

第 1 章

绪 论

1.1 弹性力学的发展与应用

弹性力学是固体力学的一个重要分支,它研究弹性物体在外力和外界其他因素作用下产生的变形和内力。**弹性**指物体在外界因素(外荷载、温度变化等)作用下引起变形,在外界因素撤除后,完全恢复其初始的形状和尺寸的性质。弹性力学仅研究变形与外力呈线性关系的弹性物体。一般来说,物体所产生的应力和应变之间的关系是一一对应的,即双方互为单值函数,且呈线性关系。若这种关系是非线性的,则称物体具有**非线性弹性性质**。本书所研究的问题更确切地说叫做**线性弹性力学问题**。

弹性力学是材料力学的延续。材料力学中已用胡克定律讨论过多种简单构件,采用了一系列几何的、物理的简化假定,得到能满足一般工程实用的应力和位移计算公式。弹性力学不使用未加证明的假定,因此能得到更精确的解答。另外,二者的研究对象虽都是弹性体,但材料力学研究单个杆件,弹性力学主要研究块体、板和壳体,对杆件的分析更为精确。

弹性力学的发展约有 350 多年的历史,这里对此学科的发展作一简略介绍。

由胡克(Hooke R)实验(1660 年)起至柯西(Cauchy A L)1820 年提出弹性理论的基本问题为止,通常被认为是发展初期阶段。此期间科学家们

提出了许多弹性体受力变形的问题,并且各自分别用自己的理论来解决一些简单构件问题,并无统一的理论和方法。

19 世纪 20 年代至 50 年代,纳维(Navier)和柯西提出弹性力学的基础问题,以及格林(Green G)和汤姆逊(Thomson W)确定了一般弹性材料应力-应变关系的 21 个弹性系数,此阶段是弹性力学问题的理论统一和建立期。

接下来是解决线性问题的发展期,大约为 19 世纪 50 年代至 20 世纪初,以圣维南(St Venant),1854 年关于柱体扭转和弯曲理论论文的发表为标志,之后他还提出了半数学半物理的联合解法,所得解答与实验极为吻合,为理论的可靠性奠定了基础,由此开辟了弹性力学应用的广阔前景。这期间的重要工作还有艾雷(Airy G B)1862 年提出了应力函数解法,从而解决了平面问题,赫兹(Hertz H)1882 年解决了接触问题,克希霍夫(Kirchhoff G)1850 年解决了平板门的平衡和振动问题。而且很多问题已应用到工程中。

从 20 世纪初开始,随着工业技术的迅猛发展,如机械方面、船舶方面、建筑方面,钢材及其他弹性材料的应用范围不断扩大,弹性力学得到了快速的发展,同时也推动了它与其他科学的结合,不但进一步解决了一些薄板大挠度、大变形和非线性稳定性等问题,同时也形成了一些新的学科领域,至今已有非线性弹性力学、非线性板壳理论、热弹性力学、电磁弹性力学、气动弹性力学和水弹性力学等,应用的工程领域已举不胜举。20 世纪该学科的发展显示了蓬勃旺盛的景象,不少科学家为此作出了贡献,这其中已有中国科学家的工作,值得注意的有:钱学森与卡门(Karman Tvon)提出薄壳的非线性稳定问题;钱伟长参与发展了薄壁杆件理论;胡海昌参与发展了各向异性的弹性力学;以及钱伟长、胡海昌建立了弹性力学的广义变分原理并推广到了塑性力学领域中。

如今,弹性力学在工程上的应用已极为广泛,如道桥工程、房建工程、水利工程、船舶制造工程、机械工程、航天工程等诸多领域,而且已成为解决许多工程问题必不可少的工具。可以预料,弹性力学将会对现代工业技术和自然科学发挥更加重要的作用。

1.2 弹性力学的求解方法

弹性力学的求解通常有实验方法、数学方法及各方法结合的方法。

实验方法是用机械的、电学的、光学的、声学的方法来测定弹性体在

外力作用下应力和应变的分布规律,如光弹性法、云纹法等。在弹性力学中,许多难于用数学求解的问题往往借助实验方法求解。

数学方法是利用数学分析的方法,对弹性力学边值问题进行求解,由此求得所研究的弹性体的应力场和位移场,该方面的研究成果构成了弹性力学的基本内容。实际上,数学求解时,必须解含有15个未知函数的偏微分方程组,只能求得很少特殊问题的解析解,一般问题的求解难度相当大,甚至不可能。因此,发展了一些近似解法。例如逆解法、半逆解法和基于能量原理的变分方法等。

除此之外,数值方法也是一种十分有效的方法,主要有:差分法、有限元法和边界元法。目前在计算机普及的情况下,数值方法已成为一种普遍而实用的方法。

对于较为复杂的弹性结构可结合上述几种方法来求解。

1.3 弹性力学的基本假定和一般原理

自然科学中的各门学科都有自己的前提条件和研究范围,弹性力学亦不例外。在这里,对弹性力学研究的物体给出一个限定范围或前提条件,如果所研究的问题超出该范围,弹性力学的理论将不再适用。这一范围或前提条件即为下面的几个基本假定。

(1) **连续性假定**。物体内部由连续介质组成没有空隙,因而各个力学量,如内力、位移、形变等都是连续的,可以用坐标变量的连续函数表示。另外,物体在变形过程中保持连续,原来相邻的任意两个点变形后仍是相邻点,不会出现**开裂**或**重叠**现象,因而可利用微积分知识处理问题。严格地说,物体是由分子组成的,分子和分子相互之间存在着间隙。现在考虑的是物体的宏观力学过程,物体的宏观尺寸远大于分子之间的相对距离,故此假定是成立的,且这一假定已被实验证实是合理的。

