

第 3 章

弹性与塑性应力-应变关系

在前两章中,已经由静力学和几何学方面研究了弹塑性体所应该满足的各项方程,但仅用这些方程还不能解决弹塑体的变形和静力平衡问题,因为在推导这些方程时,还没有考虑应力和应变的内在联系。实际上应力和应变之间的关系是相辅相成的,有应力就会有应变,而有应变就会有应力。对于每一种具体材料,在一定条件下,应力和应变之间有着确定的关系,这种关系反映材料固有的特性。最常用的应力和应变的关系是胡克定律。其内容是:在小变形的情况下,固体的变形与所受的外力成正比。亦可表述为:在应力低于比例极限情况下,固体中的应力 σ 和应变 ϵ 成正比,即 $\sigma=E\epsilon$,式中 E 为常数,称为杨氏(弹性)模量。胡克定律推广到三维应力,应变状态后,即称为广义胡克定律。对于各向同性体广义胡克定律中的弹性常数只有两个。广义胡克定律是线弹性的关系。当材料进入塑性状态后,应力与应变之间的关系是非线性的,应变不仅和应力状态有关,而且和变形历史有关。为了考虑变形历史,应研究应力和应变增量之间的关系,以这种关系为基础的理论称为增量理论。在比例变形条件下,通过对增量理论的应力和应变增量关系的积分可以得到全量理论的应力和应变关系。增量形式的应力和应变增量的关系和全量形式的应力-应变关系都是非线性的关系式。

判断物体处于弹性状态还是处于塑性状态的判据,称为屈服条件。它是物体中某一点由弹性状态转变到塑性状态时各应力分量的组合所应满足的条件。在分析塑性问题时,屈服条件是非常重要的关系式。

3.1 拉伸和压缩时的应力-应变曲线

不同材料是有不同拉伸曲线的,但是它们也有一些共同的规律,一般说来,当变形较小时,即应力小于弹性比例极限(图 3-1),应力和应变之间的关系是线弹性的,因而是可以恢复的,即卸去外载荷后,物体可以完全恢复到变形前的初始状态,在物体内没有任何残余变形和残余应力。

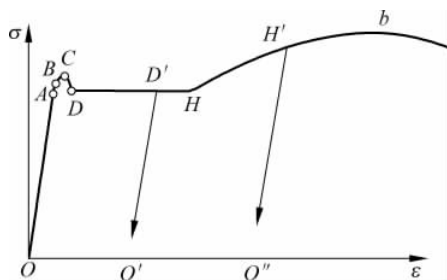


图 3-1 简单拉伸时的应力-应变曲线

设试件的初始截面积为 A_0 , P 为外载荷,若试件中的应力为 σ ,并设其分布是均匀的,则有

$$\sigma = \frac{P}{A_0}$$

若试件标距长度为 l_0 ,试件伸长为 Δl ,则名义应变为

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

在图 3-1 中 OA 为比例变形阶段。在这阶段中,应力和应变之间的关系是线性的,即可用胡克定律表示:

$$\sigma = E\epsilon \quad (3-1)$$

式中, E 为弹性模量,在弹性变形过程中, E 为常数。 A 点对应的应力称为比例极限。由 A 点到 B 点已经不能用线性关系来表示,但变形仍是弹性的。 B 点对应的应力称为弹性极限。对许多材料, A 点到 B 点的间距是很小的。 C 点和 D 点对应的应力分别称为材料的上屈服极限和下屈服极限。应力到达 C 点时,材料开始屈服。一般来说,上屈服极限受外界因素的影响较大,如试件截面的形状和大小,加载速率等都对它有影响,因此在实际应用中一般都采用下屈服极限作为材料的屈服极限,并记作 σ_s 。应力由 C 点降至 D 点是突然的,但应变却是继续增加的。由 D 点到 H 点为一接近水平的线段,在这一阶段中,虽然应力没有

