第一部分　方法篇

方法一　推演法

方法概述

有些选择题、填空题是由计算题、应用题、证明题、判断题改编而成的.这类题型可直接从题设的条件出发,利用已知条件、相关公式、公理、定理、法则、特殊结论,通过准确的运算、严谨的推理、合理的验证得出正确的结论.

推演法就是将选择题、填空题作为解答题来解决的一种最常见的基本方法,低档选择题、填空题可用此法迅速求解.通过阅读条件主动地反映性质,再将得到的性质结合相关结论进行直截了当的推理与计算,然后将其推理和计算的结果作为答案.这一方法要求对于数学的概念、定义、定理和公式成立的充分条件和必要条件的理解要尽可能地全面、透彻、深入;对于数学公式的推导、应用、计算要尽可能地熟练、迅速、准确.

典例精讲

典例一　推演法在函数问题中的应用举例

例1　设函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2+\sin x}{x^2+1}$ 的最大值为 M,最小值为 m,则 $M+m=$________.

【分析】本题重点考查了函数的奇偶性与最值之间的关系,若奇函数在给定区间上有最大值,则一定存在最小值,且两者之和为0,用推演法求解本题.

【解析】$f(x)=\dfrac{x^2+2x+1+\sin x}{x^2+1}=1+\dfrac{2x+\sin x}{x^2+1}$,令 $g(x)=\dfrac{2x+\sin x}{x^2+1}(x\in\mathbf{R})$,则有 $g(-x)=\dfrac{-2x-\sin x}{x^2+1}=-g(x)$,即 $g(x)$为奇函数,显然 $g(x)_{\max}=-g(x)_{\min}$.

所以 $M+m=1+g(x)_{\max}+1+g(x)_{\min}=2$.故填2.

【评注】本题要求学生理解:若奇函数在给定区间上存在最大值与最小值,则其最大值与最小值互为相反数.

变式1　已知函数 $f(x)=\ln(\sqrt{1+9x^2}-3x)+1$,则 $f(\lg 2)+f\left(\lg\dfrac{1}{2}\right)=$(　　).

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

例2　已知奇函数 $f(x)$的定义域为$[-2,2]$,若 $f(x)$在区间$[0,2]$上单调递减,且 $f(1+m)+f(m)<0$,则实数 m 的取值范围是________.

【分析】本题为函数不等式的问题,利用函数的性质(单调性,奇偶性)求解,同时应注意函数的定义域.

【解析】因为 $f(x)$的定义域为$[-2,2]$,所以 $-2\leqslant m\leqslant 2$,$-2\leqslant 1+m\leqslant 2$,又因为 $f(x)$为奇函数,所以 $f(0)=0$,又 $x\in[0,2]$时,$f(x)$单调递减,所以 $f(x)$ 在$[-2,2]$上单调递减,又 $f(1+m)+f(m)<0$,即 $f(m+1)<-f(m)=f(-m)$,所以 $m+1>-m$,综上,原不等式等价于 $\begin{cases}-2\leqslant m\leqslant 2\\-2\leqslant 1+m\leqslant 2\\1+m>-m\end{cases}$,解得 $-\dfrac{1}{2}<m\leqslant 1$,即实数 m 的取值范围是 $\left(-\dfrac{1}{2},1\right]$.

【评注】求解本题中的函数不等式,除注意定义域外,主要是找到核心不等关系,若奇函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,$f(x_1)+f(x_2)<0$,则 $x_1+x_2>0$;同理,若奇函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,$f(x_1)+f(x_2)<0$,则 $x_1+x_2<0$,反之,$f(x_1)+f(x_2)\geqslant 0$,则 $x_1+x_2\geqslant 0$.

变式1　若定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数 $y=f(x)$对于任意的 $x,y\in\mathbf{R}$,不等式 $f(x^2-2x)\leqslant -f(2y-y^2)$均成立,且 $y=f(x-1)$的图像关于点$(1,0)$对称,则当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时,$\dfrac{y}{x}$的取值范围是________.

典例二　推演法在三角函数问题中的应用举例

例3　在△ABC 中,$C=60°$,$AB=\sqrt{3}$,AB 边上的高为 $\dfrac{4}{3}$,则 $AC+BC=$________.

【分析】如图1-1所示,设角 A,B,C 所对边分别为 a,b,c,由面积公式及正、余弦定理求解本题.

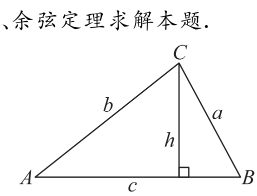


图 1-1

【解析】由 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot h=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ab$,得 $ab=\dfrac{8}{3}$,又由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab=3$,所以 $a+b=\sqrt{(a+b)^2}=\sqrt{a^2+b^2+2ab}=\sqrt{3+3ab}=\sqrt{11}$.

【评注】解三角形问题需熟练掌握正、余弦定理,并且要求习惯三角恒等变换与代数的混合运算之间的相互转化.

变式1　设△ABC 的内角 A,B,C 所对边的长分别为 a,b,c,若 $b+c=2a$,$3\sin A=5\sin B$,则角 $C=$(　　).

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$　　C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

典例三　推演法在不等式问题中的应用举例

例 4　已知 $x,y,z\in(0,+\infty)$，$x-2y+3z=0$，则 $\frac{y^2}{xz}$ 的最小值为________.

【分析】由已知等式可知 y 与 x、z 的关系，利用均值不等式求解本题.

【解析】由 $x,y,z\in(0,+\infty)$，$x-2y+3z=0$ 得 $2y=x+3z\geqslant 2\sqrt{3xz}$，故 $y^2\geqslant 3xz$，即 $\frac{y^2}{xz}\geqslant 3$，当且仅当 $x=3z$ 时，等号成立. 故 $\frac{y^2}{xz}$ 的最小值为 3.

【评注】本题重点要抓住等式 $x-2y+3z=0$，$x,y,z\in(0,+\infty)$，即 $2y=x+3z$，故所求 $\frac{y^2}{xz}=\frac{\left(\frac{x+3z}{2}\right)^2}{xz}\geqslant\frac{(\sqrt{3xz})^2}{xz}=3$，降元是求解本题的关键.

变式 1　设正实数 x,y,z 满足 $x^2-3xy+4y^2-z=0$，则当 $\frac{z}{xy}$ 取得最小值时，$x+2y-z$ 的最大值为（　　）.

A. 0　　B. $\frac{9}{8}$　　C. 2　　D. $\frac{9}{4}$

典例四　推演法在解析几何问题中的应用举例

例 5　已知抛物线 $C:y^2=8x$ 与点 $M(-2,2)$，过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A,B 两点，若 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$，则 $k=$（　　）.

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

【分析】设直线 AB 的方程，利用 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ 的坐标运算直接求解.

【解析】依题意，设直线 AB 的方程为 $y=k(x-2)$，由题意知 $k\neq 0$，则 $x=\frac{1}{k}y+2$，令 $t=\frac{1}{k}$，则 $\begin{cases}x=ty+2\\ y^2=8x\end{cases}$，消去 x 得，

$y^2-8ty-16=0$，显然 $\Delta=64t^2+64>0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=8t$，$y_1y_2=-16$，

又 $\overrightarrow{MA}=(x_1+2,y_1-2)$，$\overrightarrow{MB}=(x_2+2,y_2-2)$

则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1+2)(x_2+2)+(y_1-2)(y_2-2)$

$=x_1x_2+2(x_1+x_2)+4+y_1y_2-2(y_1+y_2)+4$

$=\frac{y_1^2y_2^2}{64}+\frac{y_1^2+y_2^2}{4}+4-16-16t+4$

$=4+\frac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{4}-8-16t$

$=-4-16t+16t^2+8=0$

解得 $t=\frac{1}{2}$，故 $k=2$. 故选 D.

【评注】直线与圆锥曲线位置关系的选择题、填空题一般可借助图像，利用推演法求解. 但为了更快捷地得到答案，也可以记忆一些常见的二级结论.

例如本题，如图 1-2 所示，直线 AB 过抛物线的焦点 F，所以以 AB 为直径的圆与准线 $x=-2$ 相切，因为 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$，所以 M 为切点. 过 A 作 $AA_1\perp A_1M$，过 B 作 $BB_1\perp B_1M$，则以 A_1B_1 为直径的圆与直线 AB 相切，切点为 F，即 $MF\perp AB$. 易知 $k_{MF}=-\frac{1}{2}$，所以 $k_{AB}=2$.

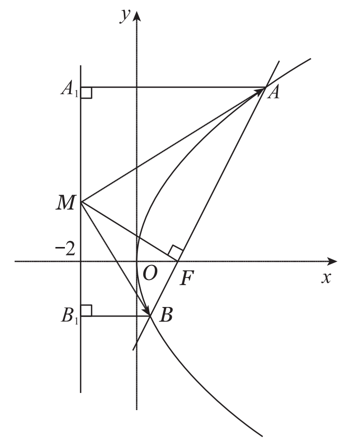


图 1-2

变式 1　如图 1-3 所示，F_1,F_2 是椭圆 $C_1:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 与双曲线 C_2 的公共焦点，A,B 分别是 C_1,C_2 在第二、四象限的公共点. 若四边形 AF_1BF_2 为矩形，则 C_2 的离心率是（　　）.

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

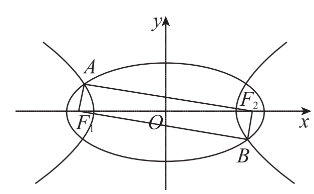


图 1-3

强化训练

1. 复数 $\frac{i}{1+2i}$（i 是虚数单位）的实部是（　　）.

A. $\frac{2}{5}$　　B. $-\frac{2}{5}$　　C. $-\frac{1}{5}$　　D. $\frac{1}{5}$

2. 若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 的单位向量，且 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于（　　）.

A. 1　　B. -4　　C. $-\frac{7}{2}$　　D. $\frac{7}{2}$

3. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_2=3$，$a_6=11$，则 S_7 等于（　　）.

A. 13　　B. 35　　C. 49　　D. 63

4. 若 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边 a,b,c 满足 $(a+b)^2-c^2=4$，且 $C=60°$，则 ab 的值为（　　）.

A. $\frac{4}{3}$　　B. $8-4\sqrt{3}$　　C. 1　　D. $\frac{2}{3}$

5. 已知曲线 $y=x^4+ax^2+1$ 在点 $(-1,a+2)$ 处切线的斜率为 8，则 $a=$（　　）.

A. 9　　B. 6　　C. -9　　D. -6

6. 已知函数 $f(x)=ax^3+b\sin x+4(a,b\in\mathbf{R})$，$f(\lg(\log_2 10))=5$，则 $f(\lg(\lg 2))=$(　　).

A. -5　　B. -1　　C. 3　　D. 4

7. 阅读如图 1-4 所示的程序框图，若输出的 S 值等于 16，那么判断框内应填写的条件是(　　).

