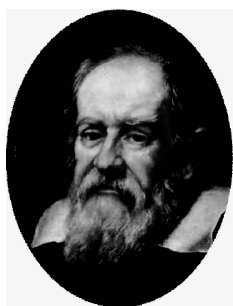


第一篇 力学

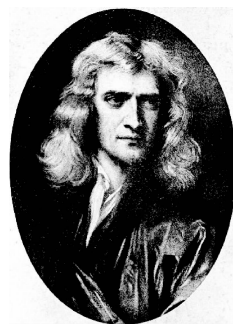
力学是研究物质机械运动规律的科学。从宇宙星系到基本粒子,物质世界分多种层次。本篇所谈的力学通常又称经典力学,是一门非常古老的学科,以宏观物体为研究对象,由于学科的互相渗透,有时也涉及宇观或微观对象。其主要研究宏观尺寸的物体受力下的形变,以及速度远低于光速时的运动规律。力学运动,是物质在时间、空间中的位置变化,包括移动、转动、流动、变形、振动、波动、扩散等,而平衡或静止,则是其中的特殊情况。物质运动的其他形式还有热运动、电磁运动、原子及其内部的运动和化学运动等。力是物质间的一种相互作用,机械运动状态的变化是由这种相互作用引起的。静止和运动状态不变,则意味着各作用力在某种意义上的平衡,因此,力学可以说是力和机械运动的科学。



伽利略

力学知识最早起源于人类对自然现象的观察和在生产劳动中的经验。人们在建筑、灌溉等劳动中使用杠杆、斜面、汲水器等器具,逐渐积累起对平衡物体受力情况的认识。早在古希腊时代,力学就有了一定的系统理论,但是其真正的快速发展却是从16世纪开始的。16世纪到17世纪间,力学开始发展成为一门独立的、系统的学科。伽利略(Galileo Galilei, 1564—1642年)通过对抛体和落体的研究,在实验研究和理论分析的基础上,最早阐明了自由落体运动的规律,提出了加速度的概念,提出惯性定律并用以解释地面上的物体和天体的运动。17世纪末牛顿(Isaac Newton, 1643—1727年)继承和发展前人的研究成果(特别是开普勒的行星运动三定律),提出力学运动的三条基本定律,使经典力学形成系统的理论;此后两个世纪在很多科学家的研究与推广下,终于成为一门具有完善理论的经典力学。

随着研究的深入,人们发现经典力学具有一定的局限性,只能应用于宏观低速领域。为了突破这一局限,人们付出了巨大努力。爱因斯坦提出了相对论力学理论,将力学的应用空间拓展到了宏观高速领域;量子力学又将力学的应用空间拓展到了微观领域。这一切的努力,使得古老的力学得到新生,焕发了青春。



牛顿

力学是研究物体机械运动的一门科学。所谓机械运动,就是物体间的相对位置发生变化。力学主要分为运动学、静力学和动力学。对机械运动的描述及对机械运动规律的研究称为运动学,本章主要研究运动学。运动学的任务就是描述物体的运动,由运动方程求解速度和加速度,或由加速度及初始条件求运动方程。

1.1 质点运动的描述

1.1.1 参考系 坐标系 质点

设想在茫茫浓雾中看不到任何其他的物体,你能确定自己的运动吗?不能,因为要想描述一个物体的运动必须首先选择其他物体作为参考,称之为**参考系**。有了参考系只能定性描述物体的运动,要想定量地描述,就必须在参考系上建立坐标系,这样就可以用一组数字来描述空间的各点,实现对物体运动的定量描述。实际物体的运动往往是非常复杂的,要想精细地描述一个物体的运动,就必须将物体上各个点的运动都描述清楚,有时这是不可能,也是不必要的。针对要解决的问题的重点,突出主要因素,忽略次要因素,要提出一个接近于实际而又有别于实际的物理模型,使问题简化,以便于更好地处理问题。

参考系的选择是任意的,主要根据问题的性质和研究的方便而定。如图 1-1 所示,物体相对于地球的运动——以地球为参考系;物体相对于太阳的运动——以太阳为参考系。在描述物体的运动时,必须指明参考系。参考系不同,对同一物体运动的描述是不同的。例如,描述相对地面匀速运动的火车上落下的一个物体的运动,若以火车作为参考系,物体作自由落体运动;若以地面作为参考系,物体作平抛运动。通常若不指明参考系,则认为以地面为参考系。

