB 中提供了求取连续系统的单位阶跃响应 `step`, 以及任意输入下的仿真函数 `lsim`。

已知典型二阶系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{2s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

其中 $\omega_n = 6$, 绘制系统在 $\xi = 0.1, 0.2, \dots, 1.0, 2.0$ 时的单位阶跃响应。

Consider the transfer function of a typical second-order system as follows.

解: 可执行如下程序:

```

% This program plots a curve of step response
wn = 6;
kosi = [0.1, 0.2, 1.0, 2.0];
figure(1)
hold on
for kos = kosi
    num = wn.^2;
    den = [1, 2 * kos * wn, wn.^2];
    step(num, den);
end;
title('Step Response');
hold off

```

仿真运行结果如图 3-8-2 所示。

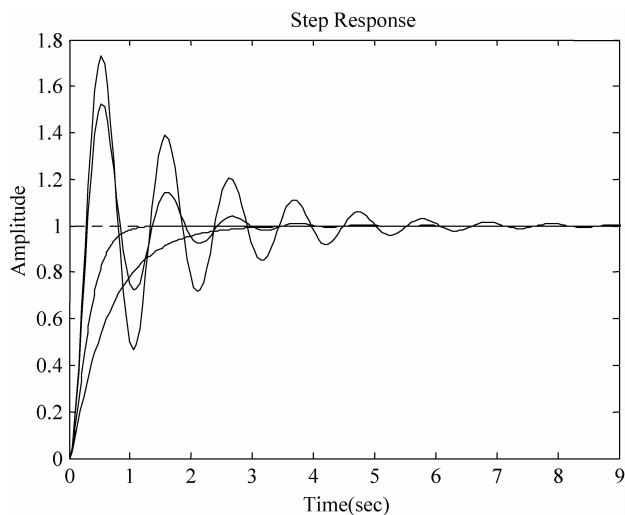


图 3-8-2 例 3-8-2 运行结果

本章小结

(1) 自动控制系统一般不但要具有足够的稳定性,还应该具有较高的稳态控制精度和较快的响应过程。为了评价这三方面的性能,必须定义几个反映稳、准、快三方面性能的指标。

(2) 一阶系统和二阶系统是时域分析法重点分析的两类系统。在本章中,详细介绍了一阶系统和二阶系统的单位阶跃响应、单位斜坡响应和单位脉冲响应。以二阶系统为主,介绍了各种时域性能指标的求取和对系统性能的影响。对于高阶系统,如果其特性近似于一阶或二阶系统,则可在一定条件下,将其降为一阶或二阶系统,然后按一阶或二阶系统作近似分析。而对于一般的高阶系统,可用劳斯判据来判断系统稳定性,用终值定理来计算稳态误差。

(3) 系统平稳性、快速性和稳态精度对系统参数的要求是矛盾的,在系统参数的选择无法同时满足几方面时,可采用在前向通道中加比例微分环节及增加微分负反馈等措施来改善系统动态性能,使系统能同时满足几方面的要求。

(4) 系统能正常工作的首要条件是,系统是稳定的。可采用劳斯判据来判断系统的稳定性。若系统属结构不稳定,则可通过用比例反馈来包围有积分作用的环节,从而改变环节的积分性质,以及在前向通道中增加比例微分环节等方法,使系统变为结构稳定系统。

(5) 稳态误差是衡量系统控制精度的性能指标。稳态误差可分为有给定的信号引起的误差以及有扰动信号引起的误差两种。稳态误差也可用误差系数来表达。系统的稳态误差主要是由积分环节的个数和开环增益来确定的。为了提高精度等级,可增加积分环节的数目,为了减小有限误差,可增加开环增益。但这两种方法都会使系统的稳定性变差,甚至导致系统不稳定。而采用补偿的方法,则可在保证稳定性的变差,甚至导致系统不稳定。而采用补偿的方法,则可在保证稳定性的前提下减小稳态误差。

『Summary and Outcome Checklist』

In this topic we have been concerned with the definition and usefulness of quantitative measures of performance of feedback control systems. We learn that there is strong correlation between the system transient response and the locations in the s -plane of the poles of the closed-loop transfer function. For systems having second-order transfer function, valuable relationships have been developed between the performance specifications and the two characteristic parameters, damping ratio, ξ , and natural frequency, ω_n . Relying on the notion of dominant poles, these relationships are considered applicable to those higher order systems that have a dominant pair of complex poles.

