

第3章 矢量分析

本章目录

- 概论
- 3.1 矢量代数的基本法则
- 3.2 正交坐标系
- 3.3 坐标系间的变换
- 3.4 标量场的梯度
- 3.5 矢量场的散度
- 3.6 矢量场的旋度
- 3.7 拉普拉斯算子
- 第3章关系式
- 本章要点
- 重要术语汇总
- 习题

目标

通过学习本章内容,应该掌握:

- (1) 直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系中的矢量运算。
- (2) 三种基本坐标系中的矢量变换。
- (3) 三种基本坐标系中,计算标量函数的梯度和矢量函数的散度和旋度。
- (4) 散度定理和斯托克斯定理的应用。

概论

第2章研究波在传输线上的传播时,讨论的基本物理量主要是电压、电流、阻抗以及功率。这些量都是**标量**,也就是说,如果它是正实数,则可以由它的幅值完全确定;如果它是负数或者复数,则可以由它的幅值和相角确定(负数具有正的幅值和 $\pi(\text{rad})$ 的相角)。本章涉及**矢量**,**矢量**既有大小,又有方向。一个物体的速率是一个标量,而它的速度则是一个**矢量**。

从第4章开始到本书的后续章节中,主要讨论电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 这两个基本电磁量。这两个量以及许多其他相关量都是**矢量**。矢量分析为有效、简便地表示与处理**矢量**提供了必

要的数学工具。在三维空间要确定一个矢量,就必须确定矢量沿三个方向的分量。在研究矢量时,有几种坐标系可以使用,最常见的就是笛卡儿坐标系(直角坐标系)、圆柱坐标系以及球坐标系。在解决问题时,通常要选择适合问题几何特征的坐标系。

矢量代数规定了矢量的加法、减法,以及矢量的“乘法”运算法则。矢量代数的法则,矢量在上述三种正交坐标系中的表示(包括矢量在它们之间的变换),是本章探讨的两个主题,本章探讨的第三个主题是**矢量微积分**。矢量微积分包含矢量微分和矢量积分的法则,特殊矢量运算符(梯度、散度和旋度)的应用,以及几个定理的应用,最主要的有散度定理和斯托克斯定理,它们在电磁学的研究中非常有用。

3.1 矢量代数的基本法则

矢量是一个数学对象,类似箭头。矢量 $\mathbf{A}$,如图 3-1 所示,由**幅值**(或长度) $A = |\mathbf{A}|$ 和一个**单位矢量** $\hat{\mathbf{a}}$ 确定

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}} |\mathbf{A}| = \hat{\mathbf{a}} A. \quad (3-1)$$

单位矢量 $\hat{\mathbf{a}}$ 的幅值为 1 ($|\hat{\mathbf{a}}| = 1$),它的方向从 $\mathbf{A}$ 的尾部或末端指向 $\mathbf{A}$ 的尖端或顶端。由式(3-1)得

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\mathbf{A}}{A}. \quad (3-2)$$

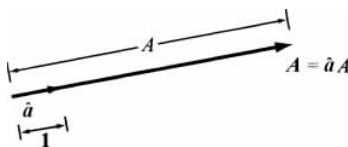


图 3-1 矢量 $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}A$ 的幅值为 $A = |\mathbf{A}|$,方向指向单位矢量 $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{A}/A$

在笛卡儿(或直角)坐标系中,如图 3-2(a)所示, x 、 y 和 z 三个坐标轴分别沿着 $\hat{\mathbf{x}}$ 、 $\hat{\mathbf{y}}$ 、 $\hat{\mathbf{z}}$ 三个相互垂直的单位矢量延伸, $\hat{\mathbf{x}}$ 、 $\hat{\mathbf{y}}$ 、 $\hat{\mathbf{z}}$ 又称为**基矢量**。因此,如图 3-2(b)所示的矢量 $\mathbf{A}$ 可以分解为

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}A_x + \hat{\mathbf{y}}A_y + \hat{\mathbf{z}}A_z, \quad (3-3)$$

其中, A_x, A_y, A_z 分别为矢量 $\mathbf{A}$ 沿 x, y, z 三个坐标轴的标量分量,分量 A_z 等于 $\mathbf{A}$ 向 z 轴的垂直投影, A_x, A_y 的定义也类似。首先对 x - y 平面内的直角三角形应用勾股定理,用 A_x, A_y 表示直角三角形的斜边 A_r ,然后再对垂直面内以 A_r, A_z 为直角边, A 为斜边的直角三角形应用勾股定理,可以得到矢量 $\mathbf{A}$ 的幅度表达式如下

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \quad (3-4)$$

因为 A 是非负的标量,故取正的平方根。根据式(3-2),单位矢量 $\hat{\mathbf{a}}$ 为

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{A}}{A} = \frac{\hat{\mathbf{x}}A_x + \hat{\mathbf{y}}A_y + \hat{\mathbf{z}}A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \quad (3-5)$$

在直角坐标系中,有时使用简化的写法 $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ 来表示具有 A_x, A_y, A_z 分量的矢量 $\mathbf{A}$ 。

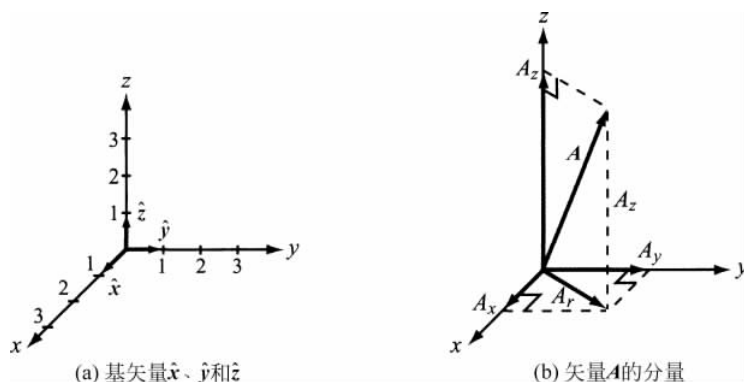


图 3-2 直角坐标系

3.1.1 两个矢量相等

如果两个矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的幅度相等,并且有相同的单位矢量,则称它们相等。因此,如果

