

第一章 三角函数

高考数学中,三角函数的考点有三角函数的定义、终边相同的角与三角函数值的象限符号、化简求值、三角函数的图像和性质与解三角形,其中核心考点是三角恒等变换、三角函数的图像和性质与解三角形.为什么说它们是核心考点呢?其一,在高考数学试卷中的三角函数试题(约占15~18分)里,这部分约占三分之二的分值(约占10~13分);其二,它们都是研究三角函数的中心内容;其三,它们都与实际生活和其他边缘学科有紧密联系;其四,它们对三角函数的其他考点有较高的覆盖率.

核心考点一 三角函数的图像和性质

方向一:三角恒等变换及性质的讨论

解法突破:用公式把已知函数化成同一个角的同种类型的三角函数(简称同角同函),常见方法有:

- (1)用两角和差公式或诱导公式变成“同角”的三角函数形式;
- (2)用倍角公式(升幂公式、降幂公式)变成“同角”(如 $\frac{x}{2}, x, 2x$)的三角函数形式;
- (3)用两角和差公式或辅助角公式化 $a\sin\omega x + b\cos\omega x$ 为 $A\sin(\omega x + \varphi)$ 的“同函”三角函数形式;
- (4)用同角三角函数基本关系式化“切”为“弦”三角函数形式.

【例 1.1】 已知函数 $f(x) = \frac{1 - \sin 2x}{\cos x}$.

(1)求 $f(x)$ 的定义域;

(2)设 α 是第四象限角,且 $\tan\alpha = -\frac{4}{3}$,求 $f(\alpha)$ 的值.

分析 对于定义域需从函数式结构(分式、偶次根式)及函数自身($\log_a x, \tan x$)考虑,求值问题是由未知化为已知的思路.

解析 (1)由 $\cos x \neq 0$,得 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$,故 $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

(2)因为 $\tan\alpha = -\frac{4}{3}$,且 α 是第四象限角,所以 $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$,

$$\text{故 } f(\alpha) = \frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 - 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1 - 2 \times \left(-\frac{4}{5}\right) \times \frac{3}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{49}{15}.$$

评注 定义域求解步骤,要掌握最后结果的书写要规范.

变式 1 已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3}}{\sin x}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的定义域;

(2)若 $f(x) = 2$,求 $\sin 2x$ 的值.

变式 2 (2012 北京文 15) 已知函数 $f(x) = \frac{(\sin x - \cos x) \sin 2x}{\sin x}$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的定义域及最小正周期;
- (2) 求 $f(x)$ 的单调递减区间.

【例 1.2】 已知函数 $f(x) = \cos^2 \omega x + \sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π .

- (1) 求 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 的值;
- (2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间及其图像的对称轴方程.

分析 化简函数解析式一般规律是运用倍角、两角和(差)公式化为只含一个角的三角函数形式去求解.

解析 (1) 由 $f(x) = \cos^2 \omega x + \sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x = \frac{1 + \cos 2\omega x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x = \frac{1}{2} + \sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$, 得函数 $f(x)$ 的最

小正周期 $T = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega} = \pi$, 得 $\omega = 1$, 因此 $f(x) = \frac{1}{2} + \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 则 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

(2) 令 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, 得 $k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$,

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right]$, $k \in \mathbf{Z}$,

令 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, 得 $k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{2\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$,

故函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

令 $2x + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, 得 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$,

所以函数 $f(x)$ 的对称轴方程为 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$.

评注 逆用两角和差公式(辅助角公式)化 $y = a \sin \omega x + b \cos \omega x$ 为 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 或 $y = A \cos(\omega x + \varphi)$ 的“同函”三角函数形式. 在此基础上求解函数的性质(如最小正周期、对称性、单调区间、值域(最值))或求解三角不等式.

变式 1 (2013 山东文 18) 设函数 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \sin^2 \omega x - \sin \omega x \cos \omega x$ ($\omega > 0$), 且 $y = f(x)$ 图像的一个

对称中心到最近的对称轴的距离为 $\frac{\pi}{4}$.

- (1) 求 ω 的值;
- (2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

变式 2 (2011 北京文 15) 已知函数 $f(x) = 4\cos x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

变式 3 (2013 湖南文 16) 已知函数 $f(x) = \cos x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

(1) 求 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 的值;

(2) 求使 $f(x) < \frac{1}{4}$ 成立的 x 的取值集合.

