

第一篇 回归基础、查漏补缺

2014 年高考复习正在紧张进行中,为了帮助大家做好基础知识的再回顾工作,我们按照教材内容的顺序,以问题加跟进练习的形式将整个高中阶段的数学内容串联,在临近高考时为高三学生提供一次知识的梳理,以帮助同学们对高考数学复习查漏补缺.

第一章 集合



知识点与方法

- 子集、交集、并集三者之间的关系: $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
- 或、且、非($\vee, \wedge, \neg$)的真假性判断;全称命题与特称命题的否定.
(1) $\vee$ 命题:一真则真,全假才假; $\wedge$ 命题:一假则假,全真才真; $\neg p$ 与 p 的真假性相反.
(2) 全称命题与特称命题互为否定.
- 四种命题及其关系中要注意原命题与逆否命题同真假,充要条件判定时首先分清条件与结论,再进行推理.



查漏补缺

- 集合中元素“必须具备的性质特征”(特别是互异性)

例 1 集合 $A = \{a, b, c\}$ 中的三个元素分别表示某一个三角形的三边长度,那么这个三角形一定不是().

- A. 等腰三角形 B. 锐角三角形 C. 直角三角形 D. 钝角三角形

变式 1 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$, 则集合 $B = \{z | z = x - y, x \in A, y \in A\}$ 中元素的个数是().

- A. 1 B. 3 C. 5 D. 9

- 集合中元素的属性

例 2 集合 $P = \{x \in \mathbf{Z} | 0 \leq x < 3\}$, $M = \{x \in \mathbf{R} | x^2 \leq 9\}$, 则 $P \cap M = ()$.

- A. $\{1, 2\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{x | 0 \leq x < 3\}$ D. $\{0, 1, 2, 3\}$

变式 1 设全集 $I = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\}$, 集合 $M = \left\{(x, y) \left| \frac{y-3}{x-2} = 1 \right.\right\}$, $N = \{(x, y) | y \neq x+1\}$, 那么 $(\complement_I M) \cap (\complement_I N) = ()$.

- A. $\emptyset$ B. $\{(2, 3)\}$ C. $(2, 3)$ D. $\{(x, y) | y = x+1\}$

- 空集:对任意集合 A 有: $\emptyset \subseteq A, \emptyset \cap A = \emptyset, \emptyset \cup A = A$. 当一个集合中元素的个数不确定时,应想到空集

例 3 设 $A = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}$, $B = \{x | mx + 1 = 0\}$, 且 $A \cup B = A$, 则实数 m 的取值范围是_____.

变式 1 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x - 10 \leq 0\}$, $B = \{x | p+1 \leq x \leq 2p-1\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 p 的取值范围.

4. 在由不等式构成集合或抽象集合的子集、交集、并集、补集的问题中,常采用画数轴或 Venn 图的方法处理. 运用数形结合的思想解题,往往会化抽象为具体,化复杂为简单,将集合的交、并、补的关系直观、形象地表示而有利于运算

例 4 设集合 $S = \{x \mid |x-2| > 3\}$, $T = \{x \mid a < x < a+8\}$, $S \cup T = \mathbf{R}$, 则 a 的取值范围是().

- A. $(-3, -1)$ B. $[-3, -1]$
C. $(-\infty, -3] \cup [-1, +\infty)$ D. $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$

变式 1 已知全集 U , $A \subseteq B$, 那么下列结论中可能不成立的是().

- A. $A \cap B = A$ B. $A \cup B = B$ C. $(\complement_U A) \cap B \neq \emptyset$ D. $(\complement_U B) \cap A = \emptyset$

变式 2 如图 1-1 所示, I 是全集, A, B, C 是 I 的子集, 则阴影部分表示的集合是().

- A. $(A \cap B) \cap C$ B. $(A \cap \complement_I B) \cap C$ C. $(A \cap B) \cap (\complement_I C)$ D. $(\complement_I B) \cup A \cap C$

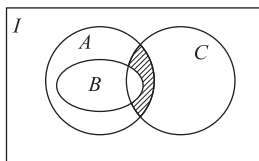


图 1-1

变式 3 如图 1-2 所示, I 是全集, A, B, C 是 I 的子集, 分别表示下列各图中阴影部分的集合.