增加,应变却在不断地增加,所以这一阶段又称为塑性流动阶段。有些材料的流动阶段是很长的,应变值可以达到 0.01。由 H 点开始出现强化现象,即试件只有在应力增加时,应变才能增加。如果在材料的屈服阶段或强化阶段卸载,则卸载线为图 3-1 中的 $D'O'$, $H'O''$,由图可见 $D'O'$, $H'O''$ 都平行于 AO 线,即材料虽然有了塑性变形,但它的弹性性质却没有变化。如果由点 O' 开始再加载,则加载过程仍沿 $O'H'$ 线进行,直到 H' 点后材料才开始屈服。在 b 点之前,试件处于均匀的应变状态,到达 b 点后,试件往往出现颈缩现象,如果再继续拉伸,则变形将集中在颈缩区进行。由于颈缩区的截面逐渐缩小,所以试件很快将被拉断。试件在被拉断之前,一般将有较大的塑性变形。以上所介绍的现象是韧性较好的低碳钢在拉伸试验时的几个典型特征。

有一类金属材料并没有明显的屈服阶段,其应力-应变曲线如图 3-2 所示。这时屈服极限规定用产生 0.2% 塑性应变所对应的应力来表示,并将其记为 $\sigma_{0.2}$ 。

在图 3-3 中,若自点 O' 起继续卸载(即压缩),则反向加载时的屈服点 C 对应的应力 σ_s'' 不但比 σ_s' 小,而且还比初始屈服极限 σ_s 小(图 3-3)。这里的 σ_s' 是自 O' 点拉伸至屈服时的屈服极限。这种具有强化性质的材料随着塑性变形的增加,屈服极限在一个方向上提高而在相反方向降低的效应是德国的包辛格(J. Bauschinger)首先发现的,故称为包辛格效应。一般认为它是由多晶材料晶界间的残余应力引起的。包辛格效应使材料具有各向异性性质。若一个方向屈服极限提高的数值和相反方向屈服极限降低的数值相等,则称为理想包辛格效应。由于对这一效应的数学描述比较复杂,因而在塑性力学中,对这一效应的数学描述经常要进行相应的简化。

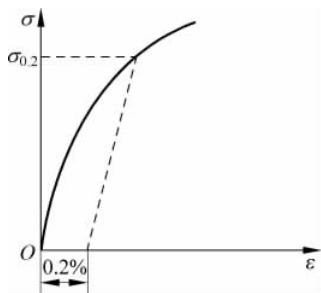


图 3-2 无明显屈服阶段材料的应力-应变曲线

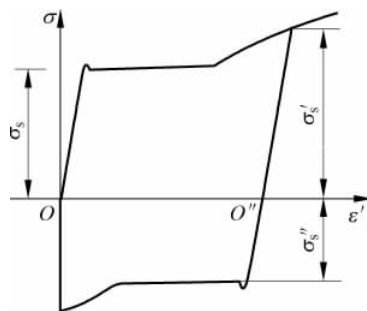


图 3-3 反向屈服效应

在一般的拉伸试验中, σ 并不是试件截面上的真实应力,这是因为在拉伸过程中,试件截面是逐渐缩小的,而 σ 是由拉力除以初始截面积。这种现象在应力

到达 b 点之前,往往可以认为对应力-应变曲线的精度影响不大。过了 b 点之后,试件发生颈缩,截面积的较大变化对于应力的计算将有明显的影响。若试件截面上的真实应力用 σ_T 表示, A 为某一瞬间试件的实际截面积,则应有

$$\sigma_T = \frac{P}{A} \quad (3-2)$$

由于 A 小于初始截面积 A_0 ,故应有 $\sigma_T > \sigma$, σ 称为名义应力。根据体积不可压缩假设,应有

$$A_0 l_0 = Al \quad (3-3)$$

式中, l_0 和 A_0 为试件的初始长度和初始截面积, l 和 A 为试件的瞬时长度和瞬时截面积。由式(3-3)可得

$$A = \frac{l_0 A_0}{l} \quad (3-4)$$

将式(3-4)代入式(3-2)后,得

$$\sigma_T = \frac{Pl}{A_0 l_0} = \frac{P}{A_0} \left(\frac{l_0 + \Delta l}{l_0} \right) = \sigma \left(1 + \frac{\Delta l}{l} \right) = \sigma(1 + \epsilon) \quad (3-5)$$