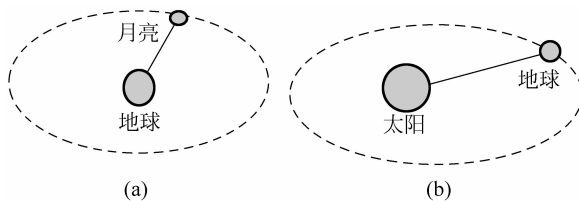


图 1-1 参考系

(a) 以地球为参考系; (b) 以太阳为参考系

坐标系的选择是任意的,主要由研究问题的方便而定。坐标系的选择不同,描述物体运动的方程不同,但对物体运动的规律是没有影响的。坐标系是由参考系抽象而成的数学框架,常用的坐标系有直角坐标系、球坐标系、柱坐标系和自然坐标系。物体的运动不能脱离空间,也不能脱离时间,因此要定量地描述物体的运动,还要建立适当的时间坐标轴。时间轴上的点表示**时刻**,它与物体的某一位置相对应;两个时刻之间的间隔表示**时间**,它与物体位置的某一变化过程相对应。

任何物体都有大小和形状。一般说来,物体运动时其各部分的位置变化是不同的,物体的运动情况非常复杂。为使问题简化,将物体所有属性中与要解决的问题联系不强的属性忽略,使物体理想化,称为**物理模型**。例如,质点是一个理想化的力学模型。当物体的大小和形状忽略不计时,可以把物体当作只有质量没有形状和大小的点,这就是**质点**。一个物体能否当作质点,并不取决于它的实际大小,而是取决于研究问题的性质。例如,地球绕太阳公转,地球可当作质点;地球自转,地球不可当作质点。当一个物体不能当作质点时,可以把整个物体看作是由许多质点组成的质点系。分析这些质点的运动,就可以弄清楚整个物体的运动。因此研究质点的运动是研究实际物体复杂运动的基础。

1.1.2 位置矢量 运动方程 位移

要描述一个质点的运动,首要问题是如何确定质点相对于参考系的位置。如图1-2所示,我们可以在参考系上取一点 O ,称为原点,从原点 O 到质点所在的位置 P 的有向线段能唯一地确定质点相对于参考系的位置。因而定义从原点 O 到质点所在的位置 P 点的有向线段 $\boldsymbol{r}$,叫做**位置矢量**或**位矢**。

由于空间的几何性质,位置矢量总可以用它的沿3个坐标轴的分量之和来表示。位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 沿3个坐标轴的投影分别是坐标值 x, y, z 。以 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x, y, z 轴正方向的**单位矢量**(即其大小是一个单位的矢量),则位矢 $\boldsymbol{r}$ 和它的三个分量的关系就可以用矢量合成公式

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \quad (1-1)$$

表示。

$$\text{大小: } r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\text{方向余弦: } \cos\alpha = \frac{x}{r}, \cos\beta = \frac{y}{r}, \cos\gamma = \frac{z}{r}$$

位置矢量是矢量,有大小和方向。位置矢量具有瞬时性,运动质点在不同时刻的位置矢量是不同的。位置矢量具有相对性,与参考系以及坐标系的原点的选择有关。在不同的参考系中,同一质点的位置矢量是不同的。

质点运动时,它相对坐标原点 O 的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 随时间而变化。因此, $\boldsymbol{r}$ 是时间 t 的函数,即

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \quad (1-2)$$

这就是**质点运动方程**,它包含了质点运动的全部信息。其分量形式为

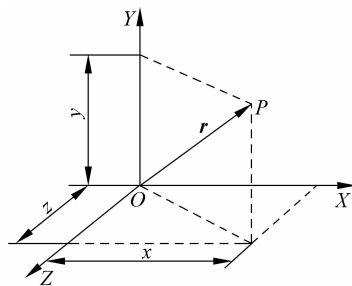


图 1-2 位置矢量

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (1-3)$$

例如, $\mathbf{r}(t) = R\cos\omega t\mathbf{i} + R\sin\omega t\mathbf{j}$ 就是质点作圆周运动的方程, 它的分量形式为 $\begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \end{cases}$ 。

运动学的重要任务之一, 就是找出各种具体运动所遵循的运动方程, 知道了运动方程, 就可以解决质点的所有运动问题。

质点的空间运动路线称为**轨迹**或**轨道**, 在坐标系中描绘轨道的方程称为质点运动的**轨道方程**, 即在运动方程的分量式中, 消去时间 t 所得到的方程 $f(x, y, z) = 0$ 。在上面所举例子中, 质点的轨道方程为 $x^2 + y^2 = R^2$ 。