A. $i>5$?　　B. $i>6$?　　C. $i>7$?　　D. $i>8$?

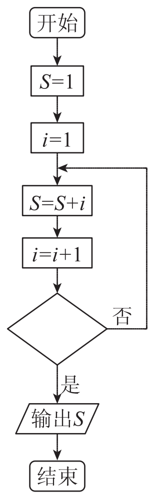


图 1-4

8. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，下列结论中错误的是(　　).

A. $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$f(x_0)=0$

B. 函数 $y=f(x)$ 的图像是中心对称图形

C. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点，则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,x_0)$ 单调递减

D. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(x_0)=0$

9. 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 且倾斜角为 $60°$ 的直线 l 与抛物线在第一、四象限分别交于 A，B 两点，则 $\frac{|AF|}{|BF|}$ 的值等于(　　).

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

10. 已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2ax+4>0$ 恒成立；q：$f(x)=(3-2a)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$p\vee q$ 为真，$p\wedge q$ 为假，则实数 a 的取值范围是________.

11. 等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1+a_2=4$，$a_9+a_{10}=36$，则 $S_{10}=$________.

12. 已知函数 $f(x)$ 对于任意实数 x 满足 $f(x+2)=\frac{1}{f(x)}$，若 $f(1)=-5$，则 $f(f(5))=$________.

13. 在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$B=45°$，$b=\sqrt{2}$，$a=1$，则 A 等于________.

14. 若三个数 a_1，a_2，a_3 的方差为 1，则 $3a_1+2$，$3a_2+2$，$3a_3+2$ 的方差为________.

15. 已知 $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2$，则 $\frac{\tan x}{\tan 2x}$ 的值为________.

16. 设 $f(x)=\sin 3x+\cos 3x$，若对任意实数 x 都有 $|f(x)|\leqslant a$，则实数 a 的取值范围是________.

17. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$M$，$N$ 是椭圆的左，右顶点，P 是椭圆上任意一点，且直线 PM，PN 的斜率分别为 k_1，$k_2(k_1k_2\neq 0)$，若 $|k_1|+|k_2|$ 的最小值为 1，则椭圆的离心率为________.

方法二　图像法

方法概述

图像法也叫图解法，它体现了数形结合的思想. 图像法是利用函数图像或数学结果的几何意义，将数的问题(如解方程、解不等式、求最值、求取值范围等)与某些图形结合起来，利用几何图形的直观性，再辅以简单计算，确定正确答案的方法.

这种解法贯穿数形结合思想，每年高考均有很多选择题、填空题(也有解答题)可以用数形结合思想解决，既简捷又迅速. 如：①借助集合中的韦恩图明确集合的交、并、补的关系；②借助三角函数线和三角函数图像，可以解决有关三角的问题；③借助直线和曲线的位置关系，通过作图求交点，分清上下位置来解决某些方程、不等式的系列问题.

典例精讲

典例一　图像法在函数问题中的应用举例

例 1　已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，且 $a>b>c$，$a+b+c=0$，则(　　).

A. $\forall x\in(0,1)$，都有 $f(x)>0$

B. $\forall x\in(0,1)$，都有 $f(x)<0$

C. $\exists x_0\in(0,1)$，使得 $f(x_0)=0$

D. $\exists x_0\in(0,1)$，使得 $f(x_0)>0$

【分析】利用函数与方程的思想求解本题，由不等式 $a>b>c$，及方程 $a+b+c=0$，作函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图像，结合选项得出正确结论.

【解析】由 $a>b>c$，$a+b+c=0$ 可知：$a>0$，$c<0$，$f(1)=0$，二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图像如图 1-5 所示，由图知，$\forall x\in(0,1)$，$f(x)<0$ 恒成立. 故选 B.

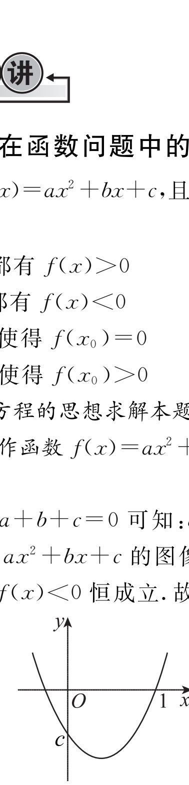


图 1-5

【评注】深入挖掘函数 $f(x)$ 的性质特征作出函数 $f(x)$ 的图像，由 $a+b+c=0$ 知函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图像恒过 $(1,0)$ 点，又 $a>b>c$，所以 $a>0$，抛物线开口向上，$c<0$，则与 y 轴交点 $(0,c)$ 在 y 轴负半轴上.

变式 1　已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=ax^2+bx+c$. 若 $f(0)=f(4)>f(1)$，则(　　).

A. $a>0$，$4a+b=0$　　　B. $a<0$，$4a+b=0$

C. $a>0,2a+b=0$　　　　D. $a<0,2a+b=0$

例 2　当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，不等式 $\sin\frac{\pi x}{2}\geqslant kx$ 成立，则实数 k 的取值范围是________.

【分析】利用图像法求解本题，不等式 $\sin\frac{\pi x}{2}\geqslant kx$ 等价于函数 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$ 的图像在直线 $y=kx$ 上方（可有公共点）.

【解析】如图 1-6 所示，作函数 $y_1=\sin\frac{\pi x}{2}$ 与 $y_2=x$ 的图像，两个图像的交点恰好为 $(0,0)$ 和 $(1,1)$，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，要使 $\sin\frac{\pi x}{2}\geqslant kx$，需使 $k\leqslant 1$，故 k 的取值范围为 $(-\infty,1]$.

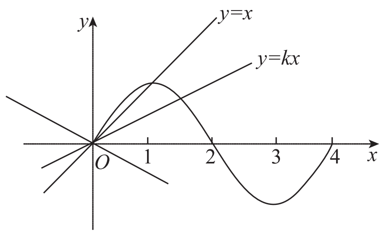


图 1-6

【评注】本题可归结为不等式恒成立条件下求参数的取值范围问题，利用数形结合思想求解这类问题特别奏效.

变式 1　若存在正数 x 使 $2^x(x-a)<1$ 成立，则 a 的取值范围是（　　）.

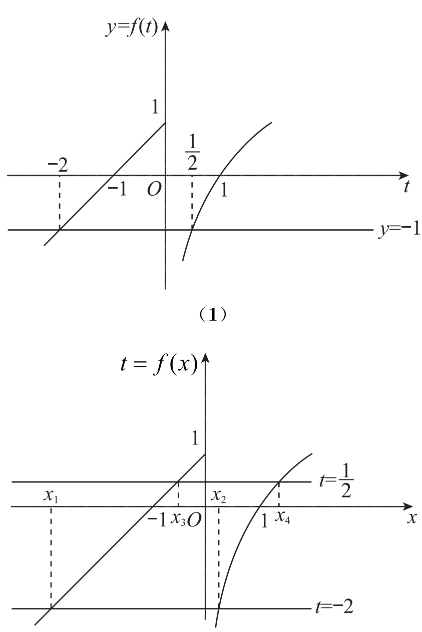
A. $(-\infty,+\infty)$　　　　B. $(-2,+\infty)$

C. $(0,+\infty)$　　　　D. $(-1,+\infty)$

例 3　已知 $f(x)=\begin{cases}x+1,x\leqslant 0\\ \log_2 x,x>0\end{cases}$，则函数 $y=f[f(x)]+1$ 的零点个数是（　　）.

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

【分析】对于复合函数的零点问题利用换元法与图像法综合求解.



（1）

（2）

图 1-7

【解析】令 $t=f(x)\in \mathbf{R}_f$，则 $y=f(t)+1$. 如图 1-7(1) 所示，若 $f(t)=-1$，得 $t=-2$ 或 $\frac{1}{2}$，对应如图 1-7(2) 所示，知 $x_1=-3$，$x_2=\frac{1}{4}$，$x_3=-\frac{1}{2}$，$x_4=\sqrt{2}$. 因此函数 $y=f[f(x)]+1$ 的零点个数是 4. 故选 A.

【评注】本题通过换元后，得到函数 $f(x)=t$ 与 $y=f(t)+1$，同时作出 $t=f(x)$ 与 $y=f(t)$ 的图像. 由 $f(t)=-1$ 得 t 的值（或范围），再由 $t=f(x)$ 确定 x 的值（或范围），这是复合函数求解零点个数问题的通法，应该掌握.

变式 1　已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有两个极值点 x_1,x_2，若 $f(x_1)=x_1<x_2$，则关于 x 的方程 $3(f(x))^2+2af(x)+b=0$ 的不同实根个数是（　　）.

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

典例二　图像法在平面向量问题中的应用举例

例 4　已知向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{e}$，$|\boldsymbol{e}|=1$ 满足：对任意 $t\in\mathbf{R}$，恒有 $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|$ 成立，则（　　）.

A. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{e}$　　　　B. $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$

C. $\boldsymbol{e}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$　　　　D. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$

【分析】显然对 $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|$ 进行平方处理会比较麻烦.

【解析】设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{e}$，则 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}$，因为对任意的 $t\in\mathbf{R}$，$|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|$，所以当 $t_1>1$ 时，设 $\overrightarrow{OB_1}=t_1\boldsymbol{e}$，则 $\boldsymbol{a}-t_1\boldsymbol{e}=\overrightarrow{B_1A}$，即 $|\overrightarrow{B_1A}|\geqslant|\overrightarrow{BA}|$；当 $t_2<1$ 时，设 $\overrightarrow{OB_2}=t_2\boldsymbol{e}$，则 $\boldsymbol{a}-t_2\boldsymbol{e}=\overrightarrow{B_2A}$，则 $|\overrightarrow{B_2A}|\geqslant|\overrightarrow{BA}|$，如图 1-8 所示，$|\overrightarrow{BA}|$ 是点 A 到直线 OB 的最短距离，即 $BA\perp OB$，

所以 $\boldsymbol{e}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$. 故选 C.

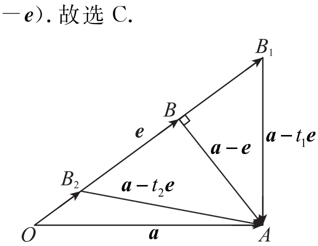


图 1-8

【评注】利用向量运算的几何表示，结合三角形法则、平行四边形法则，可将代数运算转化为几何运算求解.

变式 1　已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b})$ 满足 $|\boldsymbol{b}|=1$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 的夹角为 $120°$，则 $|\boldsymbol{a}|$ 的取值范围是________.

典例三　图像法在解析几何问题中的应用举例

例 5　点 P 在直线 l：$y=x-1$ 上，若存在过 P 的直线交抛物线 $y=x^2$ 于 A、B 两点，且 $|PA|=|AB|$，则称点 P 为“τ 点”，那么下列结论中正确的是（　　）.

A. 直线 l 上的所有点都是“τ 点”

B. 直线 l 上仅有有限个点是“τ 点”

C. 直线 l 上的所有点都不是“τ 点”

D. 直线 l 上有无穷多个点（不是所有的点）是“τ 点”

【分析】由题意知直接法求解难度较大，但可以通过分析其图像，根据数据变化的规律，利用极限（极端值）的思想处理.