(2) **线性完全弹性假定**。弹性从数学角度看,即应力与应变之间互为单值函数,且与变形过程无关。同时还假定物体变形服从胡克定律,即应力与应变成正比。满足弹性和应力-应变成正比的线性关系的物体即为**线弹性物体**。当外力未超过某一限度时,大多数固体材料都具有这种属性。另外,假定物体是完全弹性的,弹性常数与应力和应变的大小无关。线性完全弹性的假设使物理方程(弹性力学中的基本方程之一)成为线性方程,数学处理简单。少数材料具有非线性弹性,这会导致变形与荷载的非线性关系,称为

材料非线性效应。

(3) **均匀性假定**。物体是由同一种材料组成,其弹性性质不随点而变,任何一点的弹性性质可代表整个物体的弹性性质,即弹性常数与位置(坐标)无关;或者物体由多种材料组成,但每一种材料的颗粒远小于物体尺寸且在物体内均匀分布。例如,金属材料可以看做是均匀的,而混凝土、玻璃钢为非均质材料,不细究各组分交界面上的局部应力时,就可用在足够大的材料试件上测得的等效弹性常数来简化成均匀材料。

(4) **各向同性假定**。物体的弹性在所有方向都相同,物体的弹性常数不随方向而变,即弹性常数与坐标轴的方向无关。绝大多数的金属材料是各向同性的,弹性常数只有两个。木材、复合材料、地壳等必须考虑各向异性,弹性常数有 21 个。

(5) **微小变形假定**。在外力或温度变化的作用下,物体变形所产生的位移量与物体本身尺寸相比是微小的,与其本身的几何尺寸相比属于高阶小量,此时问题分析将大为简化。位移是微小的,应变分量和转角远小于 1,其相互乘积及二次以上的量可略去,反映应变与位移关系的**几何方程**(弹性力学中的基本方程之一)是线性方程。大变形情况也会导致变形与荷载的非线性关系,称为几何非线性效应。

由于以上假定使得弹性力学问题的基本方程成为线性方程,故在求解时可以应用叠加原理。

上述基本假定中,第(5)条属于几何假定,其余假定是对材料物性的假定。这些假定是弹性力学的基础和前提条件。以后各章推导的基本公式及各种应用均是在此基础上得出的。

弹性力学中的一般原理主要包括:**圣维南原理、叠加原理和解的唯一性定理**。

圣维南(Saint-Venant)原理:也称局部性原理。它可表述为:若把作用在物体局部边界上的面力用另一组与它静力等效(即有相同的主矢量和主矩)的力系来代替,则在力系作用区域的附近应力分布将有显著的改变,但在远处所受的影响可以不计。应用圣维南原理可将弹性力学中一些较为复杂的边值问题进行简化处理。

叠加原理:在小变形和线弹性的条件下,作用在物体上的几组荷载所产生的总效应等于每组荷载单独作用效应的总和,即通过叠加同一物体的各组荷载分别作用下的解答得到其荷载共同作用时的解答。但应注意的是,一种荷载作用不会引起另一种荷载作用发生性质的变化,此时才能应用叠加原理。例如,平板状物体受平行于板面的拉力、压力、剪力等作用

力,此时可用叠加原理;相反,细长杆受纵向压缩和横向弯曲时,横向弯曲的荷载作用会引起纵向压缩作用的性质变化,且变形大,因而不能采用叠加原理。

解的唯一性定理:对于弹性体,在外荷载作用下应力、应变、位移的解答是唯一确定的。

1.4 典型例题

如图 1.1(a)所示,受轴向拉伸的变截面薄板,若采用材料力学的方法计算应力时,所得结果是否总能满足任一横截面(图 1.1(b))和微元体(图 1.1(c))的平衡?若采用弹性力学的方法求解,其结果又将如何?

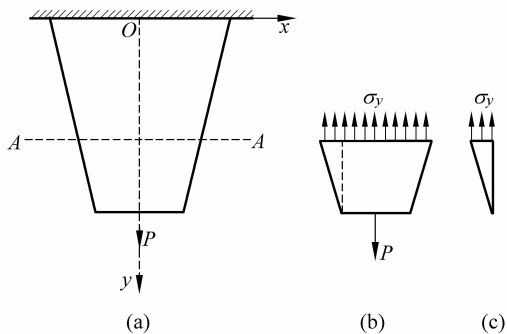


图 1.1

解 按材料力学方法计算:受轴向拉伸变截面薄板,假定横截面上无剪应力,正应力均匀分布,同时假定薄板的纵向纤维互不挤压,即

$$\tau_{yx} = 0, \quad \sigma_y = \frac{P}{A_0}, \quad \sigma_x = 0$$

其中 A_0 为 A—A 处的横截面面积。

若取整个薄板的某一段加以分析,如图 1.1(b)所示,此应力分布能满足任一横截面的平衡条件。

若在薄板的边缘取一微元体,如图 1.1(c)所示,此应力分布显然不能满足平衡条件。因此,该应力场只是近似解答。即满足大部分区域,而在小部分区域上是不正确的。

按弹性力学方法计算:在薄板内任取一微元体,其应力分布如图 1.2 所示。该应力分布能满足任一微元体的平衡条件,因此弹性力学分析的结果

更加精确。

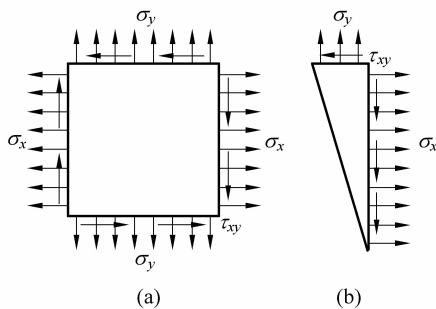


图 1.2

下面介绍几位弹性力学的奠基学者。

柯西(Augustin-Louis Cauchy)1789 年生于法国,1857 年去世。数学家和力学家。他奠定了弹性力学中应力和应变的理论,首先指出了矩形截面杆的扭转与圆截面杆有重大区别,最早研究了板的振动问题,在数学和力学的其他方面也作出很多突出的贡献。