质点运动, 在一段时间里从始点 A 到终点 B (图 1-3), 它相对于原点的位置矢量由 $\mathbf{r}_A$ 变化到 $\mathbf{r}_B$ 。我们把由始点 A 到终点 B 的有向线段 AB 定义为质点在这段时间的**位移矢量**, 简称**位移**, 用 $\Delta\mathbf{r}$ 表示。

由式(1-2), 可将 A, B 两点的位矢 $\mathbf{r}_A$ 与 $\mathbf{r}_B$ 分别写成

$$\mathbf{r}_A = x_A\mathbf{i} + y_A\mathbf{j} + z_A\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_B = x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j} + z_B\mathbf{k}$$

于是, 位移 $\Delta\mathbf{r}$ 可写成

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k} \quad (1-4)$$

位移是位置矢量的增量, 是与运动过程有关的物理量, 与所选时间段有关。它与位矢不同的是: 确定参考系后, 位矢与坐标系原点的选择有关而位移与坐标系原点的选择无关。质点从一点到另一点的运动路线长度称作**路程**, 用 Δs 表示。路程是标量, 同一质点的路程和位移有如下关系, $\Delta s \geq |\Delta\mathbf{r}|$, 但在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $|\Delta\mathbf{r}| = \Delta s$, 即 $ds = |d\mathbf{r}|$ 。位移和路程是截然不同的两个概念。位移代表的是质点位置变动的距离和方位, 而路程代表的是质点运动路线的长度。

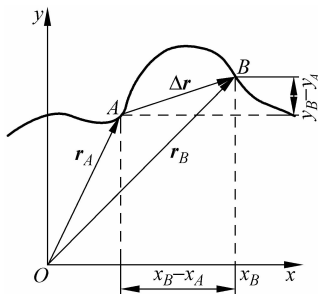


图 1-3 位移矢量

1.1.3 速度

研究质点的运动, 不仅要研究位移, 还要研究运动的快慢和方向。

如图 1-4 所示, t 时刻, 质点的位置矢量为 $\mathbf{r}(t)$, 经 Δt 后, 质点的位置矢量变为 $\mathbf{r}(t + \Delta t)$, 质点在 Δt 时间内的位移为

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

定义这段 Δt 时间内的**平均速度**为

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \quad (1-5)$$

平均速度是矢量, 表示质点在确定时间间隔内运动的快慢程度, 方向就是质点在这段时间内位移的方向。平均速度与质点的位移和所用的时间有关。因而在叙述平均速度时, 必须指明是哪一段时间内或哪一段位移的平均速度。

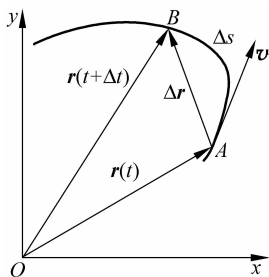


图 1-4 平均速度

为了精确地描述质点在某一时刻或某一位置运动快慢和运动方向,定义平均速度的极限值称为**瞬时速度**(图 1-5),简称**速度**,用 $\boldsymbol{v}$ 表示。

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \quad (1-6)$$

即质点的瞬时速度是位置矢量对时间的一阶导数。在 SI 中速度单位为 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$,其量纲为 LT^{-1} 。速度是矢量,当质点作曲线运动时,速度方向为沿轨道上质点所在位置的切线并且指向前进的方向。其大小

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t} = \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right| = \frac{ds}{dt} \quad (1-7)$$

反映质点在该瞬时运动的快慢,称为**瞬时速率**。

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,瞬时速度 $\boldsymbol{v}$ 的正交分解式为

$$\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} + v_z \boldsymbol{k}$$

其中

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (1-8)$$

v_x, v_y 和 v_z 分别是速度在 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴上的分量。即瞬时速度矢量的投影等于位置坐标对时间的一阶导数。

在力学中,只有当质点的位矢和速度同时被确定时,其运动状态才被确定,所以,位矢和速度是描述质点运动状态的两个物理量。

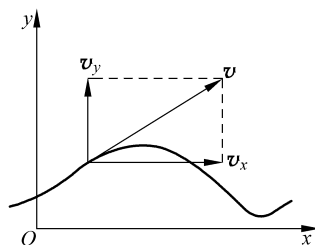


图 1-5 瞬时速度

1.1.4 加速度

质点运动时,瞬时速度的大小和方向都可能变化,为反映其变化的快慢和方向,引入加速度这个物理量。加速度的引入是力学发展中的大事,它为动力学的发展准备了条件。

如图 1-6 所示, t 时刻,质点在 A 点的速度为 $\boldsymbol{v}(t)$, 经 Δt 后位置变为 B, 速度变为 $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$, 速度增量 $\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)$ 与这一增量所用时间 Δt 之比 $\Delta \boldsymbol{v} / \Delta t$ 称为这段时间内的**平均加速度**, 记作 $\bar{\boldsymbol{a}}$,