【解析】如图 1-9 所示，在直线 l 上任取一点 P，作 $y=x^2$ 的切线 PT，切点为 T，此时，可记为 $|PA|=|PT|$，$|AB|=0$，再作交线 PAB，A 在 P，B 两点之间，当直线

PAB 绕点 P 旋转时,易知 $|AB|$ 的长度变化区间为 $(0,+\infty)$,而 $|PA|$ 的长度从 $|PT|$ 连续变化,故一定存在一条直线 l',使得 $|PA|=|AB|$,故直线 l 上的所有点都是"τ 点".故选 A.

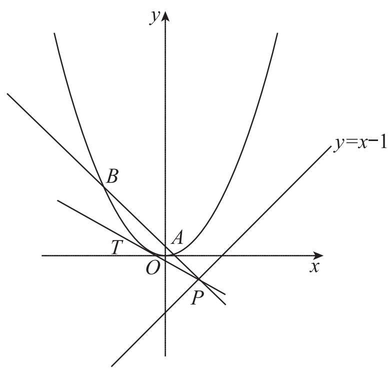


图 1-9

【评注】根据圆锥曲线的性质,数形结合,利用动态变换(取极限)可有效求解此类试题.

变式 1 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的焦点为 F_1,F_2,若点 P 在椭圆上,且满足 $|PO|^2=|PF_1|\,|PF_2|$,(其中 O 为坐标原点),则称点 P 为"※"点,则此椭圆上的"※"点有(　　)个.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

典例四　图像法在线性规划问题中的应用举例

例 6 设二元一次不等式组 $\begin{cases}x+2y-19\geqslant 0\\x-y+8\geqslant 0\\2x+y-14\leqslant 0\end{cases}$ 所表示的平面区域为 M,使函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的图像过区域 M 的 a 的取值范围是(　　).

A. $[1,3]$　　B. $[2,\sqrt{10}]$　　C. $[2,9]$　　D. $[\sqrt{10},9]$

【分析】目标函数中参数的取值范围问题,先画出平面区域,确定最优解,从而求出 a 的范围.

【解析】作出不等式组表示的平面区域 M,如图 1-10 所示,由 $\begin{cases}x+2y-19=0\\2x+y-14=0\end{cases}$,得 $A(3,8)$.由 $\begin{cases}x+2y-19=0\\x-y+8=0\end{cases}$,得 $B(1,9)$.由图知,若 $y=a^x$ 的图像过区域 M,则当 $y=a^x$ 的图像过点 $A(3,8)$,即 $a^3=8$,$a=2$ 时,a 最小;当 $y=a^x$ 的图像过点 $B(1,9)$时,即 $a=9$ 时,a 最大.所以 $2\leqslant a\leqslant 9$.故选 C.

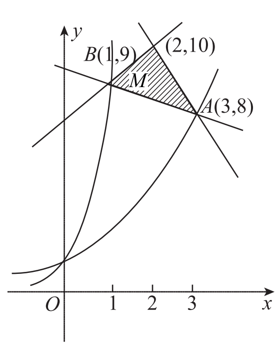


图 1-10

变式 1 设 O 为坐标原点,点 $M(2,1)$,点 $N(x,y)$ 满足不等式组 $\begin{cases}x\leqslant 3\\x-y+6\geqslant 0\\x+y\geqslant 0\end{cases}$,则 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ 的取值范围是________.

强化训练

1. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R},x^2+y^2=1\}$,$B=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R},y=x\}$,则 $A\cap B$ 的元素个数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

2. 函数 $f(x)=2^x+3x$ 的零点所在的一个区间是(　　).

A. $(-2,-1)$　　B. $(-1,0)$
C. $(0,1)$　　D. $(1,2)$

3. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x,x>0\\\log_{\frac{1}{2}}(-x),x<0\end{cases}$,若 $f(a)>f(-a)$,则实数 a 的取值范围是(　　).

A. $(-1,0)\cup(0,1)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$
C. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

4. 下列区间中,函数 $f(x)=|\ln(2-x)|$ 在其上为增函数的区间是(　　).

A. $(-\infty,1]$　　B. $\left[-1,\frac{3}{4}\right]$
C. $\left[0,\frac{3}{2}\right)$　　D. $[1,2)$

5. 在直角坐标系 xOy 中,如果两点 $A(a,b)$,$B(-a,-b)$在函数 $y=f(x)$的图像上,那么称$[A,B]$为函数 $f(x)$的一组关于原点的中心对称点($[A,B]$与$[B,A]$看作一组).函数 $g(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi}{2}x,x\leqslant 0\\\log_4(x+1),x>0\end{cases}$ 关于原点的中心对称点的组数为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是单位向量,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.若向量 $\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$,则 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值为(　　).

A. $\sqrt{2}-1$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{2}+1$　　D. $\sqrt{2}+2$

7. 函数 $y=f(x)$的图像如图 1-11 所示,在区间$[a,b]$上可找到 n $(n\geqslant 2)$个不同的数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,使得 $\frac{f(x_1)}{x_1}=\frac{f(x_2)}{x_2}=\cdots=\frac{f(x_n)}{x_n}$,则 n 的取值范围是(　　).

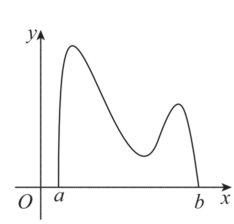


图 1-11

A. $\{2,3\}$　　B. $\{2,3,4\}$　　C. $\{3,4\}$　　D. $\{3,4,5\}$

8. 已知函数 $f(x)=x+2^x$,$g(x)=x+\ln x$,$h(x)=x+\sqrt{x}$ 的零点分别为 x_1,x_2,x_3,则 x_1,x_2,x_3 的大小关系是(　　).

A. $x_1<x_2<x_3$　　B. $x_2<x_1<x_3$

C. $x_1<x_3<x_2$　　D. $x_3<x_2<x_1$

9. 设函数 $f(x)=e^x+x-2$，$g(x)=\ln x+x^2-3$. 若实数 a，b 满足 $f(a)=0$，$g(b)=0$，则(　　).

A. $g(a)<0<f(b)$　　B. $f(b)<0<g(a)$

C. $0<g(a)<f(b)$　　D. $f(b)<g(a)<0$

10. 已知函数 $f(x)=x^2+1$ 的定义域为 $[a,b]$ $(a<b)$，值域为 $[1,5]$，则在平面直角坐标系内，点 (a,b) 的运动轨迹与直角坐标轴围成的图形的面积为(　　).

A. 8　　B. 6　　C. 4　　D. 2

11. 从椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点 P 向 x 轴作垂线，垂足恰为左焦点 F_1，A 是椭圆与 x 轴正半轴的交点，B 是椭圆与 y 轴正半轴的交点，且 $AB/\!/OP$(O 是坐标原点)，则该椭圆的离心率是(　　).

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. 设 A，B 是两个集合，定义集合运算 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B)\}$，若 $M=\{x\mid |x+1|\leqslant 2\}$，$N=\{y\mid y=\sin x, x\in\mathbf{R}\}$，则 $M-N=$________.

13. 函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-|\ln x|$ 的零点个数为________.

14. 若不等式 $\sqrt{4x-x^2}>(a-1)x$ 的解集为 A，且 $A\subseteq\{x\mid 0<x<1\}$，则实数 a 的取值范围为________.

15. 在平面直角坐标系 xOy 中，M 为不等式组 $\begin{cases}2x+3y-6\leqslant 0\\ x+y-2\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$ 所表示的区域上一动点，则 $|OM|$ 的最小值是________.

16. 在直角坐标系 xOy 中，设集合 $\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，在区域 Ω 内任取一点 $P(x,y)$，则满足 $x+y\leqslant 1$ 的概率等于________.

17. 抛物线 $y^2=2x$ 上的动点 A，B 满足 $|AB|=3$，则 AB 中点横坐标的最小值为________.

18. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在非零实数 l 使得对任意 $x\in M(M\subseteq D)$，有 $x+l\in D$，且 $f(x+l)\geqslant f(x)$，则称 $f(x)$ 为 M 上的 l 高调函数. 如果定义域为 $[-1,+\infty)$ 的函数 $f(x)=x^2$ 是 $[-1,+\infty)$ 上的 m 高调函数，那么实数 m 的取值范围是________；如果定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 是奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=|x-a^2|-a^2$，且 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的 4 高调函数，那么实数 a 的取值范围是________.

方法三　构造法

方法概述

在解决某些数学问题时，我们常会采用这样的方法：通过对条件和结论充分细致地分析，抓住问题的本质特征，联想熟知的数学模型，然后变换命题，恰当地构造辅助元素，它可以是一个图形、一个函数、一个方程、一个等价命题等，以此架起一座连接条件和结论的桥梁，从而使问题得以解决，这种解题的数学方法，我们称为构造法.

典例精讲

典例一　构造法在平面向量问题中的应用举例

例 1　圆 $x^2+y^2=1$ 的任意一条切线 l 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点，O 为坐标原点，则 $x_1x_2+y_1y_2=$________.

【分析】由题意知 $x_1x_2+y_1y_2=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，利用向量数量积的几何意义求解本题.

【解析】由 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1x_2+y_1y_2=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，设圆 $x^2+y^2=1$ 的切线 AB 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切于点 C，如图 1-12 所示，易知 $OC=1$，$OA=OB=2$，且 $OC\perp AB$，则 $\angle AOB=\frac{2}{3}\pi$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2\times 2\times\cos\frac{2\pi}{3}=-2$，即 $x_1x_2+y_1y_2=-2$.

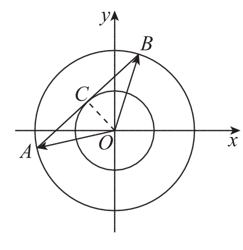


图 1-12

【评注】由圆的性质知 $OC\perp AB$，则点 C 为弦 AB 的中点，向量的数量积 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 也可转化为 $\overrightarrow{OC}$ 和 $\frac{-\overrightarrow{AB}}{2}$ 相关的运算. 即 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA})\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{CB})\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB})=|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{CB}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2-\left|\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right|^2=1^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2=-2$.

变式 1　在 $\triangle ABC$ 中，设 P_0 是边 AB 上一定点，满足 $P_0B=\frac{1}{4}AB$，且对于边 AB 上任意一点 P，恒有 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geqslant\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$，则(　　).

A. $\angle ABC=90°$　　B. $\angle BAC=90°$

C. $AB=AC$　　D. $AC=BC$

典例二　构造法在立体几何问题中的应用举例

例 2　某三棱锥的三视图如图 1-13 所示，则该三棱锥的体积为(　　).

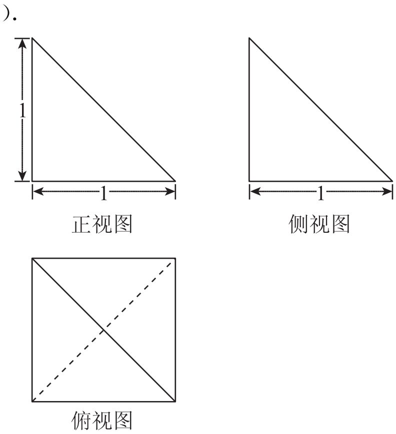


图 1-13

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

【分析】本题直接还原几何体难度较大,故由三视图可构造特殊几何体(正方体)求解本题.