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}A = \hat{\mathbf{x}}A_x + \hat{\mathbf{y}}A_y + \hat{\mathbf{z}}A_z, \quad (3-6(a))$$

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{b}}B = \hat{\mathbf{x}}B_x + \hat{\mathbf{y}}B_y + \hat{\mathbf{z}}B_z, \quad (3-6(b))$$

当且仅当 $A=B$, 且 $\hat{\mathbf{a}}=\hat{\mathbf{b}}$ 时, 才有 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$, 这就要求 $A_x=B_x, A_y=B_y, A_z=B_z$ 。

两个矢量相等并不意味着它们完全相同; 在直角坐标系中, 两个相隔一定距离的平行矢量, 如果具有相同的幅值, 并且指向相同的方向, 那么它们就是相等的; 但只有当它们一个重叠在另一个上面时才是相同的。

3.1.2 矢量的加法和减法

两个矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的和仍然是一个矢量, 记做矢量 $\mathbf{C}=\hat{\mathbf{x}}C_x+\hat{\mathbf{y}}C_y+\hat{\mathbf{z}}C_z$, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{A} + \mathbf{B} \\ &= (\hat{\mathbf{x}}A_x + \hat{\mathbf{y}}A_y + \hat{\mathbf{z}}A_z) + (\hat{\mathbf{x}}B_x + \hat{\mathbf{y}}B_y + \hat{\mathbf{z}}B_z) \\ &= \hat{\mathbf{x}}(A_x + B_x) + \hat{\mathbf{y}}(A_y + B_y) + \hat{\mathbf{z}}(A_z + B_z) \\ &= \hat{\mathbf{x}}C_x + \hat{\mathbf{y}}C_y + \hat{\mathbf{z}}C_z. \end{aligned} \quad (3-7)$$

因此, 矢量加法满足交换律

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}. \quad (3-8)$$

矢量的和也可以用几何方法求出, 即平行四边形法则或首尾相接法则(也叫三角形法则), 如图 3-3 所示。在平行四边形法则中, 矢量 $\mathbf{C}$ 是以 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 为边的平行四边形的对角线。在首尾相接法则中, 可以将 $\mathbf{A}$ 加到 $\mathbf{B}$ 上, 也可以将 $\mathbf{B}$ 加到 $\mathbf{A}$ 上。如将矢量 $\mathbf{A}$ 加到 $\mathbf{B}$ 上, $\mathbf{A}$ 的末端与 $\mathbf{B}$ 的顶端相接, 保持长度和方向不变, 矢量 $\mathbf{C}$ 即从 $\mathbf{B}$ 的末端开始, 到 $\mathbf{A}$ 的顶端结束。

矢量 $\mathbf{A}$ 减去矢量 $\mathbf{B}$ 等效于矢量 $\mathbf{A}$ 加上一个负的矢量 $\mathbf{B}$, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \\ &= \hat{\mathbf{x}}(A_x - B_x) + \hat{\mathbf{y}}(A_y - B_y) + \hat{\mathbf{z}}(A_z - B_z). \end{aligned} \quad (3-9)$$

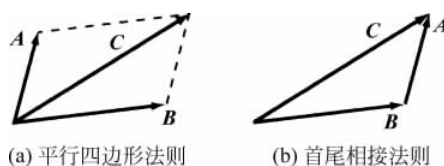


图 3-3 矢量加法

矢量加法的几何法则也同样适用于矢量减法,唯一不同的是,矢量 $(-B)$ 的箭头与矢量 B 的箭头画在线段的不同端,即矢量 B 的头尾互换。

3.1.3 位置矢量与距离矢量

空间一点 P 的位置矢量即为从原点指向点 P 的矢量。如图3-4所示,点 P_1 和 P_2 的坐标分别为 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) ,它们的位置矢量分别为

$$\mathbf{R}_1 = \overrightarrow{OP_1} = \hat{x}x_1 + \hat{y}y_1 + \hat{z}z_1, \quad (3-10(a))$$

$$\mathbf{R}_2 = \overrightarrow{OP_2} = \hat{x}x_2 + \hat{y}y_2 + \hat{z}z_2, \quad (3-10(b))$$

其中点 O 为原点。从 P_1 到 P_2 的距离矢量则定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{12} &= \overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 \\ &= \hat{x}(x_2 - x_1) + \hat{y}(y_2 - y_1) + \hat{z}(z_2 - z_1), \end{aligned} \quad (3-11)$$

P_1 和 P_2 之间的距离 d 则等于矢量 $\mathbf{R}_{12}$ 的幅度

$$d = |\mathbf{R}_{12}| = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}. \quad (3-12)$$

注意,矢量 $\mathbf{R}_{12}$ 的两个下标分别表示它的尾部和顶部的位置,如图3-4所示。

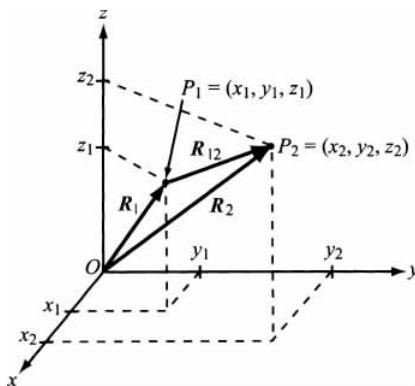


图 3-4 距离矢量 $\mathbf{R}_{12} = \overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_1$ 和 $\mathbf{R}_2$ 分别为点 P_1 和 P_2 的位置矢量

3.1.4 矢量乘法

在矢量微积分中有三类乘积: 简单乘积, 标量乘积(也叫点积、点乘), 以及矢量乘积(也叫叉积、叉乘)。

1. 简单乘积

一个矢量和一个标量的乘积叫做简单乘积。矢量 $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}A$ 与一个标量 k 的乘积产生一个矢量 $\mathbf{B}$, 矢量 $\mathbf{B}$ 的幅度为 $B = kA$, 方向与矢量 $\mathbf{A}$ 相同, 即 $\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{a}}$ 。在直角坐标系中,

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= k\mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}kA = \hat{\mathbf{x}}(kA_x) + \hat{\mathbf{y}}(kA_y) + \hat{\mathbf{z}}(kA_z) \\ &= \hat{\mathbf{x}}B_x + \hat{\mathbf{y}}B_y + \hat{\mathbf{z}}B_z.\end{aligned}\quad (3-13)$$