圣维南(Adhémar Jean Claude Barre de Saint-Venant)1797 年生于法国,1886 年去世。1825 年毕业于巴黎桥梁公路学校,后从事工程设计工作,1837 年回该校任教,1868 年当选为法国科学院院士。在弹性力学、塑性力学、流体力学等方面作出了贡献。他的力作用的局部性思想被称为“圣维南原理”。

杨(Thomas Young)1773 年生于英国,1829 年去世。他是一个多才多艺的学者,曾以物理学及考古学著称,他建立了光的波动理论。在弹性理论方面首先给出了应力-应变之间的定量数值关系,从而使得弹性力学正式成为一门科学。他还是首先考虑剪切弹性变形的科学家。

泊松(Simeon-Denis Poisson)1781 年生于法国,1840 年去世。他初学医学,后于 1798 年进巴黎综合工科学学校改学数学,毕业后在该校任教。著有数学、天文学、电学和力学方面的著作,其代表性力学著作《力学教程》于 1811 年问世,“泊松比”便是以他的名字命名的。

基尔霍夫(Gustav Robert Kirchhoff)1824 年生于德国,1887 年去世。曾在海登堡大学和柏林大学任物理学教授,他发现了电学中的“基尔霍夫定律”,同时对弹性力学,特别是薄板理论的研究作出了重要贡献。

本章小结

1. 弹性力学的 5 个基本假定

物体是连续的,各个力学量是坐标的连续函数;线弹性假设,应力和应变互为单值线性函数,和过程无关,与应力、应变大小无关;均匀性假定,任一点的弹性性质可代表整个物体的弹性性质;各向同性假定,弹性性质与方向无关;微小变形假设,几何方程是线性的,数学分析简单。这些假定限定了线性弹性力学的研究范围,也是其理论成果应用的前提条件。

2. 弹性力学的三个一般原理

圣维南原理使复杂边界条件可以简化处理;叠加原理使受力形式复杂的问题简化为几个受力形式简单的、便于分析的问题叠加;解的唯一性定理使得求解方法多样化。

思考题

- 1-1 弹性力学中的基本假定是什么?
- 1-2 举例说明均匀性假定和各向同性假定有何区别。
- 1-3 一般的钢筋混凝土构件能否作为理想弹性体?
- 1-4 弹性体的应力-应变曲线一定是线性的吗?

第 2 章

应力分析

2.1 体力、面力及应力

凡能导致物体变形和产生内力的物理因素都可称为**载荷**。载荷分为两大类：一类载荷，如重力、机械力和电磁力，可以简化为作用在物体上的外力，此外力可引起物体的变形和内力；另一类载荷，如温度和中子辐照等物理因素，则直接引起物体变形，仅当这种变形互不协调或受到约束时，物体内才产生内力。

弹性体所受的力可划分为外力和内力两大类。外力是作用于弹性体上的力，它包括体积力和面力。内力为由于外力作用而引起的物体内部各部分之间相互作用的力。现对这几个概念逐一进行介绍。

体积力是作用在物体体积内的力，也称**体力**，例如重力、惯性力及电磁力等。为标明物体在某点 P 所受体积力的大小和方向，过 P 点(见图 2.1)从物体中取一微小体积 Δv ，并设作用其上的体力为 ΔQ ，则体力定义为

$$f = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v} \quad (2.1)$$

f 的方向为 ΔQ 的极限方向。为了计算方

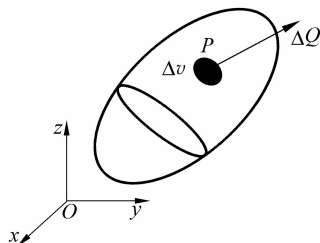


图 2.1

便,将体力分解到3个坐标轴方向,其相应分量记为 f_x 、 f_y 、 f_z 。一般情况下,物体所受力各点并不相同,而是坐标的函数。

面力是分布在物体表面上的力,或者说是两物体通过表面的相互作用而产生的力。例如液体或气体的压力、固体间的接触力等。为确定物体表面某点 P 承受面力的大小和方向,过 P 点(见图2.2)取该表面的一小部分,它包含 P 点,面积为 ΔS ,设作用于 ΔS 面积上的面力为 ΔQ ,则面力定义为