【解析】如图 1-14 所示,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,连接 A_1B,A_1C,A_1D,BD,则三棱锥 A_1-BCD 即为所求,由三视图知正方体的棱长为 1,所以三棱锥的体积为 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1^3=\frac{1}{6}$. 故选 A.

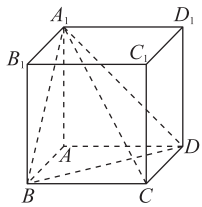
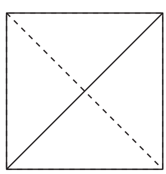


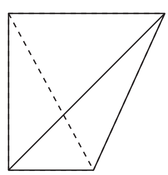
图 1-14

【评注】多面体的三视图可借助特殊的棱柱(长方体)处理.

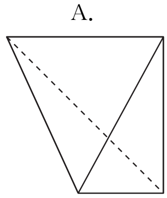
变式 1 一个四面体的顶点在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标分别是(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1),(0,0,0),画该四面体三视图中的正视图时,以 zOx 平面为投影面,则得到的正视图可以为(　　).



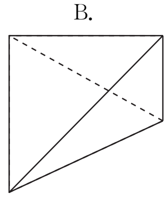
A.



B.



C.



D.

典例三　构造法在线性规划问题中的应用举例

例 3 已知变量 x,y 满足 $\begin{cases}x-2y+4\geqslant0\\x\leqslant2\\x+y-2\geqslant0\end{cases}$,则目标函数 $z=\frac{y+1}{x+2}$ 的取值范围是________.

【分析】构造几何图形由 $z=\frac{y+1}{x+2}$ 知,该目标函数表示可行域内的点 $P(x,y)$ 与定点 $Q(-2,-1)$ 所在直线的斜率.

【解析】如图 1-15 所示的阴影部分为不等式组所表示的区域. 目标函数 $z=\frac{y+1}{x+2}$ 的几何意义是区域内的动点 $P(x,y)$ 与定点 $(-2,-1)$ 所在直线的斜率,由图可知斜率的最大值为 $k_{QA}=\frac{3}{2}$,最小值为 $k_{QB}=\frac{1}{4}$,故目标函数 $z=\frac{y+1}{x+2}$ 的取值范围为 $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right]$.

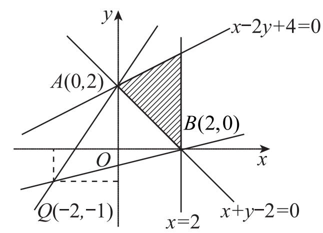


图 1-15

【评注】在求解简单的线性规划问题时,常遇到一些目标函数如截距($z=ax+by$)的形式,斜率($z=\frac{y-b}{x-a}$)的形式,还有距离($z=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$)的形式,解题时需要从目标函数的形式上构造相关的几何模型,从而求解.

变式 1 已知 $P(x,y)$ 的坐标满足 $\begin{cases}\sqrt{3}x-y<0\\x-\sqrt{3}y+2<0\\y\geqslant0\end{cases}$,则 $\frac{\sqrt{3}x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的取值范围为________.

典例四　构造法在函数问题中的应用举例

例 4 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数 $f(x)$,其导函数 $f'(x)$ 满足 $f(x)+x\cdot f'(x)>0$,若 $a>b$,则(　　).

A. $af(b)>bf(a)$　　B. $bf(a)>af(b)$

C. $af(a)>bf(b)$　　D. $bf(b)>af(a)$

【分析】构造函数 $g(x)=xf(x)$,利用函数的单调性比较大小.

【解析】令 $g(x)=xf(x)$,则 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$,因为 $x\in\mathbf{R}$,$f(x)+x\cdot f'(x)>0$,即 $g'(x)>0$,所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,又 $a>b$,则 $g(a)>g(b)$,即 $af(a)>bf(b)$. 故选 C.

【评注】通过挖掘函数的形式,从而构造函数,再利用函数的单调性比较大小,是比较大小的常用方法.

变式 1 设函数 $f(x)$,$g(x)$ 分别是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的奇函数和偶函数,当 $x<0$ 时,$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0$,且 $g(-3)=0$,则不等式 $f(x)g(x)<0$ 的解集是(　　).

A. $(-3,0)\cup(0,3)$　　B. $(-3,0)\cup(3,+\infty)$

C. $(-\infty,-3)\cup(0,3)$　　D. $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$

典例五　构造法在数列问题中的应用举例

例 5 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,已知 $(a_7-1)^3+2012(a_7-1)=1$,$(a_{2006}-1)^3+2012(a_{2006}-1)=-1$,则 $S_{2012}=$________,a_7________a_{2012}(填“>”,“<”或“=”).

【分析】构造函数 $f(x)=x^3+2012x$,$x\in\mathbf{R}$.

【解析】令 $f(x)=x^3+2012x$,$x\in\mathbf{R}$,知函数 $f(x)$ 在区间 $\mathbf{R}$ 上单调递增且为奇函数,由题意知 $f(a_7-1)=1$,$f(a_{2006}-1)=-1$,则 $f(a_7-1)+f(a_{2006}-1)=0$,

得 $a_7-1+a_{2006}-1=0$,即 $a_7+a_{2006}=2$,

则 $S_{2012}=\frac{(a_1+a_{2012})\times2012}{2}=\frac{(a_7+a_{2006})\times2012}{2}=2012$,

且 $f(a_{2006}-1)<f(a_7-1)$,得 $a_7>a_{2006}$,所以等差数列 $\{a_n\}$ 单调递减,故 $a_7>a_{2012}$.

变式 1 设函数 $f(x)=(x-3)^3+x-1$，$\{a_n\}$是公差不为0的等差数列，$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_7)=14$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_7=$(　　).

A. 0　　B. 7　　C. 14　　D. 21

强化训练

1. 若实数 x,y 满足 $\begin{cases}x-y+1\leqslant 0\\x>0\end{cases}$，则$\frac{y}{x}$的取值范围是(　　).

A. $(0,1)$　　B. $(0,1]$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

2. 已知 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{5}$，则 $\sin\left(\alpha+\frac{7\pi}{6}\right)$ 的值为(　　).

A. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C. $-\frac{4}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

3. 已知 $a=\frac{\ln 2}{2}$，$b=\frac{\ln 3}{3}$，$c=\frac{\ln 5}{5}$，则实数 a,b,c 的大小为(　　).

A. $a>b>c$　　B. $c>b>a$　　C. $b>c>a$　　D. $b>a>c$

4. 若 $\alpha,\beta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，且 $\alpha\sin\alpha-\beta\sin\beta>0$，则下列结论正确的是(　　).

A. $\alpha>\beta$　　B. $\alpha+\beta>0$　　C. $\alpha<\beta$　　D. $\alpha^2>\beta^2$

5. 在等腰直角三角形 ABC 中，$AB=AC=4$，点 P 是边 AB 上异于 A,B 的一点，光线从点 P 出发，经 BC,CA 反射后又回到原点 P，如图 1-16 所示. 若光线 QR 经过$\triangle ABC$ 的重心，则 AP 等于(　　).

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{8}{3}$　　D. $\frac{4}{3}$

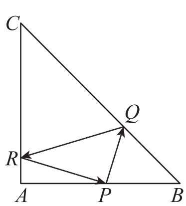


图 1-16

6. 在$\triangle ABC$ 中，M 是 BC 的中点，$AM=3$，$BC=10$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$________.

7. 设 $A,B,C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\sin A-\sin B=\sin C$，$\cos A-\cos B=-\cos C$，则 $A-B=$________.

8. 已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=t\cdot 5^n-2$，则实数 t 的值为________.

9. 正四面体的棱长为 2，四个顶点在同一个球面上，则该球的表面积为________.

10. 函数 $f(x)=6x^3+9x+1$ 满足 $f(a)+f(a-1)>2$，则实数 a 的取值范围是________.

11. 不等式 $x^2-3>ax-a$ 对一切 $3\leqslant x\leqslant 4$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是________.

12. $\sin 20^\circ\cos 70^\circ+\sin 10^\circ\sin 50^\circ=$________.

13. 若 x,y 为实数，且 $4x^2+y^2+xy=1$，则 $2x+y$ 的最大值是________.

14. 已知函数 $f(x)=\frac{3x-2}{2x-1}\left(x\neq\frac{1}{2}\right)$，则 $f\left(\frac{1}{2012}\right)+f\left(\frac{2}{2012}\right)+\cdots+f\left(\frac{2011}{2012}\right)$的值是________.

方法四　特例法

方法概述

所谓特例法，具体来说就是特殊情形：如使用特殊的数值、向量、点、数列、函数、位置、图形来代替一般情形，利用一个问题在某一特殊情况下不真，则它在一般情况下也不真的原理，由此判明选项的真伪，从而达到快速解题的目的. 用特例法解选择题，特例取得越简单、越特殊越好，同时，需要强调一点：利用特例法求解选择题的作用不是“选择”出正确选项，而是“排除”掉错误选项，即特例不成立时，一般性结论也不成立；但特例即便成立，一般性结论也不一定成立！即如果我们使用一次特例无法排除掉全部伪项，这就要求我们选择更多、更好的特例再次加以排除，直到得到正确选项. 用特例法解填空题时，首先要深入分析题设条件，当填空题的结论唯一或题设中提供的信息暗示答案唯一时，就可以把题中变化的不定量用特殊量代替，从而得出正确的结果.

典例精讲

典例一　特殊数列的应用举例

例 1 设 $a_1,a_2,\cdots,a_8$ 为各项都大于零的等差数列，公差 $d\neq 0$，则(　　).

A. $a_1a_8>a_4a_5$　　B. $a_1a_8<a_4a_5$

C. $a_1+a_8>a_4+a_5$　　D. $a_1a_8=a_4a_5$

【分析】本题用特殊数列法，代入各选项中逐一检验，因为对于特殊数列不成立的结论，一般数列也不成立.

【解析】依题意，可取 $a_1=1,a_2=2,\cdots,a_8=8$. $a_1a_8=8$，$a_4a_5=20$，所以 $a_1a_8<a_4a_5$. 故选 B.

【评注】多思少算，特值判断. 这里所谈到的特值不仅限于特殊例求解，还包括特殊角度、特殊函数、特殊数列、特殊位置、特殊图形等.

变式 1 已知等差数列$\{a_n\}$的公差 $d\neq 0$，且 a_1,a_3,a_9 成等比数列，则$\frac{a_1+a_3+a_9}{a_2+a_4+a_{10}}=$________.

典例二　特殊值的应用举例

例 2 若 $0<a_1<a_2$，$0<b_1<b_2$，且 $a_1+a_2=b_1+b_2=1$，则下列代数式中值最大的是(　　).