【例 1.3】 已知函数 $f(x) = 2\cos 2x + \sin^2 x + \sin x$.

(1) 求 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 的值;

(2) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值.

分析 该函数的变形方向与例 1.2 不同, 无法将其变为同次、同角, 只能变为二次型函数.

提醒读者: 注意次数、角度、函数名三者的变化.

解析 $f(x) = 2\cos 2x + \sin^2 x + \sin x = 2(1 - 2\sin^2 x) + \sin^2 x + \sin x = -3\sin^2 x + \sin x + 2$,

$$(1) f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin \frac{\pi}{3} + 2 = -3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = \frac{2\sqrt{3}-1}{4}.$$

$$(2) \text{ 令 } t = \sin x \in [-1, 1], \text{ 得 } y(t) = -3t^2 + t + 2, t \in [-1, 1],$$

$$\text{则当 } t = \frac{1}{6} \text{ 时, } y(t) \text{ 取最大值 } y\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{25}{12},$$

当 $t = -1$ 时, $y(t)$ 取最小值 $y(-1) = -2$, 因此函数 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{25}{12}$, 最小值为 -2 .

评注 求解三角函数的值域(最值)、周期、单调性、奇偶性、对称性等性质的问题, 首先要考虑将所给函数进行变形, 但未必能变为 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的形式, 有时化简为 $y = a\sin^2 x + b\sin x + c$ 或 $a\cos^2 x + b\cos x + c$ 型函数.

变式 1 已知 $\sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{10}$, $A \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

(1) 求 $\cos A$ 的值;

(2) 求函数 $f(x) = \cos 2x + 5\cos A \cos x + 1$ 的值域.

方向二:对函数图像的研究,“由图(及其性质)求式”,即已知三角函数的部分图像,求解函数解析式(应理解 A, ω, φ 的意义)

解法突破:对 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ 中“ A, ω, φ ”的确定,常规方法是:

- (1)振幅,可推出 $A(A > 0)$;
- (2)周期,可推出 ω 的值或取值范围;
- (3)特征点,可列出三角方程,求出 φ 的值.

【例 1.4】 已知函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi$) 的一段图像如图 1-1 所示,求函数的解析式.

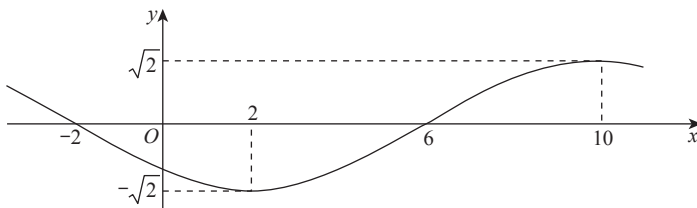


图 1-1

分析 五点法是解这类问题的基本方法,这里要注意的是零点是递增区间的中心还是递减区间的中心。

解析 由图 1-1 得 $T = 16 = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega = \frac{\pi}{8}$, $A = \sqrt{2}$, 则 $y = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}x + \varphi\right)$;

代入点 $(2, -\sqrt{2})$ 得 $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = -\sqrt{2}$,

则 $\frac{\pi}{4} + \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 得 $\varphi = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$; 又 $\varphi \in (-\pi, \pi)$, 得 $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$.

故函数的解析式为 $y = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}x - \frac{3\pi}{4}\right)$.

评注 (1)若将点 $(6, 0)$ 代入 $y = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}x + \varphi\right)$ 中,求取的结果是否是一致的呢?

$\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \varphi\right) = 0$, 得 $\frac{3\pi}{4} + \varphi = k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 即 $\varphi = k\pi - \frac{3\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$; 又 $-\pi < \varphi < \pi$, 则 $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{4}$.

而本题中求得 $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$, 为什么要舍去 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 呢? 大家要注意,点 $(6, 0)$ 位于函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$

($A > 0, \omega > 0$) 图像的增区间,据“五点描图法”知 $\frac{3\pi}{4} + \varphi = 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 得 $\varphi = 2k\pi - \frac{3\pi}{4}$, 又 $-\pi < \varphi < \pi$,

则 $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$. 故函数的解析式为 $y = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}x - \frac{3\pi}{4}\right)$.