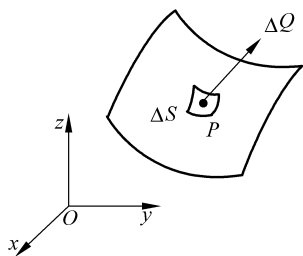


图 2.2

$$F = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} \quad (2.2)$$

其大小为 ΔQ 的极限值,方向为 ΔQ 的极限方向。同样,可将其分解到3个坐标轴上,相应分量记为 F_x 、 F_y 、 F_z 。

内力是物体内一部分对另一部分的作用,通常以应力的形式表示,如材料力学中梁截面上的正应力、剪应力等。

如图2.3所示,一弹性体被假想平面截成两部分: A 和 B ,那么 B 部分对 A 部分的作用,便可以用 A 部分截面上的应力矢量来代表。

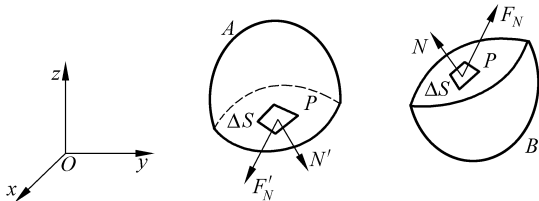


图 2.3

由图2.3可知, B 部分截面上任一点 P , P 是包含在微小面积 ΔS 内的, ΔS 面上过 P 点的外法线是 N ,令 P 点的面力是 F_N ,它是一个矢量,因此称为**应力矢量**。应力矢量表示作用在法向为 N 的微元平面上的单位面积上的力。在直角坐标系中, F_N 分解为坐标分量 F_x 、 F_y 、 F_z 。特别提醒:应力是坐标的函数。

显然在 A 部分同一点 P 的外法线是 N' ,它与 N 的方向相反,应力矢量 F'_N 应有如下关系: $F'_N = -F_N$ 。

从物体中的一点处取出一微元体,这一微元体呈正平行六面体,且各边与坐标轴平行,长度分别为 Δx 、 Δy 、 Δz (见图2.4),将每一平面上的应力分为正应力和剪应力,而剪应力又可分解为两个沿坐标方向的分量。

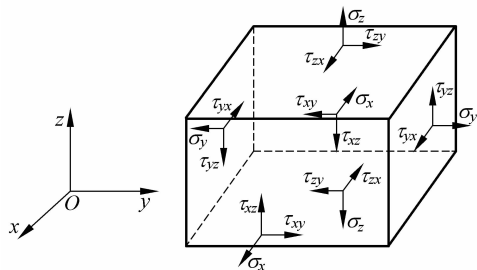


图 2.4

由此可见,一点处应有 9 个应力分量,记为

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

这样的一组量称为应力场 σ_{ij} ,也称为应力张量。其中 σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 σ_{zz} 常记为 σ_x 、 σ_y 、 σ_z ,而 $\sigma_{ij} = \tau_{ij}$ 。

若以连接六面体前后两面中心的直线为矩轴,由力矩平衡可得

$$2\tau_{yz} \cdot \Delta z \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta y}{2} - 2\tau_{zy} \cdot \Delta y \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta z}{2} = 0$$

以同样方法列出另外两个力矩平衡方程,求解这些方程就可得到

$$\begin{cases} \tau_{yz} = \tau_{zy} \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} \end{cases} \quad (2.3)$$

这一结果证明了剪应力的互等性,也就是说,剪应力记号的两个下标字母可以对调。因此,一点应力分量独立的只有 6 个。

对弹性力学中的基本物理量的正负符号作如下规定。

位移: 沿坐标轴正向为正,反之为负。

外力: 无论面力或体力,沿坐标轴正方向为正,反之为负。

应力: 正应力和材料力学的规定相同,即以拉为正以压为负;剪应力符号规定不同,即应力作用面的外法线和坐标轴正向一致为正面,反之为负面。正面上应力(正应力或剪应力)以沿坐标轴正向为正,沿坐标轴负向为负;负面则与之相反,即负面负向为正。

应变: 正应变以伸长为正,反之为负;剪应变以直角变小为正,反之为负。

张量简介:

力学中常用的量分为几类: 只有大小没有方向的物理量称为标量,如温

度、密度、时间等；既有大小又有方向性的物理量称为矢量，如矢径、位移、速度、力等；具有多重方向性的、比矢量更为复杂的物理量称为张量，如应力、应变为二阶张量。

所有与坐标系选取无关的量，统称为物理恒量。在三维空间，以 n 表示幂次，描述一切物理恒量的分量数目可统一地表示成： $M=3^n$ 。现令 n 为这些物理量的阶次，并统一称这些物理量为张量。当 $n=0$ 时， $M=1$ ，称为零阶张量，如标量；当 $n=1$ 时， $M=3$ ，称为一阶张量，如矢量；当取 n 时， $M=3^n$ ，称为 n 阶张量。在张量讨论中，采用下标字母符号来表示和区别该张量的所有分量。张量运算时不重复出现的下标符号称为自由标号，自由标号在其方程内只罗列不求和。以自由标号的数量确定张量的阶次。重复出现且只能重复出现一次的下标符号称为哑标号或假标号。哑标号在其方程内先罗列后求和，这就叫做求和约定。求和标号可任意变换字母表示。求和约定只适用于字母标号，不适用于数字标号。在运算中，括号内的求和标号应在进行其他运算前优先求和。关于自由标号，在同一方程式中，各张量的自由标号相同，即同阶且标号字母相同。自由标号的数量确定了张量的阶次。对张量的坐标参数求导数时，采用下标符号前方加“,”(逗号)的方式来表示。例如：

$$\sigma_{ii} = \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$a_i b_i = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$a_{ij} b_i = \sum_{i=1}^3 a_{ij} b_i = a_{1j} b_1 + a_{2j} b_2 + a_{3j} b_3$$

$$(\sigma_{ii})^2 = \left(\sum_{i=1}^3 \sigma_{ii} \right)^2 = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2$$

$$\sigma_{ii}^2 = \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii}^2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \sigma_{11} \epsilon_{11} + \sigma_{12} \epsilon_{12} + \sigma_{13} \epsilon_{13} + \sigma_{21} \epsilon_{21} + \sigma_{22} \epsilon_{22} \\ &\quad + \sigma_{23} \epsilon_{23} + \sigma_{31} \epsilon_{31} + \sigma_{32} \epsilon_{32} + \sigma_{33} \epsilon_{33} \end{aligned}$$

$$\sigma_{ij,i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_3}$$

$$\sigma_{i,jj} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial x_2 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \sigma_3}{\partial x_3 \partial x_3}$$