A. $a_1b_1+a_2b_2$　　B. $a_1a_2+b_1b_2$

C. $a_1b_2+a_2b_1$　　D. $\frac{1}{2}$

【分析】不等式大小的比较，常可利用符合题意的特殊值判断.

【解析】令 $a_1=\frac{1}{3}, a_2=\frac{2}{3}, b_1=\frac{1}{4}, b_2=\frac{3}{4}$，则 $a_1b_1+a_2b_2=\frac{7}{12}$，$a_1a_2+b_1b_2=\frac{2}{9}+\frac{3}{16}=\frac{59}{144}$，$a_1b_2+a_2b_1=\frac{5}{12}$，故 $a_1b_1+a_2b_2$ 最大. 故选 A.

变式 1　设 $a,b\in\mathbf{R}$，定义运算“$\wedge$”和“$\vee$”如下：

$$a\wedge b=\begin{cases}a, a\leqslant b\\ b, a>b\end{cases}, a\vee b=\begin{cases}b, a\leqslant b\\ a, a>b\end{cases}$$

若正数 a,b,c,d 满足 $ab\geqslant 4$，$c+d\leqslant 4$，则（　　）.

A. $a\wedge b\geqslant 2, c\wedge d\leqslant 2$　　B. $a\wedge b\geqslant 2, c\vee d\leqslant 2$

C. $a\vee b\geqslant 2, c\wedge d\leqslant 2$　　D. $a\vee b\geqslant 2, c\vee d\leqslant 2$

典例三　特殊图形的应用举例

例 3　$\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O，$AB=2$，$AC=\sqrt{3}$，则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=$________.

【分析】由向量数量积的几何意义知，$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$，再由圆的垂径定理知，$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}$ 只和 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的模长有关系，和 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 的夹角无关. 故可用特殊三角形求解本题.

【解析】利用特殊图形. 若 $\triangle ABC$ 为直角三角形，且 C 为直角. 则 O 为 AB 的中点，如图 1-17 所示，在直角 $\triangle ABC$ 中，$\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\rangle=\frac{1}{2}$，

则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BA}|\cos B$

$=-\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|^2=-\frac{1}{2}$.

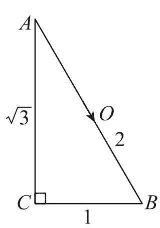


图 1-17

【评注】本题若利用数量积的几何意义（向量投影）理解并求解则更为简捷一些. 在直角三角形 ABC 中，$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2=-\frac{1}{2}$. 下面利用上面的观点（向量投影）一般性求解本题. 如图 1-18 所示，在 $\triangle ABC$ 中，过点 O 作 $OD\perp AB$ 于点 D，过点 O 作 $OE\perp AC$ 于点 E.

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{AC}|-|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AB}|=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}-1\times 2=-\frac{1}{2}$.

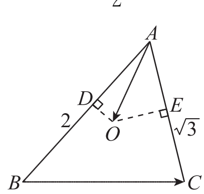


图 1-18

变式 1　如图 1-19 所示，O,A,B 是平面上三点，向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，在平面 AOB 上，P 是线段 AB 垂直平分线上任意一点，向量 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$，且 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=2$，则 $\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ 的值是（　　）.

A. 5　　B. $\frac{5}{2}$　　C. 3　　D. $\frac{3}{2}$

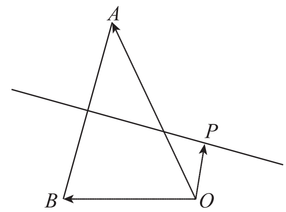


图 1-19

典例四　特殊位置的应用举例

例 4　如图 1-20 所示，在 $\triangle ABC$ 中，点 O 是 BC 的中点，过点 O 的直线分别交直线 AB,AC 于不同的两点 M,N，若 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$，则 $m+n$ 的值为________.

【解析】用特殊位置法. 当 M 点与 B 点重合，N 点与 C 点重合，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}$，且 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AN}$，则 $m+n=2$.

【评注】推演法. 如图 1-21 所示，连接 AO，$\overrightarrow{AO}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=\frac{m}{2}\overrightarrow{AM}+\frac{n}{2}\overrightarrow{AN}$，又 M、O、N 三点共线，则 $\frac{m}{2}+\frac{n}{2}=1$，即 $m+n=2$.

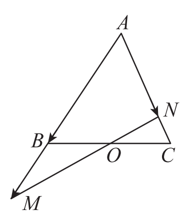


图 1-20

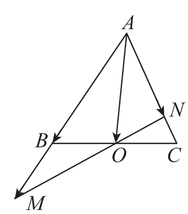


图 1-21

例 5　如图 1-22 所示，抛物线 C_1：$y^2=2px$ 和圆 C_2：$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\frac{p^2}{4}$，其中 $p>0$，直线 l 经过 C_1 的焦点，依次交 C_1,C_2 于 A,B,C,D 四点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ 的值为（　　）.

A. $\frac{p^2}{4}$　　B. $\frac{p^2}{3}$　　C. $\frac{p^2}{2}$　　D. p^2

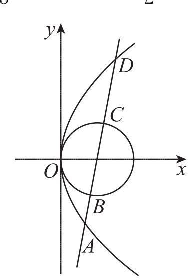


图 1-22

【分析】由选项知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ 的值为定值，故满足一般情形下的定值，亦即特殊位置下也为定值. 本题用特殊位置，即直线 l 垂直于 x 轴进行计算得到 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ 的值.

【解析】若直线 l 垂直于 x 轴，则 $A\left(\frac{p}{2},-p\right)$，$D\left(\frac{p}{2},p\right)$，$B\left(\frac{p}{2},-\frac{p}{2}\right)$，$C\left(\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right)$，则 $\overrightarrow{AB}=\left(0,\frac{p}{2}\right)$，$\overrightarrow{CD}=$

$\left(0,\frac{p}{2}\right)$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{p^2}{4}$. 故选 A.

【评注】 利用特殊位置求解简捷，对“秒杀”选择题起到了事半功倍的作用. 另外，本题中的特例使用还可以更为彻底，如取 $P=2$，同时使用直线 l 垂直于 x 轴，则各个点的坐标及计算更为简捷，此时四个选项变为：A. 1 B. $\frac{4}{3}$ C. 2 D. 4 而 $A(1,-2)$，$B(1,-1)$，$C(1,1)$，$D(1,2)$，则$\overrightarrow{AB}=(0,1)$，$\overrightarrow{CD}=(0,1)$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=1$. 故选 A.

变式 1 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$M$，$N$ 是椭圆的左，右顶点，P 是椭圆上任意一点，且直线 PM，PN 的斜率分别为 k_1，$k_2(k_1k_2\neq0)$，则 $k_1k_2=$________.

强化训练

1. 设函数 $f(x)$和 $g(x)$分别是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数和奇函数，则下列结论恒成立的是（　　）.
   A. $f(x)+|g(x)|$是偶函数
   B. $f(x)-|g(x)|$是奇函数
   C. $|f(x)|+g(x)$是偶函数
   D. $|f(x)|-g(x)$是奇函数

2. 若等比数列的各项均为正数，前 n 项的和为 S，前 n 项的积为 P，前 n 项倒数的和为 M，则有（　　）.
   A. $P=\frac{S}{M}$　　B. $P>\frac{S}{M}$
   C. $P^2=\left(\frac{S}{M}\right)^n$　　D. $P^2>\left(\frac{S}{M}\right)^n$

3. 若 $a>b>1$，$P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$，$Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$，$R=\lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$，则（　　）.
   A. $R<P<Q$　　B. $P<Q<R$
   C. $Q<P<R$　　D. $P<R<Q$

4. 在△ABC 中，C 为钝角，设 $\sin A+\sin B=m$，$\cos A+\cos B=n$，$\sin C=p$，则 m,n,p 的大小关系是（　　）.
   A. $p<n<m$　　B. $n<p<m$
   C. $p<m<n$　　D. $m<p<n$

5. 已知 A,B,C,D 是抛物线 $y^2=8x$ 上的点，F 是抛物线的焦点，且$\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{FD}=\mathbf{0}$，则$|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|+|\overrightarrow{FD}|$的值为（　　）.
   A. 2　　B. 4　　C. 8　　D. 16

6. 如果对于任意实数 x，$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 例如 $[3.27]=3$，$[0.6]=0$，那么“$[x]=[y]$”是“$|x-y|<1$”的（　　）.
   A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件
   C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 设整数 $n\geqslant4$，集合 $X=\{1,2,3,\cdots,n\}$. 令集合 $S=\{(x,y,z)|x,y,z\in X\}$，且三条件 $x<y<z$，$y<z<x$，$z<x<y$ 恰有一个成立，若(x,y,z)和(z,w,x)都在 S 中，则下列选项正确的是（　　）.
   A. $(y,z,w)\in S$，$(x,y,w)\notin S$
   B. $(y,z,w)\in S$，$(x,y,w)\in S$
   C. $(y,z,w)\notin S$，$(x,y,w)\in S$
   D. $(y,z,w)\notin S$，$(x,y,w)\notin S$

8. 已知事件“在矩形 $ABCD$ 的边 CD 上随机取一点 P，使△APB 的最大边是 AB”发生的概率为$\frac{1}{2}$，则$\frac{AD}{AB}=$（　　）.
   A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

9. 设 a,b,c 为实数，$f(x)=(x+a)(x^2+bx+c)$，$g(x)=(ax+1)(cx^2+bx+1)$. 记集合 $S=\{x|f(x)=0,x\in\mathbf{R}\}$，$T=\{x|g(x)=0,x\in\mathbf{R}\}$，若$|S|$，$|T|$分别为集合 S，T 的元素个数，则下列结论不可能的是（　　）.
   A. $|S|=1$ 且 $|T|=0$　　B. $|S|=1$ 且 $|T|=1$
   C. $|S|=2$ 且 $|T|=2$　　D. $|S|=2$ 且 $|T|=3$

10. 已知 a,b,c 为等比数列，b,m,a 和 b,n,c 是两个等差数列，则$\frac{a}{m}+\frac{c}{n}=$________.

11. 若 $\alpha\in\mathbf{R}$，$\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\alpha$ 的值等于________.

12. 已知函数 $f(x)=2\cos^2x+2a\sin x\cos x-1$ 的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{8}$对称，则 $a=$________.

13. 在△ABC 中，如果 $\sin A:\sin B:\sin C=5:6:8$，那么此三角形最小角的余弦值是________.

14. 在三棱锥 $O-ABC$ 中，三条棱 OA,OB,OC 两两垂直，且 $OA>OB>OC$，分别经过三条棱 OA,OB,OC 作一个截面，使其平分三棱锥的体积，截面面积依次为 S_1,S_2,S_3，则 S_1,S_2,S_3 的大小关系为________.

15. 如图 1-23 所示，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，若 E,F 分别为 AB,AC 的中点，平面 EB_1C_1F 将三棱柱分成体积为 V_1,V_2 的两部分$(V_1>V_2)$，那么 $V_1:V_2=$________.