(2)一般地,我们把函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 图像上从左到右的五个关键点依次称为“第一上零点”、“最大值点”、“下零点”、“最小值点”、“第二上零点(在不同时出现两个上零点的情形下,不区分第一和第二上零点)”. 它们所对应的相位值 $\omega x + \varphi$ 分别为 $0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$. 利用它们解题时应注意这种对应性,故评注(1)说明的点 $(6, 0)$ 应为“第一上零点”,其对应的相位值应为 $\frac{\pi}{8} \times 6 + \varphi = 0 + 2k\pi$, 而不是 $\frac{3\pi}{4} + \varphi = k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 希望读者注意此点!

变式 1 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $x \in \mathbf{R}, A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图像如图 1-2 所示.

(1)求 A, ω, φ 的值;

(2)已知在函数 $f(x)$ 图像上的三点 M, N, P 的横坐标分别为 $-1, 1, 3$, 求 $\sin \angle MNP$ 的值.

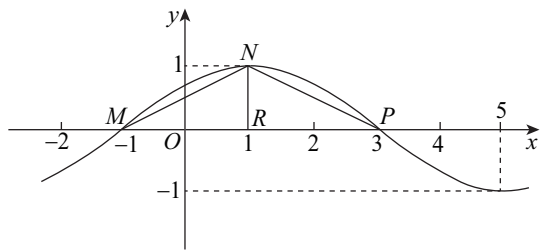


图 1-2

【例 1.5】 已知函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi$) 的部分图像如图 1-3 所示, 求函数 $f(x)$ 的解析式.

分析 观察图像中已知坐标对 A, ω, φ 的作用, 由图中 A, φ 易确定, ω 可由周期确定.

解析 由图 1-3, 知 $A = 2, \frac{T}{2} < \frac{7\pi}{12} < \frac{3T}{4}$, 即 $\frac{7\pi}{9} < T < \frac{7\pi}{6}$, 又 $T = \frac{2\pi}{\omega}$,

$$\text{得 } \frac{7\pi}{9} < \frac{2\pi}{\omega} < \frac{7\pi}{6}, \text{ 故 } \frac{12}{7} < \omega < \frac{18}{7} \quad ①$$

将点 $(0, 1)$ 代入 $y = 2 \sin(\omega x + \varphi)$, 得 $2 \sin \varphi = 1$, 即 $\sin \varphi = \frac{1}{2}$,

又 $-\pi < \varphi < \pi$, 且 $(0, 1)$ 点在函数的单调递增区间上, 故 $\varphi = \frac{\pi}{6}$,

因此 $y = 2 \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$, 代入点 $\left(-\frac{7\pi}{12}, 0\right)$ (“下零点”),

满足 $-\frac{7\pi}{12}\omega + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $\omega = -\frac{24}{7}k - \frac{10}{7} (k \in \mathbf{Z})$,

综合①, 当 $k = -1$ 时, $\omega = 2$ 满足题意.

所以函数 $f(x)$ 的解析式为 $y = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

评注 本题对 ω 的确定: 由周期的范围得到 ω 的不等式, 再结合零点得到 ω 的等式, 联立求得 ω 的值.

变式 1 已知函数 $f(x) = \cos^2(\omega x + \varphi)$ (ω, φ 为常数), 如果存在正整数 ω 和实数 φ 使得函数 $f(x)$ 的图像经过点 $(1, 0)$, 如图 1-4 所示, 求 ω 的值.

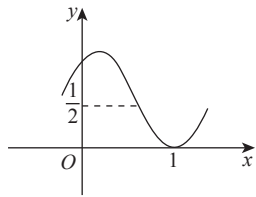


图 1-4

方向三: 给出函数的性质 (如奇偶性、单调性、对称性、最值) 求解函数解析式 (即 A, ω, φ 的确定)

【例 1.6】 设 $f(x) = 4 \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) \sin \omega x - \cos(2\omega x + \pi)$, 其中 $\omega > 0$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的值域;

(2) 若 $y = f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上为增函数, 求 ω 的最大值.

分析 函数的值域、单调性的确定需将函数化为 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的形式, 再按原理进行.