While the introduction of the negative feedback control loop to dynamic systems brings about several benefits, it might result in an unstable system under some circumstances. Such an unstable system will be useless and unsafe. The issue of ensuring the stability of the feedback control system is therefore central to control system design.

The stability of a dynamic system is directly related to the location of the poles of the system transfer function in the s -plane. By careful choice of the closed-loop parameters, the designer is required to ensure that the resulting transfer function of the closed loop system has the poles in the desired locations of the s -plane.

The fundamental reasons for using feedback control, despite its additional cost and complexity are:

(1) decrease in the sensitivity of the system to variations in the parameters of the plant/process being controlled.

(2) ease of control and adjustment of the transient response of the system.

(3) reduction of the impact of disturbance and noise signals within the system.

(4) reduction of the steady-state error of the system.

Tick the box for each statement with which you agree.

- ☐ I am able to determine the poles and zeros of a given transfer function and map them in the complex s -plane.
- ☐ I am able to determine, by the partial fraction method, the time response of a given transfer function to standard test input signals such as the step, impulse, ramp, and sinusoid.
- ☐ I am able to distinguish between the transient, and steady state, responses of a dynamic system.
- ☐ I can explain what performance measures (or specifications) are, why they are important to the design process, and what makes a particular measure a good candidate to be a performance measure.
- ☐ I can list the performance measures commonly used by control practitioners.
- ☐ I can describe the correlation that exist between the transient response of a system and the location of the system poles and zeros in the s -plane.
- ☐ I can explain, with the help of an illustrative example, the notion of dominant pole/poles of a transfer function.
- ☐ I can express the transfer function of 1st, and 2nd order systems in their respective standard form and identify the characteristic parameters.
- ☐ I can write down the time response of 1st, and 2nd order systems (in terms of their respective characteristic parameters) to standard test input signals such as the step, impulse, ramp, and sinusoid.
- ☐ By examining the transfer function of higher order systems (order > 3), I can determine whether the transfer function can/cannot be approximated by a lower order transfer function.
- ☐ I can, if feasible, approximate a higher order transfer function by a lower order transfer function.
- ☐ I can predict the time response of a control system if its transfer function is known.

- ☐ I can describe the quantitative relationships that exist between the various performance measures and the characteristic parameters of systems having the standard 2nd order transfer function.
- ☐ I can explain why, when designing control systems, designers often attempt to achieve a second order type transfer function for the control system.
- ☐ I can explain the meaning of the term sensitivity.
- ☐ I am able to determine the sensitivity of a feedback control systems to variations in the parameters of the system.
- ☐ Given the transfer function of a system, I am able to determine its poles and zeros and map them in the complex s -plane.
- ☐ I am able to determine the transient response and the steady state error of a feedback control system for standard input test signals.
- ☐ I am able to estimate the effect of disturbances on the performance of a feedback control system.
- ☐ I can list the four main benefits of feedback control.
- ☐ I can explain the concept of stability in the context of linear dynamic systems.
- ☐ I can state the relationship between stability and the s -plane location of the poles of the system transfer function.
- ☐ I am able to determine whether a system is stable or not by applying the Routh-Hurwitz stability criterion.
- ☐ I can explain the meaning of the term relative stability, and analyse the relative stability of a dynamic system by applying Routh-Hurwitz stability criterion.
- ☐ I am able to determine how the locations of poles of system transfer function in the s -plane change as a parameter of the system is varied.