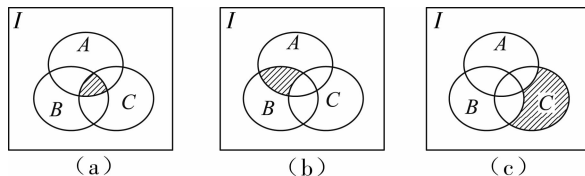


图 1-2

5. 求满足某个条件下的参数时,有时所求的参数并不满足该条件,原因是求解时,只用条件的局部,这就需要对所求参数代回条件进行检验

例 5 已知集合 $A = \{a^2, a+1, -3\}$, $B = \{a-3, 2a-1, a^2+1\}$, 若 $A \cap B = \{-3\}$, 求 a 的值.

变式 1 已知集合 $A = \{1, 3, \sqrt{m}\}$, $B = \{1, m\}$, 若 $A \cup B = A$, 则 $m = ()$.

- A. 0 或 $\sqrt{3}$ B. 0 或 3 C. 1 或 $\sqrt{3}$ D. 1 或 3

6. 充分必要条件的考查在高考中通常作为载体来考查相关知识的逻辑关系

例 6 在 $\triangle ABC$ 中, “ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} > 0$ ”是“ $\triangle ABC$ 是钝角三角形”的().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

变式 1 设 a, b 为向量, 则“ $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ ”是“ $a \parallel b$ ”的().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 含简单逻辑联结词的命题的真值表

例 7 已知命题 p : 所有有理数都是实数; 命题 q : 正数的对数都是负数, 则下列命题为真命题的是().

- A. $(\neg p) \vee q$ B. $p \wedge q$ C. $(\neg p) \wedge (\neg q)$ D. $(\neg p) \vee (\neg q)$

变式 1 在一次跳伞训练中, 甲、乙两位学员各跳一次, 设命题 p 是“甲降落在指定范围”, 命题 q 是“乙降落在指定范围”, 则命题“至少有一位学员没有降落在指定范围”可表示为().

- A. $(\neg p) \vee (\neg q)$ B. $p \vee (\neg q)$ C. $(\neg p) \wedge (\neg q)$ D. $p \vee q$

第二章 函数概念与基本初等函数



知识点与方法

1. 函数解析式的求法主要有换元法和待定系数法等. 利用函数的解析式研究问题时要特别注意分析自变量 x 与函数值 y 的关系, 尤其要注意分段函数各段的自变量所对应的解析式.

已知函数解析式, 计算有限个函数值的和. 此类问题一般都具有明显的规律, 或者函数具有周期性, 或者函数具有对称性(自变量具有某种关系, 其函数值和为定值). 如 $f(x) = \frac{4^x}{2+4^x}$, 求 $f(\frac{1}{2015}) + f(\frac{2}{2015}) + \cdots + f(\frac{2014}{2015})$ 的值(这里 $f(x) + f(1-x) = \frac{1}{2}$).

2. 确定函数定义域的基本原则.

(1) 分式函数 $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ 中, 满足分母 $g(x) \neq 0$.

(2) 偶次根式 $y = \sqrt[n]{f(x)}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 中, 满足被开方式 $f(x) \geq 0$.

(3) 对数函数 $y = \log_{f(x)} g(x)$ 中, 满足 $\begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$ 且 $f(x) \neq 1$.

(4) 幂函数 $y = [f(x)]^0$ 中, 满足 $f(x) \neq 0$.

(5) 正切函数 $y = \tan x$ 中, 满足 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$).

(6) 在实际问题中考虑自变量的实际意义.

3. 函数值域(最值)的求法.

(1) 二次型函数——配方法.

(2) 双曲函数——均值不等式法.

(3) 利用换元法转化为二次型函数或双曲函数.

(4) 函数单调性法.