解析 (1) $f(x) = 4 \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) \sin \omega x - \cos(2\omega x + \pi) = 4 \left(\cos \omega x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin \omega x \cdot \frac{1}{2} \right) \sin \omega x + \cos 2\omega x$

$$\begin{aligned}
 &= (2\sqrt{3}\cos\omega x + 2\sin\omega x)\sin\omega x + \cos 2\omega x = 2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x + 2\sin^2\omega x + \cos 2\omega x \\
 &= \sqrt{3}\sin 2\omega x + 1 - \cos 2\omega x + \cos 2\omega x = \sqrt{3}\sin 2\omega x + 1.
 \end{aligned}$$

因为 $\sin 2\omega x \in [-1, 1]$, 所以函数 $f(x)$ 的值域为 $[1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}]$.

(2) 解法一: 由(1)知 $f(x) = \sqrt{3}\sin 2\omega x + 1$, 又 $y = f(x)$ 在区间 $[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上为增函数,

$$\text{得 } [-3\omega\pi, \omega\pi] \subseteq \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (\omega > 0), \text{ 故 } \begin{cases} -3\omega\pi \geq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \omega\pi \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} \omega \leq \frac{1}{6} - \frac{2k}{3}, k \in \mathbf{Z}, \\ \omega \leq \frac{1}{2} + 2k \end{cases},$$

又 $\omega > 0$, 可得 $0 < \omega \leq \frac{1}{6}$. 则 ω 的最大值为 $\frac{1}{6}$.

解法二: 由(1)知 $f(x) = \sqrt{3}\sin 2\omega x + 1 (\omega > 0)$ 在区间 $[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上为增函数, 由含原点的增区间的对称性可知函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 上也为增函数, 故 $\frac{T}{2} \geq 3\pi$, 即 $T \geq 6\pi$, 得 $\frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega} \geq 6\pi$,

故 $0 < \omega \leq \frac{1}{6}$. 则 ω 的最大值为 $\frac{1}{6}$.

评注 一般地, 若 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 为奇函数, 在 $[\theta_1, \theta_2]$ 上为增函数, 其中 $\theta_1 < 0 < \theta_2$, 若 $\max\{|\theta_1|, |\theta_2|\} = \theta$, 则 $\theta \leq \frac{T}{4}$, 即可求出 ω 的范围.

变式 1 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 \leq \varphi < \pi)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 其中点 $(\frac{3\pi}{4}, 0)$ 是一个对称中心, 且在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上为单调函数, 求函数 $f(x)$ 的解析式.

方向四: 图像变换问题

解法突破: 函数 $f(x) = \sin x$ $\xrightarrow{\text{向左平移 } \varphi (\varphi > 0) \text{ 个单位}}$ $y = \sin(x + \varphi)$ $\xrightarrow{\text{横坐标伸缩到原来的 } \frac{1}{\omega} (\omega > 0) \text{ 倍}}$ $y = \sin(\omega x + \varphi)$

$y = \sin(\omega x + \varphi)$ $\xrightarrow{\text{横坐标不变, 纵坐标伸缩到原来的 } A \text{ 倍 } (A > 0)}$ $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 或 函数 $f(x) = \sin x$ $\xrightarrow{\text{横坐标伸缩到原来的 } \frac{1}{\omega} (\omega > 0) \text{ 倍}}$ $y = \sin \omega x$ $\xrightarrow{\text{向左平移 } \frac{\varphi}{\omega} \text{ 个单位, 纵坐标不变}}$ $y = \sin \omega \left(x + \frac{\varphi}{\omega}\right) = \sin(\omega x + \varphi)$

$y = \sin \omega x$ $\xrightarrow{\text{横坐标不变, 纵坐标伸缩到原来的 } A \text{ 倍}}$ $y = A\sin(\omega x + \varphi)$.

注: 无论函数图像变换的次序如何, 相位的变换只针对“ x ”而言.

【例 1.7】 已知向量 $m = (\sin x, 1)$, $n = (\sqrt{3}A\cos x, \frac{A}{2}\cos 2x) (A > 0)$, 函数 $f(x) = m \cdot n$ 的最大值为 6.

(1) 求 A ;

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位, 再将所得图像上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变, 得到函数 $y = g(x)$ 的图像, 求 $g(x)$ 在 $[0, \frac{5\pi}{24}]$ 上的值域.

分析 本题是用向量的数量积给出三角函数, 对题目条件直接翻译便可得出答案.

解析 (1) $f(x) = m \cdot n = \sqrt{3}A \sin x \cos x + \frac{A}{2} \cos 2x = A \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) = A \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right)$.

因为 $A > 0$, $f(x)$ 的最大值为 6, 知 $A = 6$.