关于 Kronecker delta(δ_{ij})符号：张量分析中的一个基本符号称为柯氏

符号(或柯罗尼克尔符号),亦称单位张量。表示为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } i \neq j \text{ 时} \end{cases} \quad \text{或} \quad \delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2 一点的应力状态

求物体中过 P 点任意方向平面上的应力矢量 $\mathbf{F}_N(F_x, F_y, F_z)$, N 是这个平面的法线方向,见图 2.5。

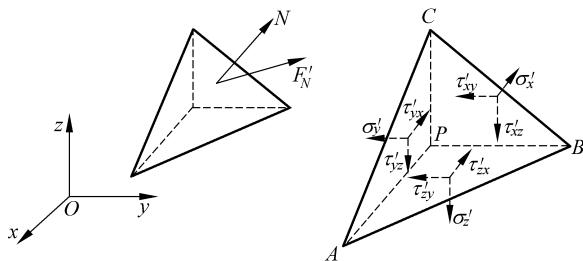


图 2.5

作一平面 ABC 与该平面平行,但不通过 P 点,设平面 ABC 与这个平面的距离为 h ,则这个平面上所受的应力矢量 $\mathbf{F}_N$,与 ABC 面上所受的应力矢量 $\mathbf{F}'_N$ 有如下关系:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{F}'_N(F'_x, F'_y, F'_z) = \mathbf{F}_N(F_x, F_y, F_z) \quad (2.4)$$

设 P 点的应力分量是 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$,而作用在 PAB 、 PAC 及 PBC 平面上的平均应力矢量如图 2.5 所示,当 $h \rightarrow 0$ 时,就有

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z, \sigma'_{xy}, \sigma'_{yz}, \sigma'_{zx}) = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) \quad (2.5)$$

设平面 ABC 的面积为 ΔS ,则 $PABC$ 的体积 $\Delta V = \frac{1}{3} h \Delta S$,将平面 PBC 、 PAC 及 PAB 的面积分别记为 $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3$,它们可由 ΔS 和此点的方向余弦表示

$$\begin{cases} \Delta S_1 = \Delta S \cdot \cos(x, N) = l \Delta S \\ \Delta S_2 = \Delta S \cdot \cos(y, N) = m \Delta S \\ \Delta S_3 = \Delta S \cdot \cos(z, N) = n \Delta S \end{cases} \quad (2.6)$$

其中, l, m, n 是平面 ABC 法线 N 的方向余弦。

设四面体 $PABC$ 体力的 3 个分量是 f_x, f_y, f_z ,则考虑 x 方向力的平

衡有

$$f_x \Delta V + F'_x \Delta S - \sigma'_x \Delta S_1 - \tau'_{yx} \Delta S_2 - \tau'_{zx} \Delta S_3 = 0 \quad (2.7)$$

将 ΔV 及 $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3$ 与 ΔS 的关系式代入上式,并取 $h \rightarrow 0$,可得

$$F_x = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \quad (2.8a)$$

同理,考虑 y, z 方向力的平衡,得到

$$F_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \quad (2.8b)$$

$$F_z = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \quad (2.8c)$$

式(2.8)就是著名的柯西公式,又称斜面应力公式。柯西公式实质是四面体微元的平衡条件,说明过一点(P)的任一平面(ABC)上的应力矢量都可由这点的6个坐标应力分量($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$)求出。柯西公式有两个重要应用:求斜面上的各种应力(坐标应力、全应力、正应力和剪应力)和给定应力边界条件。这里介绍了求斜面上的应力,应力边界条件在以后章节中介绍。

柯西公式用张量形式表示时则形式更简单:

$$F_{Nj} = \sigma_{ij} N_i \quad (2.8')$$

式中, N_i 为斜面法方向的余弦, F_{Nj} 为斜面的坐标应力。

将该斜面上的3个坐标应力分量分解为法向应力 σ_N 和切向应力 τ_N 。利用投影关系可求得法向应力和切向应力。法向应力为

$$\begin{aligned} \sigma_N &= X_N l + Y_N m + Z_N n \\ &= \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl + 2\tau_{xy} ml \end{aligned} \quad (2.9)$$

该斜面上全应力 S_N 的大小按下式确定:

$$S_N^2 = \sigma_N^2 + \tau_N^2 = X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2 \quad (2.10)$$

因而,有切向应力 τ_N 的平方

$$\tau_N^2 = S_N^2 - \sigma_N^2 = X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2 - \sigma_N^2 \quad (2.11)$$

斜面上的全应力 S_N 和切向应力 τ_N 的正负号表示应力的作用方向,根据投影关系具体确定。

2.3 主应力及主方向

已知一点的6个应力分量,则可求出过此点任一面上的法向应力和切向应力。如果过一点的某个截面上只有正应力作用而剪应力为零,这样的平面称为应力主平面,其法线方向 N 称为应力主方向,相应的正应力称为主应力。现在用数学分析的方法来求主平面和主应力。

令主应力的大小为 σ ,主平面的方向余弦为 l, m, n 。这4个量是未知数,

那么在此主平面上沿各坐标轴的应力分量为

$$F_x = \sigma l, \quad F_y = \sigma m, \quad F_z = \sigma n \quad (2.12)$$

将上式代入式(2.8)有

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n = 0 \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n = 0 \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

并有条件(方向余弦的性质)