根据式(3-5),很容易由名义应力-应变曲线得到真实应力-应变曲线。若已知名义应力-应变曲线(图 3-4 中的实线),则可以横坐标原点的左侧 $\epsilon = -1$ 处为 O' 点;通过名义应力-应变曲线上的某一点 A ,作一平行于 ϵ 轴的直线 AB ,交应力轴 σ 于 B 点;联接 $O'B$ 线,并使 $O'B$ 线的延长线与通过 A 点且平行于 σ 轴的直线相交于 A' 点,于是 A' 点即为真实应力-应变曲线上的点。因为根据比例关系有

$$\frac{A'C}{AC} = \frac{1 + \epsilon_A}{1}$$

所以

$$\sigma_{TA} = \sigma_A(1 + \epsilon_A) \quad (3-6)$$

重复这一过程,便可得到真实应力-应变曲线,如图 3-4 中的点画线所示。

拉伸试验的最大应变受到颈缩的限制,一般应变可达 1 左右,而实际上在塑性成形的过程中应变往往超过 1。因此为了获得较大程度塑性变形时的真实应力-应变曲线,往往采用压缩试验。但在压缩试验中,由于压头接触面与试件之间有摩擦力,改变了试件的单向受力状态,故所得到的并不是真正的单向压缩应力。因此,只有消除接触表面的摩擦力,才能得到准确的真实应力-应变曲线。

图 3-5 是压缩试验简图。上、下压头的表面需进行淬火、回火、磨削和抛光。为减小试件与压头之间的摩擦力,往往在试件的端面上加润滑剂。如消除了试件和压头之间的摩擦力,则此压缩试验可以认为是均匀单向压缩的。试件为圆柱形,其初始高度为 H_0 ,初始直径为 D_0 ,在压缩过程中,瞬时高度为 H ,瞬时直

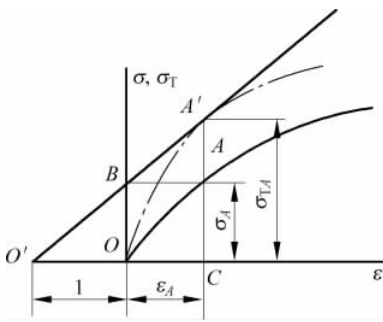


图 3-4 真实应力-应变曲线的作法

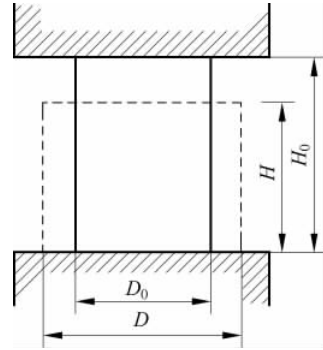


图 3-5 压缩试验简图

径为 D , 如图 3-5 所示。压缩时的应变为

$$\bar{\epsilon} = \frac{H_0 - H}{H_0} = 1 - \frac{H}{H_0}$$

由上式可得

$$\frac{H}{H_0} = 1 - \bar{\epsilon}$$

压缩时的对数应变为

$$\epsilon^* = \ln \frac{H_0}{H} = \ln \left[\frac{1}{1 - \bar{\epsilon}} \right]$$

若令 A_0 为圆柱试件的初始截面积, A 为变形过程中的瞬时截面积, 并认为圆柱试件体积是不变的, 则有

$$A_0 H_0 = AH = \text{const}$$

由此可得

$$A = A_0 \frac{H_0}{H} = A_0 \frac{1}{1 - \bar{\epsilon}} \quad (3-7)$$

单向压缩应力用下式表示

$$\sigma_T = \frac{P}{A} = \frac{P}{A_0} (1 - \bar{\epsilon}) \quad (3-8)$$

圆柱试件的压缩曲线受 D_0/H_0 比值的影响较大。若试件的接触面积大, 则受摩擦力的影响也较大, 因而 D_0/H_0 大的试件所得到的曲线总在 D_0/H_0 小的试件所得到的曲线上。若比值 D_0/H_0 趋近于零, 则摩擦力的影响也将消失, 这时便为理想的压缩状态。然而 $D_0/H_0 = 0$ 的试件实际上是不存在的, 所以往往采用外推的方法间接地推出 $D_0/H_0 = 0$ 时的真实应力, 并求出真实的应力-应变曲线。