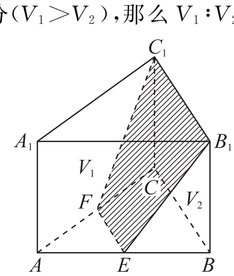


图 1-23

16. (1)若函数 $f(x)=\frac{1}{2^x-1}+a$ 是奇函数，则 $a=$________；
    (2)若函数 $f(x)=\frac{1}{2^x+1}+a$ 是奇函数，则 $a=$________.

17. 函数 $f(x)=M\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$在区间$[a,b]$上是增函数，且 $f(a)=-M$，$f(b)=M$，则给出函数 $g(x)=M\cos(\omega x+\varphi)$在区间$[a,b]$上的以下结论：
    ①是增函数；②是减函数；③可以取得最大值 M；④可以取得最小值$-M$；⑤值域为$[0,M]$. 其中正确结论的序号为________.

18. 函数 $y=f(x)$的定义域为$[-1,0)\cup(0,1]$，其图像上任一点 $P(x,y)$满足 $x^2+y^2=1$.

①函数 $y=f(x)$ 一定是偶函数；
②函数 $y=f(x)$ 可能既不是偶函数，也不是奇函数；
③函数 $y=f(x)$ 可以是奇函数；
④函数 $y=f(x)$ 如果是偶函数，其值域是 $[0,1)$ 或 $(-1,0]$；
⑤函数 $y=f(x)$ 值域是 $(-1,1)$，则一定是奇函数.
其中正确命题的序号是______.（填上所有正确的序号）

方法五　排除法

方法概述

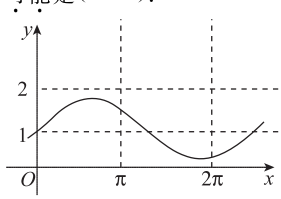
数学选择题的解题本质就是去伪存真，通过对试题的观察、分析，将各选项逐个代入题中进行验证，舍弃不符合题目要求的错误答案，找到符合题意的正确结论.

排除法就是充分运用选择题中单选题的特征——“答案唯一”，即四个选项中有且只有一个答案正确，从选项入手，根据题设条件与各选项的关系，通过分析、推理、计算、判断，对选项进行筛选，将其中与题设相矛盾的干扰项逐一排除，缩小选择的范围，再从其余的结论中求得正确的答案. 排除法的思维路径是：阅读—反射—估算—判断—排除.

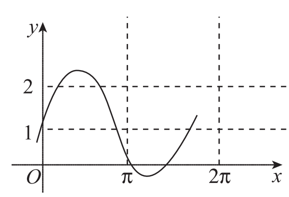
典例精讲

典例一　排除法在函数图像识别问题中的应用举例

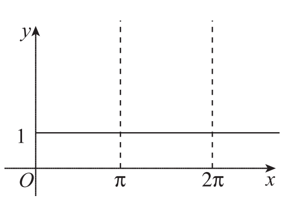
例 1　已知 a 是实数，则函数 $f(x)=1+a\sin ax$ 的图像不可能是（　　）.



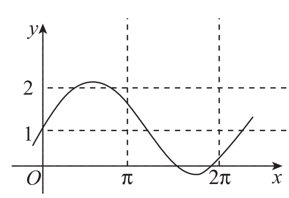
A.



B.



C.



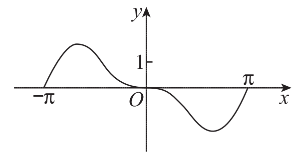
D.

【分析】本题需要我们根据题设逐一对答案进行分析. 因此，采用排除法最为合适.

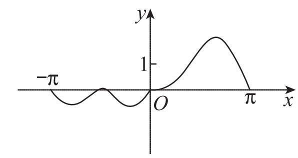
【解析】首先看最为特殊的 C 选项，易知当 $a=0$ 时，C 选项正确，排除 C；再看 A,B,D 之间最大的区别就是振幅与周期. 根据解析式可知，振幅为 $|a|$，周期为 $\dfrac{2\pi}{|a|}$，当 $|a|>1$ 时，$T<2\pi$，或当 $|a|<1$ 时，$T>2\pi$. 故 A,B 选项正确，排除 A,B. 故选 D.

【评注】根据解析式确定函数图像，解决此类问题的关键在于熟悉各类函数的周期及其性质.

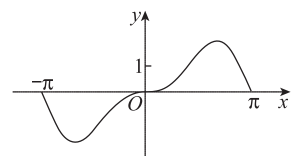
变式 1　函数 $f(x)=(1-\cos x)\sin x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图像大致为（　　）.



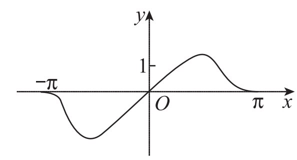
A.



B.



C.



D.

典例二　排除法在解三角方程问题中的应用举例

例 2　已知函数 $f(x)=\sin x, x\in\left(0,\dfrac{5\pi}{2}\right)$，若方程 $f(x)=a$ 有三个不同的实数根，且三个根由小到大依次成等比数列，则 a 的值是（　　）.

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

【分析】将各选项逐个代入题设中进行验证.

【解析】选项 A，将 $a=\dfrac{1}{2}$ 代入 $f(x)=a$ 中得 $x_1=\dfrac{\pi}{6}, x_2=\dfrac{5\pi}{6}, x_3=\dfrac{13\pi}{6}$，不满足 $x_2^2=x_1x_3$，故排除选项 A；选项 B，将 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 代入 $f(x)=a$ 中得 $x_1=\dfrac{\pi}{4}, x_2=\dfrac{3\pi}{4}, x_3=\dfrac{9\pi}{4}$，满足 $x_2^2=x_1x_3$，即三个根 x_1,x_2,x_3 成等比数列；选项 C，将 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 代入 $f(x)=a$ 中得 $x_1=\dfrac{\pi}{3}, x_2=\dfrac{2\pi}{3}, x_3=\dfrac{7\pi}{3}$，不满足 $x_2^2=x_1x_3$，故排除选项 C；选项 D，将 $a=1$ 代入 $f(x)=a$ 中得 $x=\dfrac{\pi}{2}$，在区间 $\left(0,\dfrac{5\pi}{2}\right)$ 上只有一解不满足方程 $f(x)=a$ 有三个不同的实数根，故排除选项 D. 故选 B.

【评注】如图 1-24 所示，函数 $f(x)=\sin x, x\in\left(0,\dfrac{5\pi}{2}\right)$，因为 $\alpha,\pi-\alpha,2\pi+\alpha$ 成等比数列（其中 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$），所以 $(\pi-\alpha)^2=\alpha(2\pi+\alpha)$，解得 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $a=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

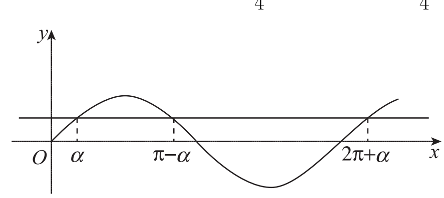


图 1-24

变式 1　若 $\sin\alpha+\cos\alpha=\tan\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\alpha\in$（　　）.

A. $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$　B. $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right)$　C. $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right)$　D. $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$

典例三　排除法在平面向量问题中的应用举例

例 3　设 A_1,A_2,A_3,A_4 是平面直角坐标系中两两不同的四点，若 $\overrightarrow{A_1A_3}=\lambda\overrightarrow{A_1A_2}(\lambda\in\mathbf{R})$，$\overrightarrow{A_1A_4}=\mu\overrightarrow{A_1A_2}(\mu\in\mathbf{R})$，且 $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=2$，则称 A_3,A_4 调和分割 A_1,A_2. 已知平面上的点 C,D 调和分割 A,B，则下面说法正确的是（　　）.

A. C 可能是线段 AB 的中点

B. D 可能是线段 AB 的中点

C. C,D 可能同时在线段 AB 上

D. C,D 不可能同时在线段 AB 的延长线上

【分析】将各选项逐个代入进行验证.

【解析】依题意，若 C,D 调和分割 A,B，则有 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}=\mu\overrightarrow{AB}$，且 $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=2$，若 C 是线段 AB 的中点，则有 $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，此时 $\lambda=\frac{1}{2}$，又 $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=2$，所以 $\frac{1}{\mu}=0$，不可能成立，排除 A；同理选项 B 也排除. 对于选项 C，当 C,D 同时在线段 AB 上时，$0<\lambda<1$，$0<\mu<1$，$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}>2$，与条件 $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=2$ 矛盾，因此选项 C 不正确，故排除 C. 故选 D.

【评注】若 C,D 同时在线段 AB 的延长线上时，$\lambda>1$，$\mu>1$，$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}<2$ 与已知条件 $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=2$ 相矛盾，故 C,D 不可能同时在线段 AB 的延长线上.

典例四　排除法在立体几何问题中的应用举例

例 4　如图 1-25 所示，在多面体 $ABCDEF$ 中，$ABCD$ 是边长为 3 的正方形，$EF\parallel AB$，$EF=\frac{3}{2}$，EF 与面 $ABCD$ 的距离为 2，则该多面体的体积是（　　）.

A. $\frac{9}{2}$　　B. 5　　C. 6　　D. $\frac{15}{2}$

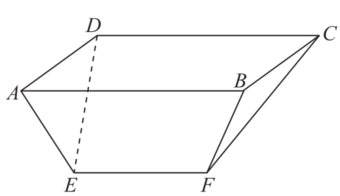


图 1-25

【分析】本题采用排除法求解.

【解析】计算 $V_{F-ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{四边形ABCD}\cdot d(EF,面\ AC)=\frac{1}{3}\times 3^2\times 2=6$，$V_{多面体ABCDEF}>V_{F-ABCD}=6$.

观察 A,B,C,D 四个选项，只有选项 D 满足大于 6. 排除 A,B,C. 故选 D.

【评注】推演法. 如图 1-26 所示，取 AB、CD 的中点 P、Q，连接 FP,FQ,PQ，则 $V_{多面体ABCDEF}=V_{棱柱ADE-PQF}+V_{棱锥F-BCQP}=\frac{1}{2}\times 3\times 2\times\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times 3\times 2=\frac{15}{2}$.

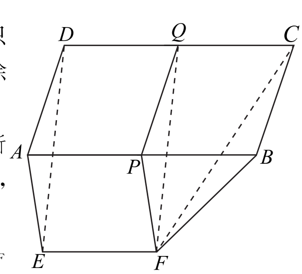


图 1-26

典例五　排除法在函数求值问题中的应用举例

例 5　某校召开学生代表大会，规定各班：每 10 人推选一名代表，当各班人数除以 10 的余数大于 6 时，再增选一名代表，各班可推选的代表人数 y 与该班的人数 x 之间的函数关系用取整函数 $y=[x]$（$[x]$表示不大于 x 的最大整数）可以表示为（　　）.

A. $y=\left[\frac{x}{10}\right]$　　B. $y=\left[\frac{x+3}{10}\right]$

C. $y=\left[\frac{x+4}{10}\right]$　　D. $y=\left[\frac{x+5}{10}\right]$

【解析】记 $y=f(x)$，则 $f(36)=3$，$f(37)=4$，由 $f(36)=3$，排除 C，D；再由 $f(37)=4$，排除 A. 故选 B.