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (2.14)$$

所以,由代数知识可知,式(2.13)关于 (l, m, n) 非零解的条件是

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (2.15)$$

展开行列式,得到主应力 σ 的特征方程

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (2.16)$$

其中

$$I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (2.17a)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj}) \\ &= \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x \end{aligned} \quad (2.17b)$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \det(\sigma_{ij}) \\ &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \end{aligned} \quad (2.17c)$$

式中, I_1 、 I_2 、 I_3 分别为应力张量的第一、第二和第三不变量。张量的不变量是指坐标变换时数值保持不变的量,同时也反映了一种计算方法。从物理学的角度加以说明:当物体的受力状态确定后,一点的主方向和主应力也应随之确定,即 σ 是确定的,那么关于主应力的特征方程中各系数必是确定的,即 I_1 、 I_2 、 I_3 是确定的,它们不会由于选择不同的坐标而改变。

由上可知, I_1 、 I_2 、 I_3 为已知量,由式(2.16)解出主应力。式(2.16)为一元三次方程,由代数知识知,实对称矩阵的特征值是实数,即式(2.16)必有3个实根,即为所求的 P 点的主应力,记为 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 ,通常规定 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 。

既然式(2.16)有3个实根,则它还可写成

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0 \quad (2.16')$$

式(2.17)就有了更简洁的表示:

$$I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (2.17a')$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj}) = -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 \quad (2.17b')$$

$$I_3 = \det(\sigma_{ij}) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad (2.17c')$$

下面对主应力和主方向分三种情形来讨论：

三个主应力各不相等($\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$)，特征方程(2.16)无重根，与之对应的3个主方向彼此正交。

两个主应力相等($\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$)，特征方程(2.16)有二重根，与 σ_3 对应的主方向相垂直的任何方向都是主方向。

三个主应力相等($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$)，特征方程(2.16)有三重根，此时应力状态称为球形应力(或静水压力)状态。即此点的任意3个彼此正交的方向都是应力主方向。

这里还需说明， σ_1 、 σ_2 、 σ_3 是一点正应力 σ_N 的极值，若令 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ，则有 $\sigma_1 = (\sigma_N)_{\max}$ ， $\sigma_3 = (\sigma_N)_{\min}$ ，有兴趣的读者可自行证明。

现在求出主方向，设与主应力 σ_i ($i=1, 2, 3$) 对应的主方向为 $N_i = (l_i, m_i, n_i)$ 。于是求出 N_i 的方程应为

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_i)l_i + \tau_{xy}m_i + \tau_{xz}n_i = 0 \\ \tau_{xy}l_i + (\sigma_y - \sigma_i)m_i + \tau_{yz}n_i = 0 \\ \tau_{xz}l_i + \tau_{yz}m_i + (\sigma_z - \sigma_i)n_i = 0 \\ l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1 \end{cases} \quad (2.18)$$

由式(2.18)中前3个方程中取出两个方程与第四个方程联解，则可求出与 σ_i 对应的主方向。

2.4 最大剪应力

选取主应力方向作为直角坐标系的 x 、 y 、 z 轴，令过点 P 的任一平面的法线为 $N(l, m, n)$ ，在这面上的应力矢量是 F_N (见图 2.6)，它的3个分量可由该点的主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 表示为

$$\begin{aligned} F_x &= \sigma_1 l, & F_y &= \sigma_2 m, \\ F_z &= \sigma_3 n \end{aligned} \quad (2.19)$$

那么该平面上的法向应力由式(2.9)得到：

$$\sigma_N = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \quad (2.20)$$

总应力 F_N 的大小由下式计算：

$$F_N^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 \quad (2.21)$$

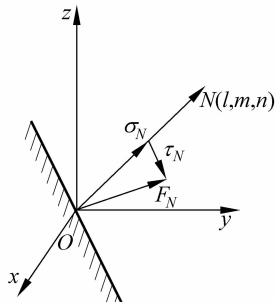


图 2.6

该平面上的剪应力为 τ_N ，它的大小由下式计算：

$$\begin{aligned}\tau_N^2 &= F_N^2 - \sigma_N^2 \\ &= \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2\end{aligned}\quad (2.22)$$

因为 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ，所以 $n^2 = 1 - l^2 - m^2$ ，将其代入式(2.22)可得

$$\begin{aligned}\tau_N^2 &= [(\sigma_1^2 - \sigma_3^2)l^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2)m^2 + \sigma_3^2] \\ &\quad - [(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \sigma_3]^2\end{aligned}\quad (2.23)$$

若在 P 点求 τ_N 的极值，就是求一组 (l, m, n) 使得式(2.23)达极值。故应有条件

$$\frac{\partial \tau_N}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial \tau_N}{\partial m} = 0 \quad (2.24)$$

求导后得出确定 l 和 m 的两个方程

$$\begin{cases} (\sigma_1 - \sigma_3) \cdot l \cdot \left[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \right] = 0 \\ (\sigma_2 - \sigma_3) \cdot m \cdot \left[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) \right] = 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

同理，导得 m 和 n 以及 n 和 l 的方程，求解这些方程可以得到 (l, m, n) 的解答分别为

$$\begin{aligned}&(1, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 0, 1), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \\ &\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right)\end{aligned}$$

对于前 3 组解，正好对应于主平面， $\tau_N = 0$ ，后 3 组解对应的剪应力为：

$$(1) \text{ 当 } (l, m, n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \text{ 时, } \tau_N^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 = \tau_{12}^2$$

$$(2) \text{ 当 } (l, m, n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ 时, } \tau_N^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 = \tau_{13}^2$$

$$(3) \text{ 当 } (l, m, n) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ 时, } \tau_N^2 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 = \tau_{23}^2$$