例如,在压缩试验进行过程中,记录下 $D_0/H_0, D_1/H_1, D_2/H_2$ 各试件在每次压缩后的高度 H 和相应的外力 P ,利用公式(3-7)和式(3-8)求得各 $\sigma_T-\epsilon^*$ 曲线,如图 3-6(a)所示;再将图 3-6(a)转换成 σ_T-D/H 曲线,如图 3-6(b)所示,比如图 3-6(a)中的 a, b, c 点对应于图 3-6(b)中的 a', b', c' 点,连接 a', b', c' 点的曲线即为 ϵ_3 对应的 σ_T-D/H 曲线;再将 σ_T-D/H 曲线外推到 $D/H=0$ 的纵坐标上,此时纵坐标 σ_{T3} 即可认为是 $D_0/H_0=0$ 的试件在 $\epsilon^*=\epsilon_3^*$ 时的真实应力;利用相同的方法可以求出 $D_0/H_0=0$ 的试件在 $\epsilon^*=\epsilon_1^*$ 和 $\epsilon^*=\epsilon_2^*$ 时的 σ_{T1} 和 σ_{T2} ;再由 $\sigma_{T1}, \sigma_{T2}, \sigma_{T3}$ 和 $\epsilon_1^*, \epsilon_2^*, \epsilon_3^*$ 绘出一条曲线,便是所求的 $D_0/H_0=0$ 的试件的真实应力-应变曲线,如图 3-6(a)中的虚线所示。

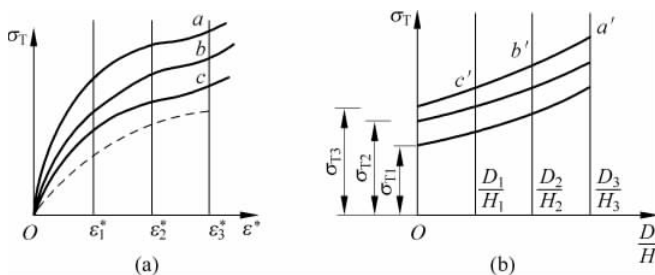


图 3-6 单向压缩试验曲线

3.2 弹塑性力学中常用的简化力学模型

对于不同的材料,不同的应用领域,可以采用不同的变形体模型。在确定力学模型时,要特别注意使所选取的力学模型必须符合材料的实际情况,这是非常重要的,因为只有这样才能使计算结果反映结构或构件中的真实应力及应力状态。另一方面要注意所选取的力学模型的数学表达式应该足够简单,以便在求解具体问题时,不出现过大的数学上的困难。

对于某些材料,在弹性变形阶段,应力与应变之间是一种线性关系(图 3-7)。在此阶段中,外载荷引起的应力,应变和位移,与加载次序和历史无关。在除去外载后,物体完全恢复到初始状态,而且在物体中没有任何残余应力和残余变形。这时应力和应变关系的数学表达式由式(3-1)表示。对某些材料即使是在弹性阶段应力-应变关系也不是线性的,这时应认为式(3-1)是一种近似的表达式。

当材料进入塑性状态后,若不考虑材料的强化性质,则可得到如图 3-7 所示

的理想弹塑性模型。在图 3-7 中,线段 OA 表示材料处于弹性阶段,线段 AB 表示材料处于塑性阶段,应力可用如下公式求出:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= E\epsilon, & \epsilon &\leq \epsilon_e \\ \sigma &= E\epsilon_s = \sigma_s, & \epsilon &> \epsilon_e \end{aligned} \right\} \quad (3-9)$$

由于公式(3-9)只包括了材料常数 E 和 σ_s ,故不能描述应力-应变曲线的全部特征;又由于在 $\epsilon=\epsilon_s$ 处解析表达式有变化,故给具体计算带来一定困难。这一力学模型抓住了韧性材料的主要特征,因而与实际情况符合得较好。