2. 标量积或点积

两个矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的标量积(或点积)记作 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, 读作“ $\mathbf{A}$ 点 $\mathbf{B}$ ”, 从几何上定义为矢量 $\mathbf{A}$ 的幅值与矢量 $\mathbf{B}$ 沿矢量 $\mathbf{A}$ 的投影的乘积, 反过来也一样, 即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta_{AB}, \quad (3-14)$$

其中, θ_{AB} 表示矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 之间的夹角, 如图 3-5 所示, 范围从 $\mathbf{A}$ 的末端到 $\mathbf{B}$ 的末端。它的取值范围为 $0 \leq \theta_{AB} \leq 180^\circ$ 。矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的点积结果是一个标量, 它的幅值小于或等于两个矢量幅度的乘积(当 $\theta_{AB} = 0$ 时取等号), 并且当 $0 < \theta_{AB} < 90^\circ$ 时, 它的符号为正, 当 $90^\circ < \theta_{AB} < 180^\circ$ 时, 它的符号为负。当 $\theta_{AB} = 90^\circ$ 时, 矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是相互垂直的, 而且它们的点积为零。量 $A \cos \theta_{AB}$ 是 $\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{B}$ 上的投影长度。类似地, $B \cos \theta_{AB}$ 是 $\mathbf{B}$ 在 $\mathbf{A}$ 上的投影长度。

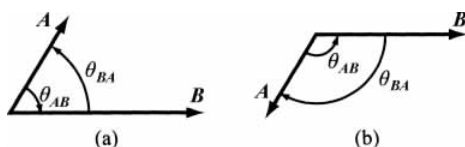


图 3-5 角 θ_{AB} 为 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 之间的夹角, 当 $0 < \theta_{AB} < 90^\circ$ 时点积结果为正, 如(a), 当 $90^\circ < \theta_{AB} < 180^\circ$ 时点积结果为负, 如(b)

点积运算满足乘法的交换律和分配律, 即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (\text{交换律}) \quad (3-15(a))$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (\text{分配律}) \quad (3-15(b))$$

由式(3-14)以及 $\theta_{AB} = \theta_{BA}$, 可以得出交换律。分配律特性表明, 两个矢量的和沿第三个矢量的投影长度, 等于两个矢量分别在第三个矢量上的投影长度之和。

一个矢量与自身的点积为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2 = A^2, \quad (3-16)$$

上式表明

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}. \quad (3-17)$$

θ_{AB} 也可以由下式确定

$$\theta_{AB} = \cos^{-1} \left[\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} \sqrt{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}} \right] \quad (3-18)$$

由于基矢量 $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ 中任何一个都垂直于另外两个, 于是

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 1, \quad (3-19(a))$$

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = 0. \quad (3-19(b))$$

设 $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$, 则 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的点积为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z) \cdot (\hat{x}B_x + \hat{y}B_y + \hat{z}B_z). \quad (3-20)$$

将式(3-19(a))和式(3-19(b))代入式(3-20), 则有

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (3-21)$$

3. 矢量积(或叉积)

两矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的矢量积(或叉积)记做 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, 读做“ $\mathbf{A}$ 叉 $\mathbf{B}$ ”, 结果仍为矢量, 定义为

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{n} AB \sin \theta_{AB}, \quad (3-22)$$

其中, $\hat{n}$ 是垂直于 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 所在平面的单位矢量, 如图 3-6(a) 所示。差积的幅度为 $AB |\sin \theta_{AB}|$, 等于以 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 为边长的平行四边形的面积。 $\hat{n}$ 的方向可以由如图 3-6(b) 所示的右手定则来确定: 令右手手指从 $\mathbf{A}$ 经过角 θ_{AB} 旋转到 $\mathbf{B}$, 右手大拇指所指的方向即为 $\hat{n}$ 的方向。由于 $\hat{n}$ 与 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 所确定的平面垂直, 所以 $\hat{n}$ 分别垂直于矢量 $\mathbf{A}$ 和矢量 $\mathbf{B}$ 。

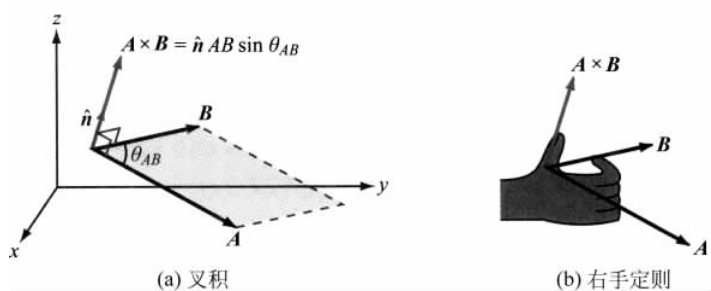


图 3-6 叉积 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 指向 $\hat{n}$ 的方向, $\hat{n}$ 垂直于 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 所在的平面, 且遵循右手定则

叉积运算满足反交换律和分配律。

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (\text{反交换律}) \quad (3-23(a))$$

反交换律可以通过右手定则来确定 $\hat{n}$ 的方向得出。分配律则源于下面的事实: 以 $\mathbf{A}$ 和 $(\mathbf{B} + \mathbf{C})$ 为边的平行四边形的面积, 等于分别以 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 为边和以 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{C}$ 为边的两个平行四边形的面积之和。

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (\text{分配律}) \quad (3-23(b))$$

一个矢量与自己的叉积为零, 即

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0. \quad (3-24)$$

从矢量叉积的定义, 即式(3-22), 容易证明在直角坐标系中的基矢量 $\hat{x}$ 、 $\hat{y}$ 、 $\hat{z}$ 满足下面的右手循环关系

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}, \quad \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}, \quad \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}. \quad (3-25)$$

注意循环顺序为 $(x, y, z, x, y, z, \dots)$, 而且

$$\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0. \quad (3-26)$$

设 $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$, 利用式(3-25)和式(3-26), 可得 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的叉积为

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z) \times (\hat{x}B_x + \hat{y}B_y + \hat{z}B_z) \\ &= \hat{x}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{y}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{z}(A_xB_y - A_yB_x).\end{aligned}\quad (3-27)$$