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \quad (1-9)$$

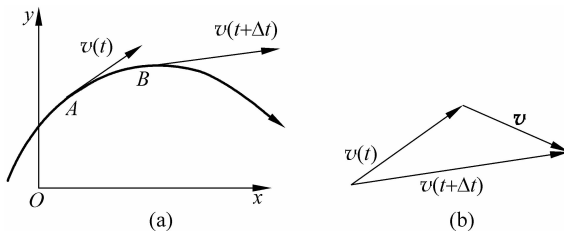


图 1-6 曲线运动的加速度

平均加速度是矢量,大小为 $\bar{a} = |\bar{\boldsymbol{a}}|$, 表示质点在确定时间间隔内速度改变的快慢程度,方向就是质点在这段时间内速度增量的方向。在 t 到 $t+\Delta t$ 时间内平均加速度 $\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$,

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的极限叫做 t 时刻的**瞬时加速度**, 记作 $\boldsymbol{a}$,

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \quad (1-10)$$

即质点的瞬时加速度等于速度矢量对时间的变化率或一阶导数。又因

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

故得

$$\boldsymbol{a} = \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} \quad (1-11)$$

即瞬时加速度等于位置矢量对时间的二阶导数。在 SI 中加速度单位为 $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, 其量纲为 LT^{-2} 。对于直线运动: 当加速度的方向与速度的方向相同时, 为加速运动; 当加速度的方向与速度的方向相反时, 为减速运动。并不是说, 加速度为正就是加速运动, 加速度为负就是减速运动。因为加速度的正负与坐标系的选择有关。对于曲线运动: 加速度的方向和速度的方向不一定相同, 当二者成锐角时, 速率增加; 二者成钝角时, 速率减小; 二者成直角时, 速率不变。加速度的方向总是指向运动曲线凹的一方。

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中, 瞬时加速度 $\boldsymbol{a}$ 的正交分解式为

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}$$

其中

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (1-12)$$

即瞬时加速度矢量的投影等于位置坐标对时间的二阶导数。

例 1-1 已知质点位矢随时间变化的函数形式为

$$\boldsymbol{r} = R(\cos \omega t \boldsymbol{i} + \sin \omega t \boldsymbol{j})$$

其中 R, ω 为常量。求: (1) 质点的轨道方程; (2) 速度和速率; (3) 加速度。

解 (1) 由 $\boldsymbol{r} = R(\cos \omega t \boldsymbol{i} + \sin \omega t \boldsymbol{j})$ 知

$$x = R \cos \omega t, \quad y = R \sin \omega t$$

消去 t 可得轨道方程

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$(2) \text{ 速度 } \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -\omega R \sin \omega t \boldsymbol{i} + \omega R \cos \omega t \boldsymbol{j}$$

$$\text{速率 } v = [(-\omega R \sin \omega t)^2 + (\omega R \cos \omega t)^2]^{\frac{1}{2}} = \omega R$$

$$(3) \text{ 加速度 } \boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\omega^2 R(\sin \omega t \boldsymbol{i} + \cos \omega t \boldsymbol{j}) = -\omega^2 \boldsymbol{r}$$

说明此运动的加速度方向与位矢方向相反, 是指向原点的。

例 1-2 已知质点位矢随时间变化的函数形式为 $\boldsymbol{r} = 4t^2 \boldsymbol{i} + (3 + 2t) \boldsymbol{j}$, 式中 $\boldsymbol{r}$ 的单位为 m , t 的单位为 s 。求: (1) 质点的轨道; (2) 从 $t=0$ 到 $t=1 \text{ s}$ 时间间隔的位移; (3) $t=0$ 和 $t=1 \text{ s}$ 两时刻的速度和加速度。