(5) 导数法.

对于不等式恒成立、存在性问题也要通过求函数最值的方法去解决.

4. 判断函数单调性的方法.

(1) 定义法: 一般地, 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 A , 区间 $M \subseteq A$, $\forall x_1, x_2 \in M$,

$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow f(x)$ 在区间 M 上是增函数; 若 $f(x)$ 在区间 M

上为增函数, $x_1, x_2 \in M$, 则有 $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, 减函数有类似结论(注意: 在涉及不等式的求解、证明等有关问题时可以考虑构造函数, 利用函数单调性求解).

(2)用已知函数单调性判断(下列函数都在公共单调区间上):

- ①增函数+增函数=增函数;
- ②减函数+减函数=减函数;
- ③复合函数单调性;
- ④奇(偶)函数在对称区间上的单调性相同(相反).

(3)借助图像判断函数单调性.

(4)导数法:对可导函数 $f(x)$, $x \in (a, b)$, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 (a, b) 上是增函数; $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 (a, b) 上是减函数(其中导致导数为 0 的点是孤立的).

5. 函数的奇偶性.

(1)判定函数奇偶性的方法:函数具有奇偶性的必要条件是定义域为关于原点对称的区间.

判断函数奇偶性首先确定函数定义域.

①定义法: $\forall x \in D_f, -x \in D_f$, 且 $f(x) \pm f(-x) = 0$;

②用已知函数奇偶性判定(下列函数都在公共定义域内):

(i)奇函数 $\pm$ 奇函数=奇函数;偶函数 $\pm$ 偶函数=偶函数;奇函数 $\pm$ 偶函数=非奇非偶(非零函数)函数;

奇函数 $\times$ 偶函数=奇函数;奇函数 $\times$ 奇函数=偶函数;偶函数 $\times$ 偶函数=偶函数.

(ii)复合函数奇偶性,内偶则偶,两奇为奇.

③借助图像确定奇偶性.

(2)奇偶函数的性质.

①定义域含 0 的奇函数图像必过原点;

②奇函数若存在最大值和最小值,则它们的和为 0;

③ $f(x)$ 是偶函数,则有 $f(-x) = f(x) = f(|x|)$;

④既奇又偶的函数的解析式必为 $f(x) = 0$;

⑤对于奇(偶)函数,已知 y 轴一侧的图像、解析式、单调性,能够确定出 y 轴另一侧的图像、解析式、单调性.题目中出现 x 与 $-x$ 的函数值问题,需考虑函数的奇偶性.

(3)奇偶函数性质推广(对称性问题).

已知函数 $f(x)$, $x \in D$.

①满足 $f(a+x) = f(b-x) \Leftrightarrow f(x)$ 关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称,

特别地, $f(-x) = f(x) \Leftrightarrow f(x)$ 关于 y 轴对称;

②满足 $f(a+x) = -f(b-x) \Leftrightarrow f(x)$ 关于点 $(\frac{a+b}{2}, 0)$ 对称,

特别地, $f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow f(x)$ 关于原点 $(0, 0)$ 中心对称;

③函数 $y = f(x)$ 与 $y = f(-x)$ 的图像关于 y 轴对称;

④函数 $y = f(x)$ 与 $y = -f(x)$ 的图像关于 x 轴对称;

⑤函数 $y = f(a+x)$ 与 $y = f(b-x)$ 的图像关于 $x = \frac{b-a}{2}$ 对称.

6. 函数的周期性.

(1)已知函数 $y = f(x)$, $x \in D$, 若对任意 $x \in D$, 存在非零正常数 T , 满足:

① $f(x+T) = f(x)$, 周期为 T ;

② $f(x+T) = -f(x)$, 周期为 $2T$; $f(x+T) + f(x) = c$, 周期为 $2T$;

③ $f(x+T) = \pm \frac{1}{f(x)}$, 周期为 $2T$; $f(x+T) \cdot f(x) = c (c \neq 0)$, 周期为 $2T$;

④ $f(x+T) = -f(x-T)$, 周期为 $4T$;

⑤ $f(x+T)+f(x-T)=f(x)$, 周期为 $6T$.