式(3-27)给出的结果具有循环形式,因此叉积也可以表示为行列式的形式。

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.\quad (3-28)$$

例 3-1 矢量与角。

在直角坐标系中,矢量 $\mathbf{A}$ 从原点指向点 $P_1 = (2, 3, 3)$, 矢量 $\mathbf{B}$ 由点 P_1 指向点 $P_2 = (1, -2, 2)$ 。试求:

- 矢量 $\mathbf{A}$, 幅度 A 以及单位矢量 $\hat{\mathbf{a}}$;
- 矢量 $\mathbf{A}$ 与 y 轴的夹角;
- 矢量 $\mathbf{B}$;
- $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的夹角 θ_{AB} ;
- 从原点到矢量 $\mathbf{B}$ 的垂直距离。

解:

(a) 矢量 $\mathbf{A}$ 即为点 $P_1 = (2, 3, 3)$ 的位置矢量, 如图 3-7 所示, 即

$$\mathbf{A} = \hat{x}2 + \hat{y}3 + \hat{z}3,$$

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{22},$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{A}}{A} = (\hat{x}2 + \hat{y}3 + \hat{z}3) / \sqrt{22}.$$

(b) 矢量 $\mathbf{A}$ 与 y 轴的夹角 β , 可从下式

$$\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{y}} = |\mathbf{A}| |\hat{\mathbf{y}}| \cos\beta = A \cos\beta,$$

或

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{y}}}{A}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{22}}\right) = 50.2^\circ.$$

(c) 矢量 $\mathbf{B}$ 为

$$\mathbf{B} = \hat{x}(1-2) + \hat{y}(-2-3) + \hat{z}(2-3) = -\hat{x} - \hat{y}5 - \hat{z}.$$

(d) 矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的夹角

$$\theta_{AB} = \cos^{-1}\left[\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|}\right] = \cos^{-1}\left[\frac{(-2-15-3)}{\sqrt{22} \times \sqrt{27}}\right] = 145.1^\circ.$$

(e) 坐标原点到矢量 $\mathbf{B}$ 的垂直距离即为距离 $|\overrightarrow{OP_3}|$, 如图 3-7 所示, 从直角三角形 OP_1P_3 有

$$|\overrightarrow{OP_3}| = |\mathbf{A}| \sin(180^\circ - \theta_{AB}) = \sqrt{22} \sin(180^\circ - 145.1^\circ) = 2.68.$$

练习 3-1 在直角坐标系中, 求点 $P_1 = (1, 2, 3)$ 到点 $P_2 = (-1, -2, 3)$ 的距离矢量。

答案: $\overrightarrow{P_1P_2} = -\hat{x}2 - \hat{y}4$ 。

练习 3-2 利用叉积, 求例 3-1 中矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的夹角 θ_{AB} 。

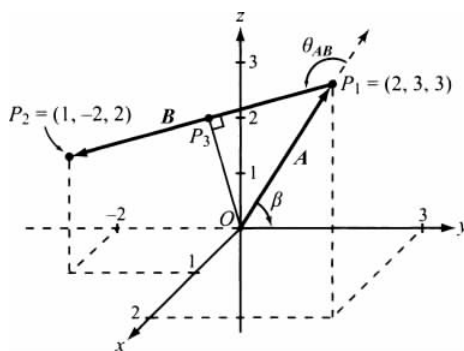


图 3-7 例 3-1 的几何关系

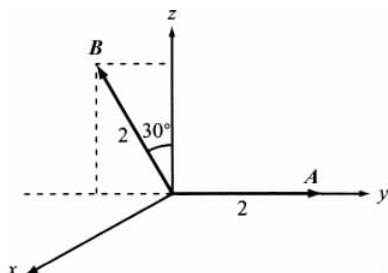


图 E3.4

答案: $\theta_{AB} = 145.1^\circ$ 。

练习 3-3 求例 3-1 中的矢量 $\mathbf{B}$ 与 z 轴的夹角。

答案: 101.1° 。

练习 3-4 在 y - z 平面中,有两个幅值均为 2 的矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$,如图 E3.4 所示。求: (a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$; (b) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 。

答案: (a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -2$; (b) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{x}3.46$ 。

练习 3-5 如果 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$,那么 $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ 成立吗?

答案: 不一定成立。

3.1.5 标量和矢量的三重积

当三个矢量相乘的时候,并非所有的点积、叉积组合都是有意义的。例如

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

就是没有意义的,因为 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ 是一个标量,矢量 $\mathbf{A}$ 与标量的叉积,在矢量代数中是没有定义的。除了 $\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ 形式的乘积以外,三个矢量的乘积,只有两种有意义,即标量三重积和矢量三重积。

1. 标量三重积

一个矢量点乘另外两个矢量的叉积,其结果为标量,故称为标量三重积。标量三重积满足以下循环规则

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \quad (3-29)$$

只要保持循环顺序(ABCABC...)不变,式(3-29)即成立。矢量 $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$, 以及 $\mathbf{C} = (C_x, C_y, C_z)$ 的标量三重积可以表示为 3×3 的行列式形式。

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \quad (3-30)$$

式(3-29)、式(3-30)的正确性,可以通过将 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 表示为分量形式,并进行相应的乘法运算而得到证实。

2. 矢量三重积

矢量三重积定义为一个矢量叉乘另外两个矢量的叉积,即

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}). \quad (3-31)$$

由于叉乘的结果是矢量,因此矢量三重积也是矢量。矢量三重积不满足结合律,即

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}, \quad (3-32)$$

这代表叉乘运算的先后顺序十分重要。同样地,通过将 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 扩展成分量形式,可以得到

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \quad (3-33)$$

这一关系叫做 bac-cab 法则。

例 3-2 矢量三重积。

已知 $\mathbf{A} = \hat{x} - \hat{y} + \hat{z}2$, $\mathbf{B} = \hat{y} + \hat{z}$, $\mathbf{C} = -\hat{x}2 + \hat{z}3$ 。求 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$, 并与 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 做比较。

解:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\hat{x}3 - \hat{y} + \hat{z}$$

以及

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\hat{x}3 + \hat{y}7 - \hat{z}2.$$

利用相似过程可以得到 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \hat{x}2 + \hat{y}4 + \hat{z}$ 。可以看出, 这两个矢量三重积的结果不同, 从而验证了式(3-32)的不等关系。

复习题

- 3-1 两个矢量何时相等? 何时相同?
- 3-2 何时一个点的位置矢量等于两个点间的距离矢量?
- 3-3 如果 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, θ_{AB} 是多少?
- 3-4 如果 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$, θ_{AB} 是多少?
- 3-5 $\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ 是矢量三重积吗?
- 3-6 如果 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$, 那么 $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ 成立吗?