τ_{12} 、 τ_{13} 、 τ_{23} 称为主剪应力，其中最大者为最大剪应力，按对主应力大小的约定，显然有

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{\min} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \quad (2.26)$$

最大剪应力作用面的法线是 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ 。由空间解析几何可知，剪应力

作用面的法线与 σ_1 、 σ_3 作用面的法线分别呈 $\pm 45^\circ$ 角,若取 $O\sigma_1\sigma_3$ 平面,则受力情况如图 2.7 所示。另两种情况与此相同,

只是轮换次序而已。

例 2-1 已知物体某点的应力分量为

$$\sigma_x = 1.0, \quad \sigma_y = 1.6, \quad \sigma_z = -1.4,$$

$$\tau_{xy} = -0.4, \quad \tau_{yz} = 1.2,$$

$$\tau_{zx} = 0 \quad (\text{单位均为 MPa})$$

试求该点的主应力及主方向。

解 先求出三个应力张量的不变量

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 1.200$$

$$I_2 = -\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 = 3.640$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = -3.456$$

将以上数值代入主应力的特征方程,得

$$\sigma^3 - 1.2\sigma^2 - 3.64\sigma + 3.456 = 0$$

解此方程(按一元三次方程求根公式)得

$$\sigma_1 = 2.146, \quad \sigma_2 = 0.882, \quad \sigma_3 = -1.828$$

欲求主方向,利用式(2.18)。如求 σ_1 所对应的主方向,可取如下方程组:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_1)l_1 + \tau_{xy}m_1 + \tau_{xz}n_1 = 0 \\ \tau_{xy}l_1 + (\sigma_y - \sigma_1)m_1 + \tau_{yz}n_1 = 0 \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \end{cases}$$

将各应力值代入上述方程组,得

$$\begin{cases} -1.146l_1 - 0.4m_1 = 0 \\ -0.4l_1 - 0.546m_1 + 1.2n_1 = 0 \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \end{cases}$$

由以上方程组可解得

$$l_1 = \pm 0.3139, \quad m_1 = \mp 0.8993, \quad n_1 = \mp 0.3046$$

同理,可得 σ_2 和 σ_3 所对应的主方向:

$$l_2 = \pm 0.9485, \quad m_2 = \pm 0.2798, \quad n_2 = \pm 0.1487$$

$$l_3 = \pm 0.0474, \quad m_3 = \pm 0.3351, \quad n_3 = \mp 0.9415$$

例 2-2 已知物体某点的应力分量(单位为 MPa)为

$$\sigma_x = 1.5, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = -0.9, \quad \tau_{xy} = 1.5,$$

$$\tau_{yz} = -2.25, \quad \tau_{zx} = 2.4$$

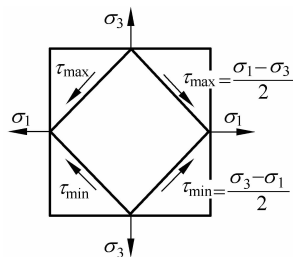


图 2.7

求过该点且方向余弦为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 的面上的总应力 S_N 、正应力 σ_N 和剪应力 τ_N 。

解 由式(2.8)求出该面上各坐标方向的应力

$$F_x = 1.5 \times \frac{1}{2} + 1.5 \times \frac{1}{2} + 2.4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 3.1973$$

$$F_y = 1.5 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} + (-2.25) \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -0.8412$$

$$F_z = 2.4 \times \frac{1}{2} + (-2.25) \times \frac{1}{2} + (-0.9) \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -0.5615$$

法向应力 σ_N 由式(2.9)求出:

$$\sigma_N = 3.1973 \times \frac{1}{2} + (-0.8412) \times \frac{1}{2} + (-0.5615) \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.781$$

总应力 S_N 和剪应力 τ_N 由式(2.10)、式(2.11)求出:

$$S_N = \pm \sqrt{3.1973^2 + (-0.8412)^2 + (-0.5615)^2} = \pm 3.3534$$

$$\tau_N = \pm \sqrt{3.3534^2 - 0.781^2} = \pm 3.2612$$

读者应注意 S_N 和 τ_N 正负号的含义。

例 2-3 若在物体中某点 (x_0, y_0, z_0) 处的应力分量(单位为 MPa)为

$$\sigma_x = 1.5, \quad \sigma_y = 0.75, \quad \sigma_z = -1.5, \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

试求过该点的平面 $(x-x_0) + (y-y_0) + (z-z_0) = 0$ 上的正应力和剪应力。

解 平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的法线的方向余弦为

$$l = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad m = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad n = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

由该平面的方程求出其法线的方向余弦:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

由式(2.8)可求出该平面上的坐标应力分量:

$$F_x = 1.5 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.866, \quad F_y = 0.75 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.433,$$

$$F_z = -1.5 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = -0.866$$

再由式(2.9)及式(2.10)、式(2.11)求出该面上的正应力和剪应力

$$\sigma_N = 0.866 \times \frac{1}{\sqrt{3}} + 0.433 \times \frac{1}{\sqrt{3}} - 0.866 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.25$$

$$\tau_N = \pm \sqrt{0.866^2 + 0.433^2 + (-0.866)^2 - 0.25^2} = \pm 1.2747$$

例 2-4 如图 2.8 所示,正方形板边长为 a ,板中的应力分量为

$$\sigma_x = -20y^3 + 30yx^2, \quad \sigma_y = 10y^3,$$

$$\tau_{xy} = -30y^2x, \quad \sigma_z = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$$