当考虑材料强化性质时,可采用线性强化弹塑性力学模型(图 3-8)。图中有两条直线,即 OA 和 AB 线,其解析表达式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= E\epsilon, & \epsilon &\leq \epsilon_s \\ \sigma &= \sigma_s + E_1(\epsilon - \epsilon_s), & \epsilon &> \epsilon_s \end{aligned} \right\} \quad (3-10)$$

式中, E 及 E_1 分别为线段 OA 及 AB 的斜率。具有这种应力-应变关系的材料,称为弹塑性线性强化材料。由于 OA 和 AB 是两条直线,有时也称之为双线性强化模型。这种近似的力学模型对某些材料是足够准确的。如果 AB 的斜率足够小,则作为理想弹塑性体考虑并不至于产生很大的误差,但计算却可大为简化。当 AB 大到不能忽略时,则应按式(3-10)进行计算。这个模型和理想弹塑性模型虽然相差不大,但具体计算却要复杂得多。

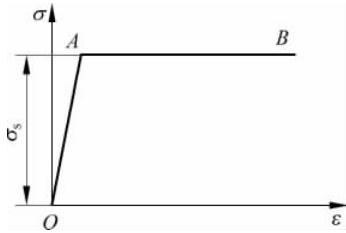


图 3-7 理想弹塑性力学模型

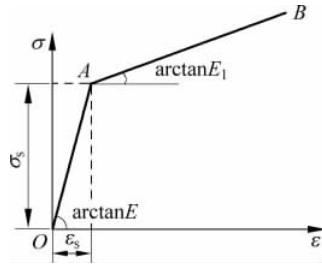


图 3-8 线性强化弹塑性力学模型

为了避免解析式在 $\epsilon=\epsilon_s$ 处的变化,有时可以采用幂强化力学模型,即取

$$\sigma = A\epsilon^n$$

式中, n 为幂强化系数,介于 0 与 1 之间。上式所代表的曲线在 $\epsilon=0$ 处与 σ 轴相切,而且有

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= A\epsilon, & n &= 1 \\ \sigma &= A, & n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-11)$$

式(3-11)的第一式代表理想弹性模型,若将式中的 A 用弹性模量 E 代替,则为

胡克定律的表达式。而式(3-11)的第二式若将 A 用 σ_s 代替。则为理想塑性(或称刚塑性)力学模型。通过求解式(3-11)则可得 $\epsilon=1$, 即这两条线在 $\epsilon=1$ 处相交。由于幂强化模型也只有两个参数 A 和 n , 因而也不可能准确地表示材料的所有特征。但由于它的解析式比较简单, 而且 n 可以在较大的范围内变化, 所以也经常采用。其几何表示如图 3-9 所示。

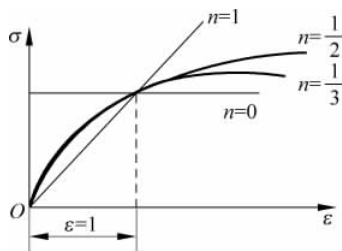


图 3-9 幂强化力学模型

在许多实际工程问题中, 弹性应变比塑性应变小得多, 因而可以忽略弹性应变。若不考虑强化效应, 则称这种模型为刚塑性力学模型。这一模型假设: 在应力到达屈服极限之前应变为零。在图 3-10(a) 中, 线段 AB 平行于 ϵ 轴, 卸载线平行于 σ 轴。图 3-10(b) 所示为具有线性强化性质的刚塑性力学模型, 其卸载线也是平行于 σ 轴的。

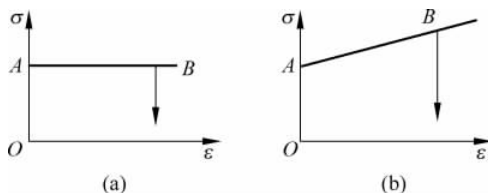


图 3-10 刚塑性力学模型

在塑性力学中, 刚塑性力学模型具有重要意义。在塑性成形理论中的多数情况下, 塑性应变一般都比弹性应变大得多, 所以忽略弹性应变而只考虑塑性应变是合理的, 对总体的计算结果影响不大。采用刚塑性模型给数学计算带来较大的简化。使许多复杂问题能获得完整的解析表达式。在以上所提及的几种力学模型中, 理想弹塑性力学模型、幂强化力学模型以及理想刚塑性力学模型应用得最为广泛。