【评注】本题解法也可理解为特例法.

变式 1　设$[x]$表示不大于 x 的最大整数，则对任意实数 x，有（　　）.

A. $[-x]=-[x]$　　B. $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[x]$

C. $[2x]=2[x]$　　D. $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$

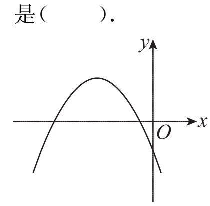
强化训练

1. 下列函数中，既是偶函数又在$(0,+\infty)$上单调递增的函数是（　　）.

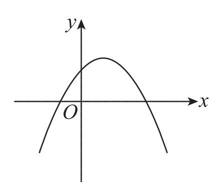
A. $y=x^3$　　B. $y=|x|+1$

C. $y=-x^2+1$　　D. $y=2^{-|x|}$

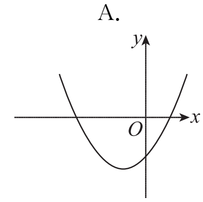
2. 设 $abc>0$，二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图像可能是（　　）.



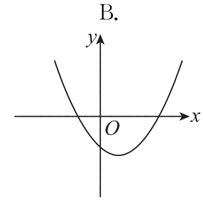
A.



B.



C.



D.

3. 对于函数 $f(x)=a\sin x+bx+c$（其中 $a,b\in\mathbf{R}$，$c\in\mathbf{Z}$），选取 a,b,c 的一组值计算 $f(1)$和 $f(-1)$，所得出的正确结果一定不可能是（　　）.

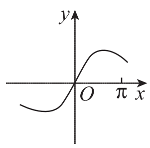
A. 4 和 6　　B. 3 和 1　　C. 2 和 4　　D. 1 和 2

4. 给出下列三个等式：$f(xy)=f(x)+f(y)$，$f(x+y)=f(x)f(y)$，$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$. 下列函数中不满足其中任何一个等式的是（　　）.

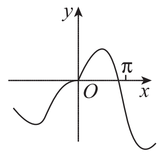
A. $f(x)=3^x$　　B. $f(x)=\sin x$

C. $f(x)=\log_2 x$　　D. $f(x)=\tan x$

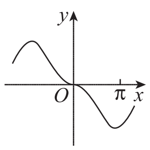
5. 函数 $f(x)=x\cos x+\sin x$ 的图像大致为(　　).



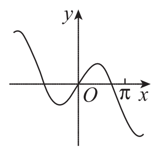
A.



B.

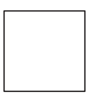


C.

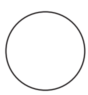


D.

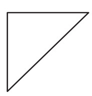
6. 某几何体的正视图与侧视图都是边长为 1 的正方形,且体积为 $\frac{1}{2}$,则该几何体的俯视图可以是(　　).



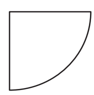
A.



B.



C.



D.

7. 若直线 $y=kx+2$ 与双曲线 $x^2-y^2=6$ 的右支交于不同的两点,则 k 的取值范围是(　　).

A. $\left(-\frac{\sqrt{15}}{3},\frac{\sqrt{15}}{3}\right)$　　B. $\left(0,\frac{\sqrt{15}}{3}\right)$

C. $\left(-\frac{\sqrt{15}}{3},0\right)$　　D. $\left(-\frac{\sqrt{15}}{3},-1\right)$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x, x\leqslant 0\\ \ln(x+1), x>0\end{cases}$,若 $|f(x)|\geqslant ax$,则 a 的取值范围是(　　).

A. $(-\infty,0]$　B. $(-\infty,1]$　C. $[-2,1]$　D. $[-2,0]$

9. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点,作直线与此抛物线相交于两点 P 和 Q,那么线段 PQ 中点的轨迹方程是(　　).

A. $y^2=2x-1$　　B. $y^2=2x-2$

C. $y^2=-2x+1$　　D. $y^2=-2x+2$

10. 已知函数 $f(x)=2mx^2-2(4-m)x+1$,$g(x)=mx$,若对于任意实数 x,$f(x)$ 与 $g(x)$ 至少有一个为正数,则实数 m 的取值范围是(　　).

A. $(0,2)$　B. $(0,8)$　C. $(2,8)$　D. $(-\infty,0)$

11. 已知函数的图像如图 1-27 所示,则其函数解析式可能是(　　).

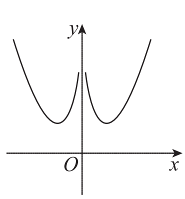


图 1-27

A. $f(x)=x^2+\ln|x|$　　B. $f(x)=x^2-\ln|x|$

C. $f(x)=x+\ln|x|$　　D. $f(x)=x-\ln|x|$

12. 如图 1-28 所示,当参数 λ 分别取 λ_1,λ_2 时,连续函数 $y=\frac{x}{\sqrt{1+\lambda x}}(x\geqslant 0)$ 的图像分别对应曲线 C_1 和 C_2,则(　　).

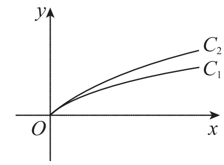


图 1-28

A. $0<\lambda_1<\lambda_2$　　B. $0<\lambda_2<\lambda_1$

C. $\lambda_1<\lambda_2<0$　　D. $\lambda_2<\lambda_1<0$

13. 在下列四个函数中,满足性质"对于区间 $(1,2)$ 上的任意 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$. $|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|$ 恒成立"的只有(　　).

A. $f(x)=\frac{1}{x}$　　B. $f(x)=|x|$

C. $f(x)=2^x$　　D. $f(x)=x^2$

14. 若长度为定值的线段 AB 的两端点分别在 x 轴正半轴和 y 轴正半轴上移动,O 为坐标原点,则 $\triangle OAB$ 的重心、内心、外心、垂心的轨迹不可能是(　　).

A. 点　　B. 线段

C. 圆弧　　D. 抛物线的一部分

15. 已知点 $P(3,-4)$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 渐近线上的一点,E,F 是左,右两个焦点,若 $\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{FP}=0$,则双曲线方程为(　　).

A. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$　　B. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$

C. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$　　D. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

16. 已知两点 $M\left(1,\frac{5}{4}\right)$,$N\left(-4,-\frac{5}{4}\right)$,给出下列曲线方程:①$4x+2y-1=0$;②$x^2+y^2=3$;③$\frac{x^2}{2}+y^2=1$;④$\frac{x^2}{2}-y^2=1$. 在曲线上存在点 P 满足 $|MP|=|NP|$ 的所有曲线方程是(　　).

A. ①③　B. ②④　C. ①②③　D. ②③④

方法六　信息迁移法

方法概述

所谓信息迁移法,是根据题目给出的信息(可能是已经学过的知识,也可能是没有学过的知识),联系教科书中的基本原理或方法,通过分析、转化,概括出二者之间在本质上存在的共同因素,进行知识的迁移,从而使问题得以解决的一种解题方法.

典例精讲

典例一　信息迁移法在映射创新题中的应用举例

例 1　设 V 是全体平面向量构成的集合,若映射 $f:V\rightarrow \mathbf{R}$ 满足:对任意向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)\in V$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)\in V$,以及

任意 $\lambda\in\mathbf{R}$,均有 $f(\lambda\boldsymbol{a}+(1-\lambda)\boldsymbol{b})=\lambda f(\boldsymbol{a})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{b})$.则称映射 f 具有性质 P.先给出如下映射:

①$f_1:V\to\mathbf{R}, f_1(\boldsymbol{m})=x-y, \boldsymbol{m}=(x,y)\in V$;

②$f_2:V\to\mathbf{R}, f_2(\boldsymbol{m})=x^2+y, \boldsymbol{m}=(x,y)\in V$;

③$f_3:V\to\mathbf{R}, f_3(\boldsymbol{m})=x+y+1, \boldsymbol{m}=(x,y)\in V$.

其中,具有性质 P 的映射的序号为________.(写出所有具有性质 P 的映射的序号)

【解析】①:$f_1(\boldsymbol{m})=x-y$, $f_1(\lambda\boldsymbol{a}+(1-\lambda)\boldsymbol{b})=f_1(\lambda(x_1,y_1)+(1-\lambda)(x_2,y_2))=f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)=\lambda(x_1-y_1)+(1-\lambda)(x_2-y_2)=\lambda f(\boldsymbol{a})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{b})$,具有性质 P 的映射.

同理③:$f_3(\boldsymbol{m})=x+y+1$, $f_3(\lambda\boldsymbol{a}+(1-\lambda)\boldsymbol{b})=f_3(\lambda(x_1,y_1)+(1-\lambda)(x_2,y_2))=f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)=\lambda(x_1+y_1)+(1-\lambda)(x_2+y_2)+1=\lambda(x_1+y_1+1)+(1-\lambda)(x_2+y_2+1)=\lambda f(\boldsymbol{a})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{b})$,具有性质 P 的映射.②不符合.综上,填①③.

【评注】本题所给的新概念为"具有性质 P",也就是判断是否满足条件 $f(\lambda\boldsymbol{a}+(1-\lambda)\boldsymbol{b})=\lambda f(\boldsymbol{a})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{b})$,代入 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 坐标进行验证即可.

变式1 设 S,T 是 $\mathbf{R}$ 的两个非空子集,如果存在一个从 S 到 T 的函数 $y=f(x)$ 满足:

(ⅰ)$T=\{f(x)\mid x\in S\}$;(ⅱ)对任意 $x_1,x_2\in S$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,那么称这两个集合"保序同构",现给出以下3对集合:

①$A=\mathbf{N}, B=\mathbf{N}^*$;

②$A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}, B=\{x\mid -8\leqslant x\leqslant 10\}$;

③$A=\{x\mid 0<x<1\}, B=\mathbf{R}$.

其中,"保序同构"的集合对的序号是________.(写出所有"保序同构"的集合对的序号)

典例二 信息迁移法在函数创新题中的应用举例

例2 已知函数 $f(x)=1+x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots+\dfrac{x^{2013}}{2013}$,设 $g(x)=f(x+4)$,且函数 $g(x)$ 的零点均在区间 $[a,b]$ $(a<b,a,b\in\mathbf{Z})$ 内,圆 $x^2+y^2=b-a$ 的面积的最小值是( ).

A. π B. 2π C. 3π D. 4π

【分析】本题解题的关键在于确定函数 $f(x)$ 的零点所在区间.

【解析】令 $f'(x)=1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{2012}(x\in\mathbf{R})$.当 $x=0$ 时,$f'(x)=1>0$;当 $x<0$ 时,$f'(x)>0$;当 $x=1$ 时,$f'(x)=1>0$;当 $x>0$ 且 $x\neq1$ 时,$f'(x)=\dfrac{1+x^{2013}}{1+x}$,$f'(x)>0$.综上,$f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒为正,故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.又 $f(0)=1>0$, $f(-1)=1-1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}-\cdots-\dfrac{1}{2013}=-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2013}\right)<0$.故 $f(x)$ 的零点 $x_0\in[-1,0]$,所以 $g(x)=f(x+4)$ 的零点 $x_0-4\in[-5,-4]$.依题意得 $[-5,-4]\subseteq[a,b]$,即当 $b=-4,a=-5$ 时,$b-a$ 取最小值为1.所以圆 $x^2+y^2=1$,其面积为 π.故选A.