试确定该板边界上的面力。

解 先考查 OA 边(即 y 轴): 其法线的方向余弦(l, m, n)为 $(\cos 180^\circ, \cos 90^\circ, \cos 90^\circ) = (-1, 0, 0)$; 计算 $x=0$ 时的应力:

$$\sigma_x = -20y^3 + 30yx^2 = -20y^3, \quad \sigma_y = 10y^3, \quad \tau_{xy} = -30y^2x = 0,$$

$$\sigma_z = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$$

将应力代入柯西公式,得到该边界上的面力

$$F_x = (-20y^3) \times (-1) + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 20y^3$$

$$F_y = 0 \times (-1) + 10y^3 \times 0 + 0 \times 0 = 0$$

$$F_z = 0 \times (-1) + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 0$$

OC 边(即 x 轴): 其法线的方向余弦为 $(\cos 90^\circ, \cos 180^\circ, \cos 90^\circ) = (0, -1, 0)$; 计算 $y=0$ 时的应力:

$$\sigma_x = -20y^3 + 30yx^2 = 0, \quad \sigma_y = 10y^3 = 0, \quad \tau_{xy} = -30y^2x = 0,$$

$$\sigma_z = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$$

应力均为 0, 则该边界上的面力均为 0。

BC 边: 其法线的方向余弦为 $(\cos 0^\circ, \cos 90^\circ, \cos 90^\circ) = (1, 0, 0)$; 计算 $x=a$ 时的应力:

$$\sigma_x = -20y^3 + 30yx^2 = -20y^3 + 30ya^2, \quad \sigma_y = 10y^3,$$

$$\tau_{xy} = -30y^2x = -30y^2a, \quad \sigma_z = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$$

将应力代入柯西公式,得到该边界上的面力:

$$F_x = (-20y^3 + 30ya^2) \times 1 + (-30y^2a) \times 0 + 0 \times 0 = -20y^3 + 30ya^2$$

$$F_y = (-30y^2a) \times 1 + 10y^3 \times 0 + 0 \times 0 = -30y^2a$$

$$F_z = 0 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 0$$

AB 边: 其法线的方向余弦为 $(\cos 90^\circ, \cos 0^\circ, \cos 90^\circ) = (0, 1, 0)$; 计算 $y=a$ 时的应力:

$$\sigma_x = -20y^3 + 30yx^2 = -20a^3 + 30ax^2, \quad \sigma_y = 10y^3 = 10a^3,$$

$$\tau_{xy} = -30y^2x = -30a^2x, \quad \sigma_z = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$$

将应力代入柯西公式,得到该边界上的面力:

$$F_x = (-20a^3 + 30ax^2) \times 0 + (-30a^2x) \times 1 + 0 \times 0 = -30a^2x$$

$$F_y = (-30a^2x) \times 0 + 10a^3 \times 1 + 0 \times 0 = 10a^3$$

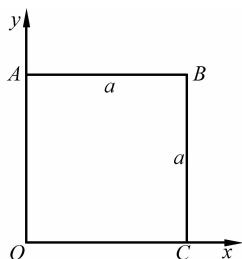


图 2.8

$$F_z = 0 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0$$

感兴趣的读者可绘出面力图。

2.5 平衡微分方程

物体受力作用后处于平衡状态,那么物体内任一点都处于平衡状态,反之,每一个微元的平衡也就保证了整个物体的平衡。因此可以从物体中取出任一微元体进行平衡分析。若取出一微小的平行六面体,各面分别平行于坐标面,如图 2.9 所示。六面体的边长分别为 dx, dy, dz , 设平行六面体受体积力 $f(f_x, f_y, f_z)$ 作用。由于应力分量是坐标的连续函数,所以各相对面上的应力分量是不同的,将任一相对面的应力变化按 x, y, z 方向分别示于图 2.9 中。

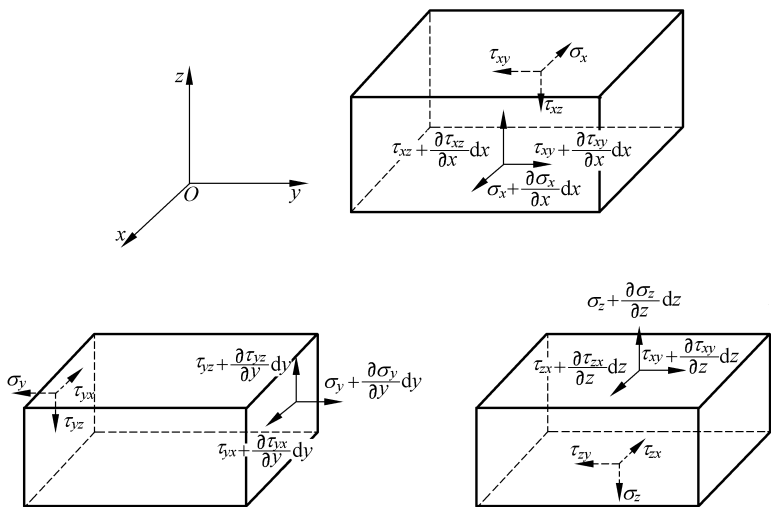


图 2.9

作用在这一微元体上所有的力应满足 6 个平衡方程,即

$$\begin{aligned} \sum x &= 0, \quad \sum y = 0, \quad \sum z = 0, \quad \sum M_x = 0, \\ \sum M_y &= 0, \quad \sum M_z = 0 \end{aligned}$$

前 3 个方程分别为 x, y, z 方向的力平衡,后 3 个方程分别为绕 x, y, z 轴的力矩平衡。由 $\sum x = 0$, 得

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz$$