3.2 正交坐标系

三维坐标系可以唯一确定空间某点的位置, 以及矢量的大小和方向。坐标系统可以是正交的, 也可以是非正交的。

一个正交坐标系统, 它的三个坐标轴是互相垂直的。

非正交坐标系统非常特殊, 很少用来解决实际问题。人们设计了很多正交坐标系统, 但最常用的是

- 笛卡儿(或直角)坐标系;
- 圆柱坐标系;
- 球坐标系。

为什么需要多种坐标系呢? 无论选择何种坐标系, 空间中某点的位置、物体的形状都是相同的, 但如果选择一个最适合问题几何特点的坐标系, 对解决实际问题将大有帮助。因此, 在接下来的几节中, 将探讨上面提到的三种正交坐标系的特点, 并在 3-3 节中介绍如何将一个点或者一个矢量, 从一个坐标系变换到另一个坐标系。

3.2.1 直角坐标系

在 3-1 节阐述矢量代数法则时, 介绍过直角坐标系。这些法则在本节将不再重复, 已将它们归纳在表 3-1 中。微分学包括微分长度、微分面积和微分体积。在直角坐标系中, 如

图 3-8 所示,微分长度矢量可表示为

$$d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{x}}dl_x + \hat{\mathbf{y}}dl_y + \hat{\mathbf{z}}dl_z = \hat{\mathbf{x}}dx + \hat{\mathbf{y}}dy + \hat{\mathbf{z}}dz, \quad (3-34)$$

其中, $dl_x = dx$ 是沿 $\hat{\mathbf{x}}$ 方向的微分长度, 对 $dl_y = dy$ 、 $dl_z = dz$ 的解释与之类似。

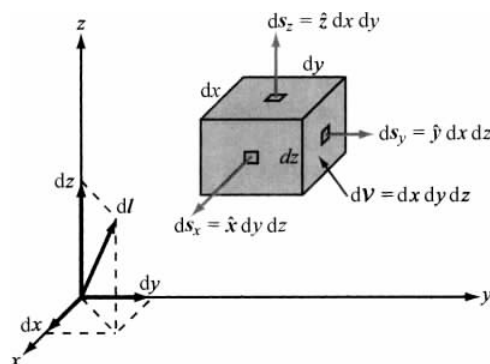


图 3-8 直角坐标系中的微分长度、微分面积与微分体积

微分面积矢量 $d\mathbf{s}$ 也是一个矢量, 它的幅值 ds 等于两个微分长度的乘积(例如 dl_y 和 dl_z), 方向则沿着第三个方向的单位矢量(例如 $\hat{\mathbf{x}}$)。所以, y - z 平面的微分面积矢量为

$$d\mathbf{s}_x = \hat{\mathbf{x}}dl_ydl_z = \hat{\mathbf{x}}dydz \quad (y\text{-}z \text{ 平面}) \quad (3-35(a))$$

其中 ds 的下标表示了它的方向。类似地,

$$d\mathbf{s}_y = \hat{\mathbf{y}}dxdz \quad (x\text{-}z \text{ 平面}) \quad (3-35(b))$$

$$d\mathbf{s}_z = \hat{\mathbf{z}}dxdy \quad (x\text{-}y \text{ 平面}) \quad (3-35(c))$$

微分体积等于所有三个微分长度的乘积。

$$dV = dxdydz. \quad (3-36)$$

表 3-1 矢量关系汇总

	直角坐标系	圆柱坐标系	球坐标系
坐标变量	x, y, z	r, ϕ, z	R, θ, ϕ
矢量表示 $\mathbf{A} =$	$\hat{\mathbf{x}}A_x + \hat{\mathbf{y}}A_y + \hat{\mathbf{z}}A_z$	$\hat{\mathbf{r}}A_r + \hat{\boldsymbol{\phi}}A_\phi + \hat{\mathbf{z}}A_z$	$\hat{\mathbf{R}}A_R + \hat{\boldsymbol{\theta}}A_\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}}A_\phi$
矢量 $\mathbf{A}$ 的幅值 $ \mathbf{A} =$	$\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$	$\sqrt{A_r^2 + A_\phi^2 + A_z^2}$	$\sqrt{A_R^2 + A_\theta^2 + A_\phi^2}$
位置矢量 $\overrightarrow{OP_1} =$	$\hat{\mathbf{x}}x_1 + \hat{\mathbf{y}}y_1 + \hat{\mathbf{z}}z_1,$ for $P = (x_1, y_1, z_1)$	$\hat{\mathbf{r}}r_1 + \hat{\mathbf{z}}z_1,$ for $P = (r_1, \phi_1, z_1)$	$\hat{\mathbf{R}}R_1,$ for $P = (R_1, \theta_1, \phi_1)$
基矢量特性	$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 1$ $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = 0$ $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}$ $\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}}$ $\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}$	$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 1$ $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0$ $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{z}}$ $\hat{\boldsymbol{\phi}} \times \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{r}}$ $\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}$	$\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = 1$ $\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \hat{\mathbf{R}} = 0$ $\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}$ $\hat{\boldsymbol{\theta}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{R}}$ $\hat{\boldsymbol{\phi}} \times \hat{\mathbf{R}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$