(2) 对称性与周期性关系: 函数 $f(x)$ 若具有两个对称性(中心对称、轴对称)及周期性三个性质中的两个, 则必定具有第三个性质.

① 若 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 和 $x=b$ 对称($a \neq b$), 则 $f(x)$ 是周期为 $2|a-b|$ 的周期函数;

② 若 $f(x)$ 的图像关于点 $(a, 0)$ 和 $(b, 0)$ 对称($a \neq b$), 则 $f(x)$ 是周期为 $2|a-b|$ 的周期函数;

③ 若 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 及点 $(b, 0)$ 对称($a \neq b$), 则 $f(x)$ 是周期为 $4|a-b|$ 的周期函数.

7. 三个二次(一元二次方程、二次不等式、二次函数)间的问题可相互转化. 如二次函数零点是相应二次方程的根, 二次不等式的求解依赖于二次方程与二次函数的图像等.

(1) 一元二次方程.

① 判别式, 求根公式, 根与系数关系;

② 根的分布问题, 要由判别式、对称轴、端点值三者确定.

例如:

$$(i) \text{ 二次方程 } ax^2+bx+c=0 (a>0) \text{ 的两根都大于 } k \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} > k \\ f(k) > 0 \end{cases}$$

(ii) 一根大于 k , 一根小于 $k \Leftrightarrow f(k) < 0$.

(2) 二次函数的三种表现形式: $y=ax^2+bx+c=a(x-m)^2+n=a(x-x_1)(x-x_2)$ ($a \neq 0$), 其中 (m, n) 是顶点, x_1, x_2 为零点. 对于限定区间上的二次函数最值要注意对称轴与区间的位置关系.

(3) 一元二次不等式解法依赖于相应方程与二次函数图像.

(4) 对于二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$, 若 $f(x_1)=f(x_2)$, $x_1 \neq x_2$, 则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$.

8. 关于幂函数、指数函数、对数函数的问题.

(1) 幂函数 $f(x)=x^\alpha$ 在第一象限的图像如图 1-3 所示, 单调性为: 当 $\alpha > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数; 当 $\alpha < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数.

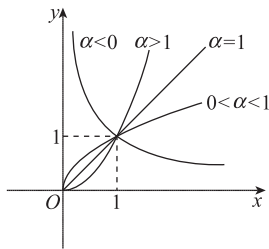


图 1-3

(2) 指数与对数.

$$a^b = N \Leftrightarrow b = \log_a N (a > 0, a \neq 1), a^{\log_a N} = N, \log_a a^b = b, \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \log_a b^n = \frac{n}{m} \log_a b.$$

(3) 指数函数 $y=a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 与对数函数 $y=\log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$).

① 互为反函数;

② 定义域、值域之间关系;

③ 单调性: 在各自定义域上, 当 $0 < a < 1$ 时, 均为减函数; 当 $a > 1$ 时, 均为增函数.

(4) 以各自的运算规则为模型的抽象函数的表示法.

$$\textcircled{1} \text{ 幂函数: } f(xy) = f(x)f(y), f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)} (y \neq 0, f(y) \neq 0), f(1) = 1;$$

$$\textcircled{2} \text{ 指数函数: } f(x+y) = f(x) \cdot f(y), f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}, f(0) = 1;$$

③对数函数: $f(xy) = f(x) + f(y)$, $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$, $f(1) = 0$.

(5) 会画 $y = a^{|x|}$, $y = \log_a |x|$, $y = |\log_a x|$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图像.

9. 图像问题.

(1) 注意以下两个函数的图像.

① 形如 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 的函数能变为形如 $y = n \pm \frac{1}{x-m}$ 的函数, 其图像是关于点 (m, n) 对称的反比例函数图像.

② 形如 $y = ax + \frac{b}{x}$ 的“双曲函数”, 若 $ab > 0$, 则为“对勾函数”; 若 $ab < 0$, 则为单调函数.