(2) 由(1)得, $f(x) = 6 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right)$, 将函数 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位得到

$$y = 6 \sin \left[2 \left(x + \frac{\pi}{12} \right) + \frac{\pi}{6} \right] = 6 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \text{ 的图像,}$$

再将得到的图像上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变, 得到 $g(x) = 6 \sin \left(4x + \frac{\pi}{3} \right)$.

因为 $x \in \left[0, \frac{5\pi}{24} \right]$, 所以 $\frac{\pi}{3} \leq 4x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{6}$, 得 $\sin \left(4x + \frac{\pi}{3} \right) \in \left[-\frac{1}{2}, 1 \right]$,

故 $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{5\pi}{24} \right]$ 上的值域为 $[-3, 6]$.

评注 条件要求的每种变换对应一种解析式, 按要求依次变换便得所求解析式.

变式 1 已知函数 $f(x) = (\sin 2x + \cos 2x)^2 - 2 \sin^2 2x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 若函数 $y = g(x)$ 的图像是由 $y = f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度得到的, 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4} \right]$ 时, 求 $y = g(x)$ 的最大值和最小值.

方向五: 与平面向量的综合

解法突破: 三角函数与向量知识的综合, 一般都是由向量的坐标形式进行数量积运算得出三角函数式, 然后对函数式进行恒等变换去解决提出的问题.

【例 1.8】 已知向量 $a = (\cos \omega x - \sin \omega x, \sin \omega x)$, $b = (-\cos \omega x - \sin \omega x, 2\sqrt{3} \cos \omega x)$, 设函数 $f(x) = a \cdot b + \lambda (x \in \mathbf{R})$ 的图像关于直线 $x = \pi$ 对称, 其中 ω, λ 为常数, 且 $\omega \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 若 $y = f(x)$ 的图像经过点 $\left(\frac{\pi}{4}, 0 \right)$, 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{3\pi}{5} \right]$ 上的取值范围.

分析 这里由数量积得出三角函数式, 按三角函数知识求解.

解析 (1) 因为 $f(x) = \sin^2 \omega x - \cos^2 \omega x + 2\sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x + \lambda = -\cos 2\omega x + \sqrt{3} \sin 2\omega x + \lambda$

$$= 2 \sin \left(2\omega x - \frac{\pi}{6} \right) + \lambda. \text{ 由直线 } x = \pi \text{ 是 } y = f(x) \text{ 图像的一条对称轴, 可得 } \sin \left(2\omega\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \pm 1,$$

所以 $2\omega\pi - \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 即 $\omega = \frac{k}{2} + \frac{1}{3} (k \in \mathbf{Z})$. 又 $\omega \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right) (k \in \mathbf{Z})$, 所以 $k = 1$, 故 $\omega = \frac{5}{6}$.

所以 $f(x)$ 的最小正周期是 $\frac{6\pi}{5}$.

(2) 由 $y = f(x)$ 的图像过点 $\left(\frac{\pi}{4}, 0 \right)$, 得 $f\left(\frac{\pi}{4} \right) = 0$, 即 $\lambda = -2 \sin \left(\frac{5}{6} \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = -2 \sin \frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}$,

即 $\lambda = -\sqrt{2}$. 故 $f(x) = 2\sin\left(\frac{5}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{2}$, 由 $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{5}$, 有 $-\frac{\pi}{6} \leq \frac{5}{3}x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6}$,

所以 $-\frac{1}{2} \leq \sin\left(\frac{5}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$, 得 $-1 - \sqrt{2} \leq 2\sin\left(\frac{5}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{2} \leq 2 - \sqrt{2}$,

故函数 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{3\pi}{5}\right]$ 上的取值范围为 $[-1 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}]$.

评注 本题实质是三角函数问题, 还是利用三角函数恒等变形化为一个角的三角函数, 再求出性质.

变式 1 (2013 陕西文 16) 已知向量 $\mathbf{a} = \left(\cos x, -\frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{b} = (\sqrt{3}\sin x, \cos 2x)$, $x \in \mathbf{R}$, 设函数 $f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

变式 2 (2013 辽宁文 17) 设向量 $\mathbf{a} = (\sqrt{3}\sin x, \sin x)$, $\mathbf{b} = (\cos x, \sin x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(1) 若 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, 求 x 的值;

(2) 设函数 $f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, 求 $f(x)$ 的最大值.