习题

3-1 设系统的初始条件为零,其微分方程式如下:

(1) $0.2 \dot{c}(t) = 2r(t)$

(2) $0.04 \ddot{c}(t) + 0.24 \dot{c}(t) + c(t) = r(t)$

试求:两个系统的单位冲激响应及单位阶跃响应,并求系统(2)的过渡过程及最大超调量 σ_p 、峰值时间 t_p 、过渡过程时间 t_s 。

3-2 已知某单位反馈系统的闭环传递函数为

$$\phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{15.36(s+6.25)}{(s^2+2s+2)(s+6)(s+8)}$$

试近似计算系统的单位阶跃响应性能指标:最大超调量 $\delta\%$ 、调节时间 t_s 、稳态误差 e_{ss} 。

3-3 典型二阶系统的单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 - 1.25e^{-1.2t} \sin(1.6t + 53.1^\circ)$$

试求系统的最大超调量 σ_p 、峰值时间 t_p 、过渡过程时间 t_s 。

3-4 系统零初始条件下的单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 + 0.2e^{-60t} - 1.2e^{-10t}$$

(1) 试求该系统的闭环传递函数；

(2) 试确定阻尼比 ξ 与阻尼自振角频率 ω_n 。

3-5 设系统的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

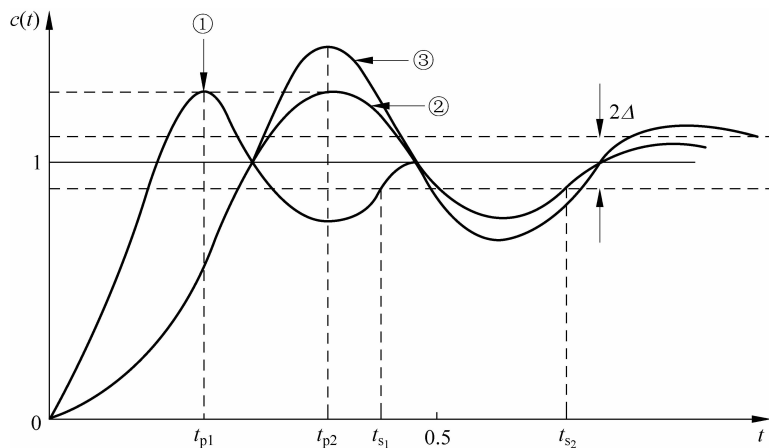
为使系统阶跃响应有 5% 最大超调量和 2s 的过渡过程时间, 试求 ξ 和 ω_n 。

3-6 对由如下闭环传递函数表示的三阶系统

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{816}{(s+2.74)(s+0.2+j0.3)(s+0.2-j0.3)}$$

说明该系统是否有主导极点。如有, 求出该极点。

3-7 已知二阶系统的闭环传递函数为 $\phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$, 试在同一 $[s]$ 平面上画出对应题 3-7 图中 3 条单位阶跃响应曲线的闭环极点相对位置, 并简要说明。图中 t_{s1} 、 t_{s2} 分别是曲线①、曲线②的过渡过程时间, t_{p1} 、 t_{p2} 、 t_{p3} 分别是曲线①、②、③的峰值时间。



题 3-7 图

3-8 设单位反馈系统其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(1+s/3)(1+s/6)}$$

若要求闭环特征方程的根的实部均小于 -1, 求 K 值的取值范围。如果要求实部均小于 -2, 情况又如何?

3-9 设系统方程如下, 试用劳斯判据确定系统正实部根的个数。

(1) $\Delta(s) = s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 20s + 24 = 0$

(2) $\Delta(s) = s^3 - 3s + 2 = 0$

(3) $\Delta(s) = s^6 + s^5 + 6s^4 + 5s^3 + 9s^2 + 4s + 4 = 0$

(4) $\Delta(s) = s^5 + 2s^4 - s - 2 = 0$

$$(5) \Delta(s) = s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1 = 0$$

3-10 已知单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{10K}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$, 式中 $T_1 = 0.1(s)$, $T_2 = 0.5(s)$, 输入信号为 $r(t) = 2 + 0.5t$ 。

(1) 求 $K=1$ 时的系统稳态误差。

(2) 是否可以选某一合适的 K , 使得系统稳态误差为 0.025 ?