续表

	直角坐标系	圆柱坐标系	球坐标系
点积 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} =$	$A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$	$A_r B_r + A_\phi B_\phi + A_z B_z$	$A_R B_R + A_\theta B_\theta + A_\phi B_\phi$
叉积 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} =$	$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ A_r & A_\phi & A_z \\ B_r & B_\phi & B_z \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \hat{R} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ A_R & A_\theta & A_\phi \\ B_R & B_\theta & B_\phi \end{vmatrix}$
微分长度 $d\mathbf{l} =$	$\hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz$	$\hat{r}dr + \hat{\phi}r d\phi + \hat{z}dz$	$\hat{R}dR + \hat{\theta}R d\theta + \hat{\phi}R \sin\theta d\phi$
微分面积	$ds_x = \hat{x}dydz$ $ds_y = \hat{y}dxdz$ $ds_z = \hat{z}dxdy$	$ds_r = \hat{r}r d\phi dz$ $ds_\phi = \hat{\phi}dr dz$ $ds_z = \hat{z}r dr d\phi$	$ds_R = \hat{R}R^2 \sin\theta d\theta d\phi$ $ds_\theta = \hat{\theta}R \sin\theta dR d\phi$ $ds_\phi = \hat{\phi}R dR d\theta$
微分体积 $dV =$	$dxdydz$	$rdrd\phi dz$	$R^2 \sin\theta dR d\theta d\phi$

3.2.2 圆柱坐标系

圆柱坐标系对于求解具有圆柱对称性的问题十分有用,例如用于求解同轴电缆单位长度的电容。在圆柱坐标系中,某一点的位置用三个变量 r 、 ϕ 和 z 来确定,如图 3-9 所示。坐标 r 是 x - y 平面内的径向距离, ϕ 是从正 x 轴方向开始度量的方位角, z 与前面的直角坐标系中的定义相同。它们的范围分别是: $0 \leq r \leq \infty$, $0 \leq \phi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$ 。点 $P(x_1, y_1, z_1)$ 是三个面的交点,如图 3-9 所示。这三个面分别是由 $r=r_1$ 确定的圆柱面,由 $\phi=\phi_1$ 确定的垂直半平面(从 z 轴向外延伸),以及由 $z=z_1$ 确定的水平面。

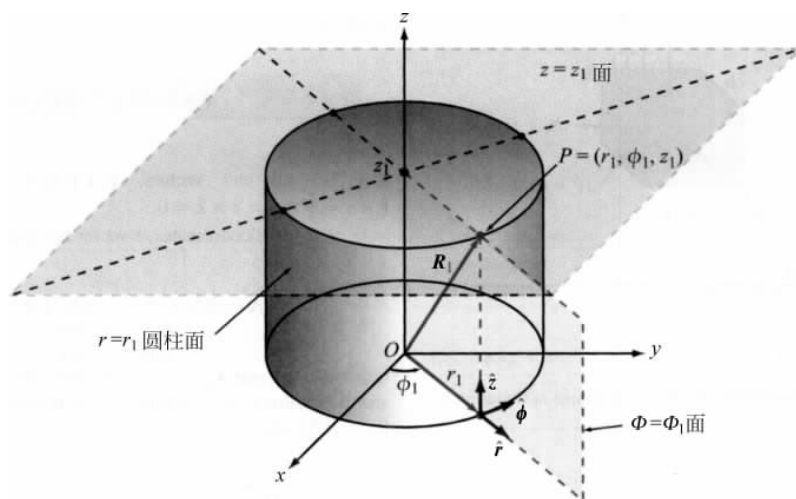


图 3-9 圆柱坐标系中的点 $P(r_1, \phi_1, z_1)$; r_1 是 x - y 平面上从原点出发的径向距离; ϕ_1 是 x - y 平面上从 x 轴指向 y 轴的夹角; z_1 是到 x - y 平面的垂直距离

坐标系中相互垂直的基矢量为 $\hat{r}$ 、 $\hat{\phi}$ 和 $\hat{z}$, 其中 $\hat{r}$ 沿 r 指向远离原点的方向, $\hat{\phi}$ 指向与圆柱面相切的方向, $\hat{z}$ 则沿垂直方向。直角坐标系中的基矢量 $\hat{x}$ 、 $\hat{y}$ 、 $\hat{z}$ 与 P 点的位置无关, 而圆柱

坐标系则不同,两个基矢量 $\hat{r}$ 和 $\hat{\phi}$ 都是 $\hat{\phi}$ 的函数。

基矢量 $\hat{r}$ 、 $\hat{\phi}$ 和 $\hat{z}$ 满足下面的右手循环关系

$$\hat{r} \times \hat{\phi} = \hat{z}, \quad \hat{\phi} \times \hat{z} = \hat{r}, \quad \hat{z} \times \hat{r} = \hat{\phi}, \quad (3-37)$$

正如所有的单位矢量一样, $\hat{r} \cdot \hat{r} = \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$, $\hat{r} \times \hat{r} = \hat{\phi} \times \hat{\phi} = \hat{z} \times \hat{z} = 0$ 。

在圆柱坐标系中,一个矢量可表示为

$$\mathbf{A} = \hat{a} | \mathbf{A} | = \hat{r} A_r + \hat{\phi} A_\phi + \hat{z} A_z, \quad (3-38)$$

其中 A_r, A_ϕ, A_z 分别为 $\mathbf{A}$ 沿着 $\hat{r}$ 、 $\hat{\phi}$ 和 $\hat{z}$ 三个方向的分量。应用式(3-17),可得到矢量 $\mathbf{A}$ 的幅值为

$$| \mathbf{A} | = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} = \sqrt{A_r^2 + A_\phi^2 + A_z^2}. \quad (3-39)$$

位置矢量 $\vec{OP}$ 仅有沿着 r 和 z 方向的分量,如图3-9所示。

$$\mathbf{R}_1 = \vec{OP} = \hat{r} r_1 + \hat{z} z_1. \quad (3-40)$$

由于 $\hat{r}$ 与 ϕ_1 有关,所以 $\mathbf{R}_1$ 也与 ϕ_1 有关。当使用式(3-40)表示点 $P(r_1, \phi_1, z_1)$ 的位置矢量时,必须明确 $\hat{r}$ 所对应的 ϕ_1 。

圆柱坐标系中的一个微分体积元如图3-10所示。沿 $\hat{r}$ 、 $\hat{\phi}$ 和 $\hat{z}$ 的微分长度分别为

$$dl_r = dr, \quad dl_\phi = r d\phi, \quad dl_z = dz. \quad (3-41)$$

需要注意的是,沿 $\hat{\phi}$ 的微分长度为 $r d\phi$,而不是仅有 $d\phi$ 。圆柱坐标系中的微分长度 dl 为

$$dl = \hat{r} dl_r + \hat{\phi} dl_\phi + \hat{z} dl_z = \hat{r} dr + \hat{\phi} r d\phi + \hat{z} dz. \quad (3-42)$$