【评注】利用求导解决本题的单调性是亮点之一.

变式1 若以曲线 $y=f(x)$ 上任意一点 $M(x,y)$ 为切点作切线 l,曲线上总存在异于 M 的点 $N(x_1,y_1)$,以点 N 为切点作切线 l_1,且 $l\parallel l_1$,则称曲线 $y=f(x)$ 具有"可平行性",下列曲线具有"可平行性"的编号为________.

①$y=x^3-x$ ②$y=x+\dfrac{1}{x}$

③$y=\sin x$ ④$y=(x-2)^2+\ln x$

典例三 信息迁移法在平面向量创新题中的应用举例

例3 给定模长为1的平面向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$,它们的夹角为 $120°$.如图1-29所示,点 C 在以 O 为圆心的圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上变动,若 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$,其中 $x,y\in\mathbf{R}$,则 $x+y$ 的最大值是________.

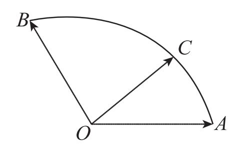


图1-29

【解析】如图1-30所示,连接 AB 交 OC 于点 D,由 A,B,D 三点共线,则 $\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}$,且 $0<\lambda<1$.

设 $\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OD}$,故 $\overrightarrow{OC}=k[\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}]=\lambda k\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)k\overrightarrow{OB}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$,则 $x+y=k$,要求 $x+y$ 的最大值即求 k 的最大值.$k=\dfrac{|\overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{OD}|}=\dfrac{1}{|\overrightarrow{OD}|}$,当 $OC\perp AB$ 时,则 $|\overrightarrow{OD}|_{\min}=\dfrac{|\overrightarrow{OA}|}{2}=\dfrac{1}{2}$,故 $k_{\max}=2$,因此 $x+y$ 的最大值为2.

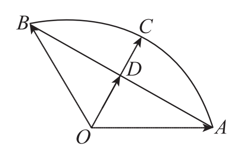


图1-30

变式1 已知扇形 AOB,中心角为 $60°$,点 C 为弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上一动点,且满足 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$,其中 $x,y\in\mathbf{R}$,如图1-31所示,则 $x+3y$ 的取值范围是________.

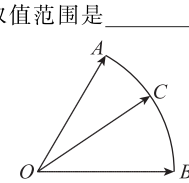


图1-31

典例四 信息迁移法在解析几何创新题中的应用举例

例4 已知点 $A(0,2)$, $B(2,0)$,若点 C 在函数 $y=x^2$ 的图像上,则使得 $\triangle ABC$ 的面积为2的点 C 的个数为( ).

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

【解析】假设存在符合题意的点 C,过 C 作 AB 的平行线 l,因为 $k_{AB}=-1$,则可设 $l:y=-x+m$,又 $l_{AB}:y=-x+2$,则两直线间的距离为 $d=\dfrac{|m-2|}{\sqrt{2}}$,又 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d$

$=2$,所以 $d=\sqrt{2}$,故 $|m-2|=2$,解得 $m=0$ 或 $m=4$,如图 1-32 所示,易知 $l:y=-x$ 与 $y=-x+4$ 分别与抛物线 $y=x^2$ 各有两个交点,综上,$y=x^2$ 上有 4 个点 C.
故选 A.

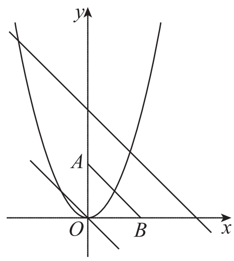


图 1-32

变式 1 已知抛物线 $W:y^2=x$ 及直线 $m:y=x-4$,矩形 $ABCD$ 的顶点 A,B 在 m 上,CD 在 W 上,经过 CD 的直线记为 l,给出下列四个命题:
①$\exists S>0$,使矩形 $ABCD$ 的面积为 S 的直线 l 不存在;
②$\exists S>0$,使矩形 $ABCD$ 的面积为 S 的直线 l 只有一条;
③$\exists S>0$,使矩形 $ABCD$ 的面积为 S 的直线 l 仅有两条;
④$\exists S>0$,使矩形 $ABCD$ 的面积为 S 的直线 l 仅有三条.
其中所有真命题的序号是(　　).
A. ①②④　　B. ②③　　C. ③④　　D②③④

强化训练

1. 若函数 $f(x)=-x\cdot e^x$,则下列命题正确的是________.
① $\forall a\in\left(-\infty,\dfrac{1}{e}\right)$,$\exists x_0\in\mathbf{R}$,使得 $f(x_0)>a$;
② $\forall a\in\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$,$\exists x_0\in\mathbf{R}$,使得 $f(x_0)>a$;
③ $\forall x\in\mathbf{R}$,$\exists a\in\left(-\infty,\dfrac{1}{e}\right)$,都有 $f(x)>a$;
④ $\forall x\in\mathbf{R}$,$\exists a\in\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$,都有 $f(x)>a$.

2. 给出下列命题:
①若"$\sin\alpha-\tan\alpha>0$"则"α 是第二或第四象限角";
②平面直角坐标系中有三个点 $A(4,5)$,$B(-2,2)$,$C(2,0)$,则 $\tan\angle ABC=\dfrac{4}{3}$;
③若 $a>1$,$b>1$ 且 $\lg(a+b)=\lg a+\lg b$,则 $\lg(a-1)+\lg(b-1)$ 的值为 1;
④设$[m]$表示不大于 m 的最大整数,若 $x,y\in\mathbf{R}$,那么 $[x+y]\geqslant[x]+[y]$.
其中,所有正确命题的序号是________.

3. 已知定义域为$(0,+\infty)$的函数 $f(x)$满足:(ⅰ)对任意 $x\in(0,+\infty)$,恒有 $f(2x)=2f(x)$成立;(ⅱ)当 $x\in(1,2]$时,$f(x)=2-x$. 给出如下结论:
①对任意 $m\in\mathbf{Z}$,有 $f(2^m)=0$;②函数 $f(x)$的值域为$[0,+\infty)$;③存在 $n\in\mathbf{Z}$,使得 $f(2^n+1)=9$;④"函数 $f(x)$在区间(a,b)上单调递减"的充要条件是"存在 $k\in\mathbf{Z}$,使得$(a,b)\subseteq(2^k,2^{k+1})$".
其中所有正确结论的序号是________.

4. 设非空集合 $S=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$满足:当 $x\in S$ 时,有 $x^2\in S$. 给出如下命题:①若 $a=1$,则 $S=\{1\}$;②若 $a=-\dfrac{1}{2}$,则$\dfrac{1}{4}\leqslant b\leqslant 1$;③若 $b=\dfrac{1}{2}$,则$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant a\leqslant 0$.
其中正确的命题序号是________.

5. 若两个函数的图像经过若干次平移后能够重合,则称这两个函数为"同形"函数,给出下列三个函数:①$f_1(x)=\sin x+\cos x$;②$f_2(x)=\sqrt{2}\sin x+\sqrt{2}$;③$f_3(x)=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$.其中与函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin x$ 为"同形"函数的是________.(填写你认为正确的所有结论的序号)

6. 函数 $f(x)$和 $g(x)$的定义域为$[a,b]$,若对任意的 $x\in[a,b]$,总有$\left|1-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right|\leqslant\dfrac{1}{10}$,则称 $f(x)$可被 $g(x)$"置换".下列函数中,能置换函数 $f(x)=\sqrt{x}$,$x\in[4,16]$的有________.
①$g(x)=\dfrac{1}{5}(x+6)$,$x\in[4,16]$;
②$g(x)=x^2+6$,$x\in[4,16]$;
③$g(x)=x+6$,$x\in[4,16]$;
④$g(x)=2x+6$,$x\in[4,16]$.

7. 如果对任意一个三角形,只要它的三边长 a,b,c 都在函数 $f(x)$的定义域内,就有 $f(a)$,$f(b)$,$f(c)$也是某个三角形的三边长,则称 $f(x)$为"保三角形函数".则下列函数是"保三角形函数"的有________.
①$f(x)=2x$;②$f(x)=\sqrt{x}$;③$f(x)=x^2$;
④$f(x)=\sin x(x\in(0,\pi))$.

8. 记函数$[x]$叫做取整函数(也称高斯函数),表示不超过 x 的最大整数,例如$[2]=2$,$[3.3]=3$,$[-2.4]=-3$,设函数 $f(x)=\dfrac{2^x}{1+2^x}-\dfrac{1}{2}$,则函数 $y=[f(x)]+[f(-x)]$的值域为________.

9. 给出定义:若 $m-\dfrac{1}{2}<x\leqslant m+\dfrac{1}{2}$(其中 m 为整数),则 m 叫做离实数 x 最近的整数,记作$\{x\}$,即$\{x\}=m$.在此基础上给出下列关于函数 $f(x)=|x-\{x\}|$的四个命题:①$y=f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,值域是$\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$;②$y=f(x)$的图像关于直线 $x=\dfrac{k}{2}(k\in\mathbf{Z})$对称;③函数 $y=f(x)$是周期函数,最小正周期是 1;④函数 $y=f(x)$在$\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$上是增函数.则其中真命题是________.

10. 在平面直角坐标系中,定义 $d(P,Q)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$为两点 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$之间的"折线距离",则坐标原点 O 与直线 $2x+y-2\sqrt{5}=0$ 上一点的"折线距离"的最小值是________;圆 $x^2+y^2=1$ 上一点与直线 $2x+y-2\sqrt{5}=0$ 上一点的"折线距离"的最小值是________.

11. 已知函数 $f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}$,则 $f(0)+f(1)=$________,若 $S_{k-1}=f\left(\dfrac{1}{k}\right)+f\left(\dfrac{2}{k}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{k-1}{k}\right)(k\geqslant2,k\in\mathbf{Z})$,则

$S_{k-1}=$________.

12.已知数列$\{a_n\}$的各项均为正整数,对于$n=1,2,3,\cdots$,

有$a_{n+1}=\begin{cases}3a_n+5,a_n\text{ 为奇数}\\ \dfrac{a_n}{2^k},a_n\text{ 为偶数.}(k\text{ 为使 }a_{n+1}\text{ 为奇数的正整数})\end{cases}$.

(1)当$a_1=11$时,$a_{100}=$________;

(2)若存在$m\in\mathbf{N}^*$,当$n>m$且a_n为奇数时,a_n恒为常数p,则p的值为________.

13.设变量x,y满足约束条件$\begin{cases}y-1\geqslant 0\\ x+y-4\leqslant 0\\ y-1\leqslant k(x-1)\end{cases}$,其中$k\in\mathbf{R}$,$k>0$.

(1)当$k=1$时,$\dfrac{y}{x^2}$的最大值为________;

(2)若$\dfrac{y}{x^2}$的最大值为1,则实数k的取值范围是________.