3-11 系统如题 3-11 图所示, 试求下列各系统的静态误差函数 k_p , k_v 和 k_a , 以及输入 $r(t) = 6t^2 \times 1(t)$ 时的静态误差。

3-12 设随动系统的微分方程为

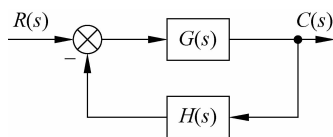
$$T_M T_a \frac{d^3 c(t)}{dt^3} + T_M \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + \frac{dc(t)}{dt} + Kc(t) = Kr(t)$$

其中, $c(t)$ 为系统输出量; $r(t)$ 为系统输入量; T_M 为电动机机电时间常数; T_a 为电动机电磁时间常数; K 为系统开环增益。初始条件全部为零。试讨论:

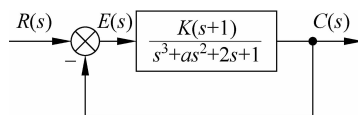
(1) T_a 、 T_M 与 K 之间关系对系统稳定性的影响。

(2) 当 $T_a = 0.01$, $T_M = 0.1$, $K = 500$ 时, 可否忽略 T_a 的影响? 在什么情况下 T_a 的影响可忽略?

3-13 系统结构如题 3-13 图所示。若系统以 $\omega = 2\text{rad/s}$ 频率持续振荡, 试确定相应的 K 和 a 的值。

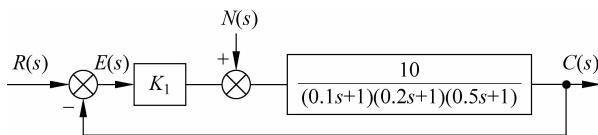


题 3-11 图



题 3-13 图

3-14 设控制系统如题 3-14 图所示。其中扰动信号 $n(t) = 1(t)$ 。试问: 是否可以选某一合适的 K_1 值, 使系统在扰动作用下的稳态误差值为 $e_{ssn} = -0.099$?



题 3-14 图

3-15 控制系统的误差还有一种定义方法, 这就是: 无论对于单位反馈系统还是非单位反馈系统, 误差均定义为系统的输入量与输出量之差, 即

$$e(t) \triangleq r(t) - c(t)$$

现在设闭环系统的传递函数为

$$\phi(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad n \geq m$$

试证: 系统在单位斜坡函数输入作用下, 不存在稳态误差的条件是 $a_0 = b_0$ 和 $a_1 = b_1$ 。

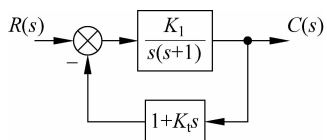
3-16 设系统结构图如题 3-16 图所示。如果要求系统的超调量等于 15% , 峰值时间

等于 0.8s , 试求增益 K_1 和 K_t , 同时确定在此条件下系统的延时时间、上升时间和调节时间。

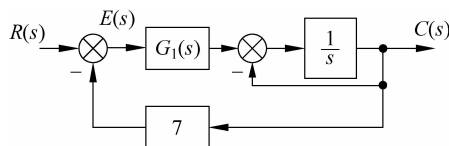
3-17 系统结构图如题 3-17 图所示。

(1) 已知 $G_1(s)$ 的单位阶跃响应为 $1 - e^{-2t}$, 试求 $G_1(s)$ 。

(2) 当 $G_1(s) = \frac{1}{s+2}$, 且 $r(t) = 10 \times 1(t)$ 时, 试求: ① 系统的稳态输出; ② 系统的峰值时间 t_p , 超调量 $\delta\%$, 调节时间 t_s 和稳态误差 e_{ss} ; ③ 概括绘出系统的输出响应曲线 $c(t)$ 。



题 3-16 图



题 3-17 图