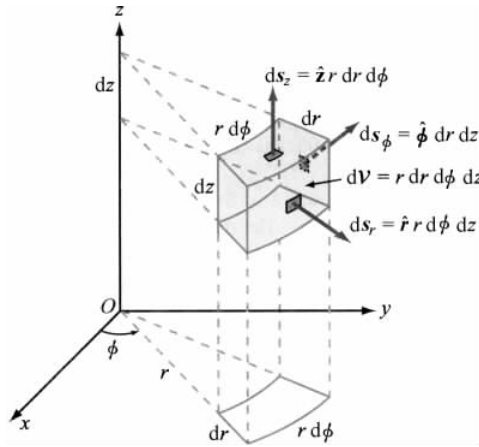


图 3-10 圆柱坐标系中的微分面积与微分体积

正如前面直角坐标系中阐明的,任何两个微分长度的乘积,等于一个微分面积矢量的幅值,矢量微分面积的法向沿着第三个坐标的方向。因此

$$ds_r = \hat{r} dl_\phi dl_z = \hat{r} r d\phi dz \quad (\phi-z \text{ 平面}) \quad (3-43(a))$$

$$ds_\phi = \hat{\phi} dl_r dl_z = \hat{\phi} dr dz \quad (r-z \text{ 平面}) \quad (3-43(b))$$

$$ds_z = \hat{z} dl_r dl_\phi = \hat{z} r dr d\phi \quad (r-\phi \text{ 平面}) \quad (3-43(c))$$

微分体积等于三个坐标的微分长度的乘积。

$$dV = dl_r dl_\phi dl_z = r dr d\phi dz. \quad (3-44)$$

圆柱坐标系的上述性质,都已经归纳在表 3-1 中了。

例 3-3 圆柱坐标系中的距离矢量。

求如图 3-11 所示的圆柱坐标系中矢量 $\mathbf{A}$ 的单位矢量。

解: 在三角形 OP_1P_2 中,有

$$\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_1} + \mathbf{A}.$$

因此

$$\mathbf{A} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \hat{r}r_0 - \hat{z}h,$$

以及

$$\hat{a} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\hat{r}r_0 - \hat{z}h}{\sqrt{r_0^2 + h^2}}.$$

注意到 $\mathbf{A}$ 的表达式与 ϕ_0 无关。也就是说,在圆柱坐标系中,所有从 P_1 点出发,指向 x - y 平面内 $r=r_0$ 的圆上任一点的矢量,都是相同的,这种不确定性,可以根据 $\mathbf{A}$ 通过的点处 $\phi = \phi_0$ 来消除。

例 3-4 圆柱面积。

计算由 $r=5, 30^\circ \leq \phi \leq 60^\circ, 0 \leq z \leq 3$ 确定的圆柱面的面积,如图 3-12 所示。

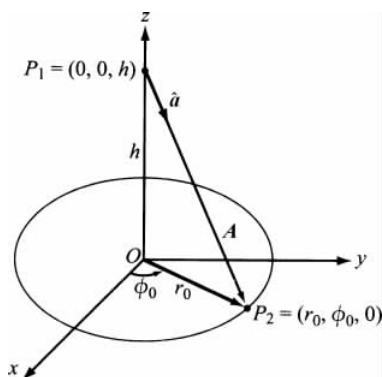


图 3-11 例 3-3 题图

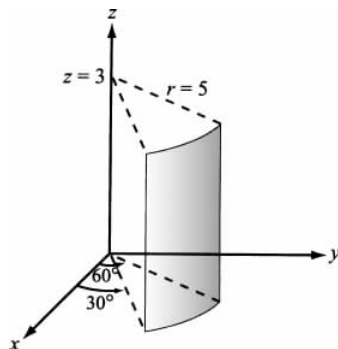


图 3-12 例 3-4 的圆柱面

解: 所述圆柱面如图 3-12 所示。根据式(3-43(a))给出的 r 为常数的面元表示式,有

$$S = r \int_{\phi=30^\circ}^{60^\circ} d\phi \int_{z=0}^3 dz = 5\phi \left| \frac{\pi}{6} \right|_0^3 = \frac{5\pi}{2}.$$

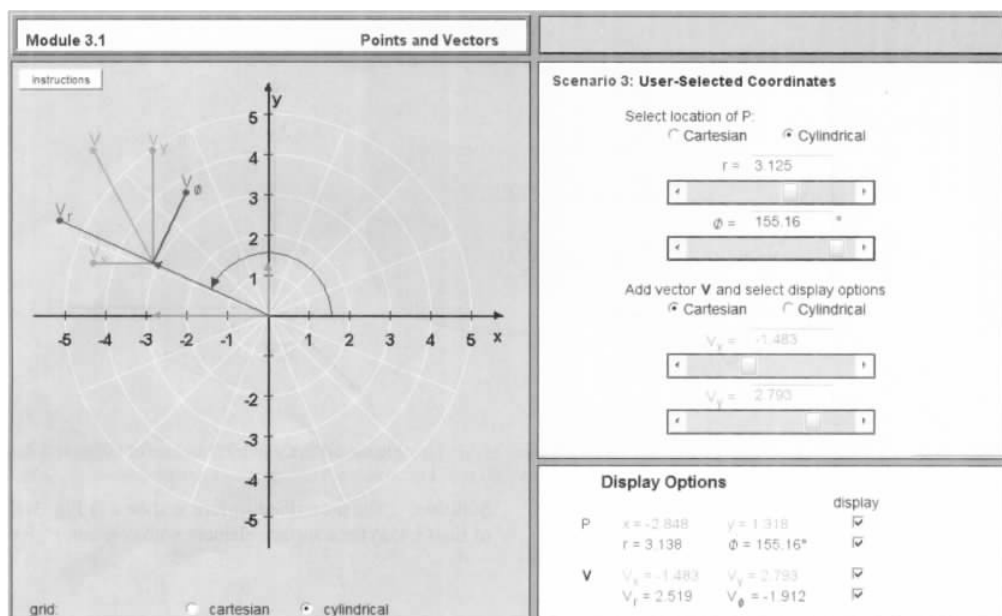
注意: 在确定积分范围时,要将角度 ϕ 转换成弧度。

练习 3-6 半径为 $r=5\text{cm}$ 的圆柱,与 z 轴同心,上下分别延伸到 $z=3\text{cm}$ 和 $z=-3\text{cm}$ 。利用式(3-44),求圆柱的体积。