(2) 图像变换.

① 平移变换.

② 伸缩变换.

③ 对称变换.

函数 $y = f(-x)$ 的图像与函数 $y = f(x)$ 的图像关于 y 轴对称.

函数 $y = -f(x)$ 的图像与函数 $y = f(x)$ 的图像关于 x 轴对称.

函数 $y = -f(-x)$ 的图像与函数 $y = f(x)$ 的图像关于原点对称.

④ 翻折变换: $y = f(|x|)$ 与 $y = f(x)$ 之间的关系, $y = |f(x)|$ 与 $y = f(x)$ 之间的关系.

(3) 研究问题的方法.

会由图像特征研究函数性质, 能用性质描绘函数图像, 养成用图像、性质分析与思考问题, 即数形结合思想解题的习惯.

查漏补缺

1. 函数是数集到数集的特殊映射, 其对应法则必须满足定义域内的任意性, 函数值的唯一性

例 8 已知集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, 23\}$, 求证: 不存在这样的函数 $f: A \rightarrow \{1, 2, 3\}$, 使得对任意的整数 $x_1, x_2 \in A$, 若 $|x_1 - x_2| \in \{1, 2, 3\}$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$.

变式 1 函数 $y = f(x)$ 的图像与直线 $x = a$ ($a \in \mathbf{R}$) 的交点个数为().

A. 0

B. 1

C. 0 或 1

D. 可多于 1

2. 结合函数图像研究函数性质

如图 1-4 所示, 以函数为核心, 其核心内容包括函数的图像与性质, 函数的图像包括基本初等函数图像的作法及图像变换, 函数的性质主要包括函数的定义域、解析式、值域、奇偶性、单调性、周期性、对称性及特殊点, 函数知识的外延主要体现在函数与方程(函数零点)及函数与不等式的结合, 而

函数与方程(函数零点)及函数与不等式问题可通过转化思想,利用函数图像与性质求解.

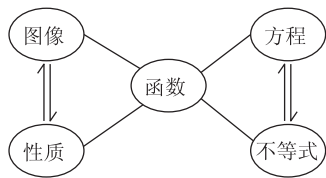


图 1-4

例 9 关于 x 的方程 $(x-a)(x-b)=2(a<b)$ 的两实根为 α, β , 且 $\alpha<\beta$, 试比较 α, β, a, b 的大小.

变式 1 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+4x, & x\geq 0 \\ 4x-x^2, & x<0 \end{cases}$, 若 $f(2-a^2)>f(a)$, 则实数 a 的取值范围是().

A. $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

B. $(-1, 2)$

C. $(-2, 1)$

D. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

3. 已知函数的解析式研究函数的性质

若给出函数的解析式, 常常需要同学们能够有意识地通过函数的解析式来研究函数的性质, 如函数的奇偶性、单调性、周期性及函数值的分布等, 进而解决函数的有关问题.

例 10 已知函数 $f(x)=x^2-\cos x$, 对于 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的任意 x_1, x_2 , 有如下条件: ① $x_1>x_2$; ② $x_1^2>x_2^2$; ③ $|x_1|>x_2$, 其中能使 $f(x_1)>f(x_2)$ 恒成立的条件序号是_____.

4. 构造函数的解析式研究函数的性质

对于方程(如例 9)、不等式(如例 11)问题, 我们可以通过引入自变量构造函数, 利用函数性质(如单调性、零点等)解决. 这正体现了函数、方程、不等式的思想运用.

例 11 若 $\alpha, \beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 且 $\alpha \sin \alpha - \beta \sin \beta > 0$, 则下列结论中正确的是().

A. $\alpha > \beta$

B. $\alpha + \beta > 0$

C. $\alpha < \beta$

D. $\alpha^2 > \beta^2$

变式 1 比较 $\frac{\ln \pi}{\pi}, \frac{1}{e}, \ln \sqrt{2}$ 这三个实数的大小, 并说明理由.

变式 2 比较 $\frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 3}{3}, \frac{\ln 5}{5}$ 的大小.