核心考点二 解三角形

方向一: 合理选取正弦定理、余弦定理解三角形, 已知边角关系式求解边或角及面积

解法突破: 解三角形要具备三个条件, 且其中至少有一个与边有关.

正弦定理可用来解决如下问题:

(1) 知两角一边求其他边或角;

(2) 知两边一对角求另一对角 (知小角求大角两解, 知大角求小角一解) 及其他边角.

余弦定理可用来解决如下问题:

(1) 知三边求角;

(2) 知两边及夹角求第三边;

(3) 知两边一对角, 求第三边 (在三角形内角为特殊角时, 还可以使用正弦定理求出第二个角后, 利用内角和定理 ($A+B+C=\pi$) 获得第三个角, 然后再次使用正弦定理求出第三边).

【例 1.9】 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\tan B = \frac{1}{2}$, $\tan C = \frac{1}{3}$ 且 $c = 1$.

(1)求 $\tan(B+C)$;

(2)求 a 的值.

分析 本题(1)因为是有关正切问题,所以选用 $\tan(B+C)$ 公式;(2)中边的计算是知一边求另一边,用正弦定理.

解析 (1) $\tan(B+C) = \frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 1.$

(2)由 $\tan A = \tan[\pi - (B+C)] = -\tan(B+C) = -1, A \in (0, \pi)$, 得 $A = \frac{3\pi}{4}$.

据正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ 得 $\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sin C}$, 又 $\tan C = \frac{1}{3}, C \in (0, \pi)$, 得 $\sin C = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 则 $a = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{10} = \sqrt{5}$.

评注 本题思路较简单,直接套用公式即可.

变式 1 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $2\sin B \cos A = \sin(A+C)$.

(1)求角 A ;

(2)若 $BC=2, \triangle ABC$ 的面积是 $\sqrt{3}$, 求 AB .

变式 2 (2013 湖北文 18) 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 对应的边分别是 a, b, c .

已知 $\cos 2A - 3\cos(B+C) = 1$.

(1)求角 A 的大小;

(2)若 $\triangle ABC$ 的面积 $S = 5\sqrt{3}, b = 5$, 求 $\sin B \sin C$ 的值.

方向二:三角形中边角互化

解法突破: 此类问题一般题设都是边、角混合的等式,解题突破口是利用正、余弦定理将边(角)化为角(边),列方程、解方程可得所求.

【例 1.10】 (2011 辽宁文 17) 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a \sin A \sin B + b \cos^2 A = \sqrt{2}a$.

(1)求 $\frac{b}{a}$ 的值;

(2)若 $c^2 = b^2 + \sqrt{3}a^2$, 求角 B 的大小.

分析 (1)已知等式两边的边或三角函数次数相同,考虑用正弦定理;(2)题中有平方关系,考虑用余弦定理.

解析 (1)由 $a \sin A \sin B + b \cos^2 A = \sqrt{2}a$, 据正弦定理边化角得, $\sin^2 A \sin B + \sin B \cos^2 A = \sqrt{2} \sin A$, 即 $\sin B(\sin^2 A + \cos^2 A) = \sqrt{2} \sin A$, 即 $\sin B = \sqrt{2} \sin A$, 则 $\frac{\sin B}{\sin A} = \sqrt{2} = \frac{b}{a}$, 即 $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$.

(2) 由(1)知 $b = \sqrt{2}a$, 代入 $c^2 = b^2 + \sqrt{3}a^2 = (2 + \sqrt{3})a^2 \Rightarrow c^2 = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}a^2$, 得 $c = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}a = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}a$,

由余弦定理知 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + (2 + \sqrt{3})a^2 - 2a^2}{2a \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}a} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 又 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{4}$.

评注 本题(1)按常规做法易得,(2)注意边之间关系需要统一,只有这样才能求出 $\cos B$ 的值,注意这些特别的数字,如: $(\sqrt{3} + 1)^2 = 4 + 2\sqrt{3}$.

变式 1 (2013 江西文 17) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $\sin A \sin B + \sin B \sin C + \cos 2B = 1$.

(1) 求证: a, b, c 成等差数列;

(2) 若 $C = \frac{2\pi}{3}$, 求 $\frac{a}{b}$ 的值.

变式 2 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\frac{\cos A - 2\cos C}{\cos B} = \frac{2c - a}{b}$.