解 (1) 由 $\boldsymbol{r} = 4t^2 \boldsymbol{i} + (3 + 2t) \boldsymbol{j}$ 可知

$$x = 4t^2, \quad y = 3 + 2t$$

消去 t 得轨道方程为

$$x = (y - 3)^2$$

$$(2) \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(1) - \mathbf{r}(0) = (4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) - 3\mathbf{j} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

$$(3) \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 8t\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \text{ 则}$$

$$\mathbf{v}(0) = 2\mathbf{j}, \quad \mathbf{v}(1) = 8\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

$$\text{又因为 } \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 8\mathbf{i}, \text{ 则}$$

$$\mathbf{a}(0) = \mathbf{a}(1) = 8\mathbf{i}$$

例 1-3 质点沿 x 轴正向运动, 加速度 $\mathbf{a} = -k\mathbf{v}$, k 为常数。设从原点出发时速度为 $\mathbf{v}_0$, 求运动方程 $x = x(t)$ 。

解 由题意, $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -k\mathbf{v}$, $\frac{d\mathbf{v}}{\mathbf{v}} = -k dt$, $\int_{v_0}^v \frac{1}{v} dv = \int_0^t -k dt$, 可求得

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 e^{-kt}$$

$$\text{又 } \frac{dx}{dt} = v = v_0 e^{-kt}, \int_0^x dx = \int_0^t v_0 e^{-kt} dt, \text{ 即}$$

$$x = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt})$$

1.2 自然坐标系中质点运动的描述

当质点在平面上沿曲线运动的轨迹已知时, 有时采用平面自然坐标(以下简称自然坐标)描述质点位置。

1.2.1 自然坐标

若质点的运动轨迹 $y = y(x)$ 已知, 则 x, y 间只有一个是独立的, 仅用一个标量函数就能确切描述质点运动。这时, 可选择一种“自然坐标”作为时间的函数描写质点运动。

如图 1-7 所示, $\mathbf{r}$ 为位置矢量。沿质点的运动轨迹建立弯曲的“坐标轴”, 选择轨迹上一点 O' 为“原点”, 并用由原点 O' 至质点位置的弧长 s 作为质点位置坐标。坐标增加的方向是人为规定的。若轨迹限于平面内, 弧长 s 叫做平面自然坐标。自然坐标 s 不同于一般仅说明长度的弧长, 它与自然坐标的方向有关。根据原点与正方向的规定, s 可正可负。利用自然坐标, 质点运动学方程可写作

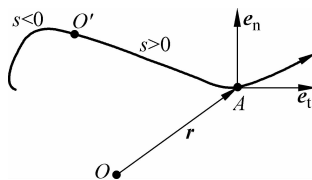


图 1-7 自然坐标系

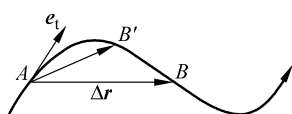
$$s = s(t) \quad (1-13)$$

使用自然坐标时也可对矢量进行正交分解。如图 1-7 所示, 如质点在 A 处, 可在此处取一单位矢量沿曲线切线且指向自然坐标 s 增加的方向, 叫切向单位矢量, 记作 $\mathbf{e}_t$, 矢量沿此方向的投影称切向分量。另取一单位矢量沿曲线法线且指向凹侧, 称法向单位矢量, 记作 $\mathbf{e}_n$, 矢量沿此方向的投影称法向分量。任何矢量都可向 $\mathbf{e}_t$ 和 $\mathbf{e}_n$ 的方向作正交分解。值得注

意的是：直角坐标系中沿坐标轴的单位矢量是恒矢量，但单位矢量 $\mathbf{e}_t$ 和 $\mathbf{e}_n$ 将随质点在轨迹上的位置不同而改变其方向；一般来说， $\mathbf{e}_t$ 和 $\mathbf{e}_n$ 不是恒矢量。

1.2.2 圆周运动的速度 切向加速度和法向加速度

下面先讨论如何用自然坐标表示速度。如图 1-8 所示，根据定义 $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ ， $\Delta t \rightarrow 0$ 时，



$\Delta \mathbf{r}$ 的方向趋向于位移起点处的切线，其大小趋于对应的弧长 $|\Delta s|$ 。因此

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \mathbf{e}_t = \frac{ds}{dt} \mathbf{e}_t$$

图 1-8 自然坐标系中的切向速度 由式(1-7)可知

$$\mathbf{v} = v \mathbf{e}_t \quad (1-14)$$

我们首先就圆周运动讨论质点的法向加速度和切向加速度，然后推广到一般平面曲线运动。一般来说，质点作圆周运动时，不仅速度的方向要改变，而且速度的值也会改变，即质点作变速率圆周运动。

根据加速度定义，有

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \mathbf{e}_t) = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t + v \frac{d\mathbf{e}_t}{dt} \quad (1-15)$$