3.3 广义胡克定律

1678 年 R. 胡克(Robert Hooke)发表了固体受力后应力和应变关系的定律, 即胡克定律, 这一定律用拉丁文的写法是 *Ut tensio sic vis*——有多大的伸长, 就有多大的力。在一维情况下其数学表达式为(3-1)。在拉伸过程中, 试件的截面将减小, 相反, 在压缩过程中, 试件的截面将增大。在线弹性阶段, 由实验

可知在轴向(x)拉伸时,侧向(y, z)的应变 ϵ_y, ϵ_z 与轴向应变 ϵ_x 有关,它们的关系式是

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma}{E}$$

式中, ν 为泊松比。对于各向同性材料,在任何点,材料的弹性常数都应该是一样的。根据实验结果可以知道,在小变形情况下,正应力和剪应变没有关系,而剪应力只与剪应变有关而且应力可以叠加。

现在先来看看具有单位厚度各向同性的均匀矩形薄板。由于应力 σ_x 的作用,不仅在 x 方向引起应变 $\frac{\sigma_x}{E}$,同时在 y 方向引起应变 $-\nu \frac{\sigma_x}{E}$ 。由于 σ_y 的作用,在 y 方向将引起应变 $\frac{\sigma_y}{E}$,而在 x 方向引起应变 $-\nu \frac{\sigma_y}{E}$ 。如果同时有 σ_x 和 σ_y 的作用(图 3-11)则在 x 方向及 y 方向的应变为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x) \end{aligned} \right\} \quad (3-12)$$

在纯剪应力状态下(图 3-11),由实验结果可知,在线弹性阶段,应力与应变关系为

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

式中, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ 为切变模量。

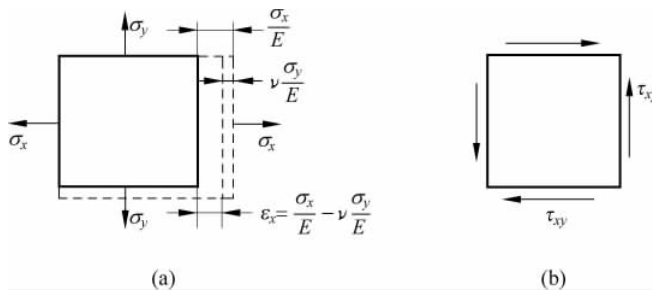


图 3-11 平面应力时的胡克定律

利用完全相同的方法可以导出三维应力的各向同性均匀材料的广义胡克定律,其形式为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (3-13)$$

将式(3-13)的前三式两边相加后,则有

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1}{E}[(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - 2\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

若令 $\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \theta = 3\epsilon_0$, $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \Theta = 3\sigma_0$, 则上式又可写为

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E}\Theta$$

或

$$\epsilon_0 = \frac{1-2\nu}{E}\sigma_0 \quad (3-14)$$

式(3-14)表明,体积变形与三个主应力之和成正比。引入以上表达式后,广义胡克定律又可写为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_x - \nu\Theta], & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_y - \nu\Theta], & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz} \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_z - \nu\Theta], & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G}\tau_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (3-15)$$

由式(3-15)和式(3-14)可得

$$\begin{aligned} \epsilon_x - \epsilon_0 &= \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_x - \nu\Theta] - \frac{1-2\nu}{E}\sigma_0 = \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_x - 3\nu\sigma_0] - \frac{1-2\nu}{E}\sigma_0 \\ &= \frac{1+\nu}{E}(\sigma_x - \sigma_0) \end{aligned}$$

即

$$e_x = \frac{1+\nu}{E}s_x = \frac{1}{2G}s_x \quad (3-16a)$$