(1) 求 $\frac{\sin C}{\sin A}$ 的值;

(2) 若 $\cos B = \frac{1}{4}$, $b = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}$.

变式 3 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三内角 A, B, C 的对边, $a \cos C + \sqrt{3}a \sin C - b - c = 0$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $a = 2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 b, c .

方向三: 解三角形中的最值问题

解法突破: 三角函数中的最值问题一般都是利用代数变换化为所求量的函数式, 用求函数最值的方法(如二次函数法、均值不等式法)求解.

【例 1.11】 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $\frac{2c - b}{a} = \frac{\cos B}{\cos A}$.

(1)求角 A 的大小;

(2)若 $a=2\sqrt{5}$,求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

分析 (1)边、角混合式子,先统一边或角的等式(方程)求解;(2)围绕列面积函数式这一目标可化为边或角求解.

解析 (1)因为 $\frac{2c-b}{a} = \frac{\cos B}{\cos A}$,由正弦定理得 $\frac{2\sin C - \sin B}{\sin A} = \frac{\cos B}{\cos A}$,即 $2\sin C \cos A - \sin B \cos A = \sin A \cos B$,所以 $2\sin C \cos A = \sin(A+B) = \sin(\pi-C) = \sin C$,在 $\triangle ABC$ 中, $\sin C \neq 0$,所以 $\cos A = \frac{1}{2}$,又因为 $A \in (0, \pi)$,所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

(2)**解法一**:因为 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$,且 $a = 2\sqrt{5}$,得 $b^2 + c^2 - 20 = bc \geqslant 2bc - 20$,

则 $bc \leqslant 20$ (当且仅当 $b=c$ 时,取“=”).所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}bc \leqslant 5\sqrt{3}$,

所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $5\sqrt{3}$.

解法二: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}bc = \sqrt{3}R^2 \sin B \sin C$,又 $A = \frac{\pi}{3}$,得 $B+C = \frac{2\pi}{3}$, $C = \frac{2\pi}{3} - B$,则 $S_{\triangle ABC} =$

$$\sqrt{3}R^2 \sin B \sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right) = \sqrt{3}R^2 \sin B \left(\sin \frac{2\pi}{3} \cos B - \cos \frac{2\pi}{3} \sin B\right) = \sqrt{3}R^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin B \cos B + \frac{1}{2} \sin^2 B\right)$$

$$= \sqrt{3}R^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2B + \frac{1 - \cos 2B}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2B - \frac{1}{2} \cos 2B + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2 \left[\sin\left(2B - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}\right],$$

当 $2B - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ 时,即 $B = \frac{\pi}{3}$ 时, $S_{\triangle ABC}$ 取得最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}}{2}\right)^2 \times \frac{1}{4} = 5\sqrt{3}$.

评注 列面积函数式究竟化为边还是角由条件决定,这里化为角思路简单,运算较繁,不如巧妙运用均值不等式简便.

变式 1 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,且 $\cos B = \frac{4}{5}$, $b = 2$.

(1)当 $a = \frac{5}{3}$ 时,求角 A 的大小;

(2)求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

变式 2 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,且 A, B, C 成等差数列.

(1) $b = \sqrt{13}$, $a = 3$,求 c 的值;

(2)设 $t = \sin A \sin C$,求 t 的最大值.

【例 1.12】 (2013 重庆文 18) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{3}bc$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 设 $a = \sqrt{3}$, S 为 $\triangle ABC$ 的面积, 求 $S + 3\cos B \cos C$ 的最大值, 并指出此时 B 的值.

分析 (1) 条件结构显示要用余弦定理; (2) 列所求量的函数式, 这里容易得出角的函数式.

解析 (1) 由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-\sqrt{3}bc}{bc} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. 又因为 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{5\pi}{6}$.

(2) 由 (1) 得 $\sin A = \frac{1}{2}$, 又由正弦定理及 $a = \sqrt{3}$, 得 $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sin B}{\sin A} \cdot a\sin C = 3\sin B\sin C$,

因此 $S + 3\cos B\cos C = 3(\sin B\sin C + \cos B\cos C) = 3\cos(B - C)$.

所以当 $B = C$ 时, 即 $B = \frac{\pi - A}{2} = \frac{\pi}{12}$ 时, $S + 3\cos B\cos C$ 取得最大值 3.

评注 注意三角公式的运用以及正、余弦定理的结合, 它们的共同目标是统一为一个变量的函数去求最值.