从式(1-15)可以看出，加速度 $\mathbf{a}$ 具有两个分量式。式中第一项 $\frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t$ ，是由于速度大小变化而引起的，其方向为切线 $\mathbf{e}_t$ 的方向，即与速度 $\mathbf{v}$ 的方向在同一直线上。因此，此项加速度分矢量称为切向加速度，用 a_t 表示，有

$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t \quad (1-16)$$

$$a_t = |\mathbf{a}_t| = \frac{dv}{dt} \quad (1-17)$$

式(1-15)中的第二项 $v \frac{d\mathbf{e}_t}{dt}$ 是由于速度方向的变化引起的，而 $\frac{d\mathbf{e}_t}{dt}$ 表示切向单位矢量随时间的变化，那么它又与哪些因素有关呢？如图 1-9 所示，质点沿着圆心为 O 点、半径为 R 的圆周作逆时针的运动。将 P 点自然坐标的切向单位矢量 $\mathbf{e}_t$ 和法向单位矢量 $\mathbf{e}_n$ 分解到直角坐标中去，有

$$\mathbf{e}_n = -\cos\theta \mathbf{i} - \sin\theta \mathbf{j}$$

$$\mathbf{e}_t = -\sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j}$$

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = -\cos\theta \frac{d\theta}{dt} \mathbf{i} - \sin\theta \frac{d\theta}{dt} \mathbf{j}$$

$$= \frac{R d\theta}{R dt} (-\cos\theta \mathbf{i} - \sin\theta \mathbf{j})$$

$$= \frac{ds}{R dt} \mathbf{e}_n$$

$$= \frac{v}{R} \mathbf{e}_n$$

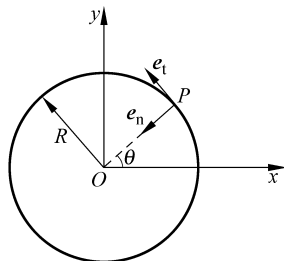


图 1-9 法向矢量的变化率

所以

$$v \frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{v^2}{R} \mathbf{e}_n$$

其方向与自然坐标的法向方向一致,代表的是加速度的法向分量,因此加速度的法向分量

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R} \mathbf{e}_n \quad (1-18)$$

$$a_n = |\mathbf{a}_n| = \frac{v^2}{R} \quad (1-19)$$

所以

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t + \frac{v^2}{R} \mathbf{e}_n \quad (1-20)$$

加速度的大小

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \quad (1-21)$$

在变速圆周运动中,由于速度的方向和大小都在变化,所以加速度的方向不再指向圆心(图 1-10),其方向为

$$\tan \varphi = \frac{a_n}{a_t}$$

现将上述结果推广到一般的平面曲线运动。在曲线轨迹上某点附近取任意三点。这三点决定一圆,若两侧的点无限接近中间的 A 点,则它们所决定的圆将无限接近于一极限圆,这个曲率圆叫做曲线在 A 点的曲率圆,如图 1-11 所示。曲率圆的半径 ρ 叫做曲线在该点的曲率半径。

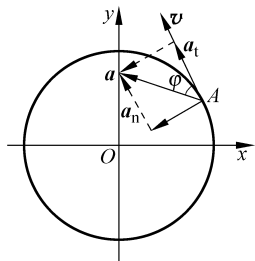


图 1-10 变速圆周运动的加速度

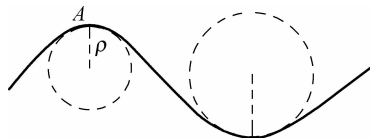


图 1-11 曲线上 A 点的曲率圆和曲率半径

这样,质点的曲线轨迹就可以看作由无穷多个圆而成。于是,仅需将圆半径 R 换作轨迹的曲率半径 ρ ,式(1-20)既适用于一般曲线运动,即

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n \quad (1-22)$$

若质点沿曲线运动时速率不变,则质点作匀速率曲线运动。这时,只有法向加速度,式(1-22)变为 $\mathbf{a} = \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n$ 。若曲线为圆,则为匀速率圆周运动,此时

$$\mathbf{a} = \frac{v^2}{R} \mathbf{e}_n \quad (1-23)$$

质点运动的快慢不变而仍有加速度,这是曲线运动的重要特征。

例 1-4 已知质点位矢随时间变化的函数形式为 $\mathbf{r} = t^2 \mathbf{i} + 2t \mathbf{j}$,式中 $\mathbf{r}$ 的单位为 m, t 的单