答案: 472.1cm^3 。

◎CD 模块 3.1 点和矢量

观察直角坐标系中 (x, y) 和圆柱坐标系中 (r, ϕ) 之间点和矢量的关系。



3.2.3 球坐标

在球坐标系中,空间中一点的位置由变量 R 、 θ 和 ϕ 唯一确定,如图 3-13 所示。距离坐标 R ,量度这一点到原点的距离,它描述了一个圆心位于原点,半径为 R 的球形范围。天顶角 θ ,衡量该点偏离正 z 轴的角度,描述了一个顶点在原点的圆锥面。而方位角 ϕ 与柱坐标中的定义相同。 R 、 θ 和 ϕ 的范围分别是: $0 \leq R \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ 。基矢量 $\hat{\mathbf{R}}$ 、 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 满足以下的右手循环关系

$$\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{R}}, \quad \hat{\boldsymbol{\phi}} \times \hat{\mathbf{R}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (3-45)$$

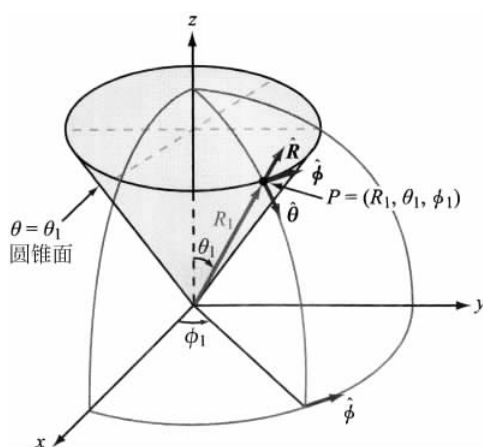


图 3-13 球坐标系中的点 $P(R_1, \theta_1, \phi_1)$

用分量为 A_R 、 A_θ 和 A_ϕ 表示的矢量 $\mathbf{A}$ 可写为

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}} |\mathbf{A}| = \hat{\mathbf{R}}A_R + \hat{\boldsymbol{\theta}}A_\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}}A_\phi, \quad (3-46)$$

其幅值为

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} = \sqrt{A_R^2 + A_\theta^2 + A_\phi^2}. \quad (3-47)$$

点 $P(R_1, \theta_1, \phi_1)$ 的位置矢量很简单, 即

$$\mathbf{R}_1 = \overrightarrow{OP} = \hat{\mathbf{R}}R_1, \quad (3-48)$$

要牢记 $\hat{\mathbf{R}}$ 与 θ_1 和 ϕ_1 有关。

如图 3-14 所示, 沿 $\hat{\mathbf{R}}$ 、 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 的微分长度为

$$dl_R = dR, \quad dl_\theta = R d\theta, \quad dl_\phi = R \sin\theta d\phi. \quad (3-49)$$

因此, 矢量微分长度 $d\mathbf{l}$, 矢量微分面积 ds , 以及微分体积 dV 的表达式为

$$d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{R}}dl_R + \hat{\boldsymbol{\theta}}dl_\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}}dl_\phi = \hat{\mathbf{R}}dR + \hat{\boldsymbol{\theta}}R d\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}}R \sin\theta d\phi, \quad (3-50(a))$$

$$ds_R = \hat{\mathbf{R}}dl_\theta dl_\phi = \hat{\mathbf{R}}R^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad (\theta-\phi \text{ 球面}) \quad (3-50(b))$$

$$ds_\theta = \hat{\boldsymbol{\theta}}dl_R dl_\phi = \hat{\boldsymbol{\theta}}R \sin\theta dR d\phi \quad (R-\phi \text{ 球面}) \quad (3-50(c))$$

$$ds_\phi = \hat{\boldsymbol{\phi}}dl_R dl_\theta = \hat{\boldsymbol{\phi}}R dR d\theta \quad (R-\theta \text{ 球面}) \quad (3-50(d))$$

$$dV = dl_R dl_\theta dl_\phi = R^2 \sin\theta dR d\theta d\phi. \quad (3-50(e))$$

这些关系都归纳在表 3-1 中。

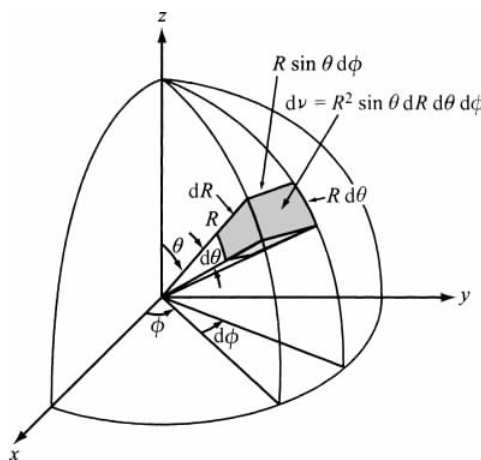


图 3-14 球坐标的微分体积

科技摘要 5 全球定位系统

全球定位系统 (GPS), 是由美国国防部在 20 世纪 80 年代研发的一个军用导航工具, 现在已经演化成带有许多民用应用的系统, 例如车辆跟踪、飞机导航、汽车导航地图、手机导航地图, 如图 TF5-1 所示, 以及土地测绘等。整个全球定位系统包含三个部分。**空间部分**由 24 个卫星组成, 如图 TF5-2 所示。每颗卫星都是在 12 000 英里高的轨道上与地球同步运行的, 每 12 个小时绕地球一圈, 并且能够发射持续的编码时间信号。所有的卫星发射器在

两个特定的频率,即 1.575 42GHz 和 1.227 60GHz 播发码信息。**用户部分**由手持或者车载的接收机组成,通过接收和处理多样的卫星信号来确定他们的位置。第三部分是由 5 个**地面基站**组成的网络,分布在世界各地,它们负责监控卫星并且为卫星提供最新的、精确的轨道信息。GPS 在水平和垂直的定位误差都在 30m 以内,但利用**差分全球定位系统**可以将误差改进到 1m 以内。(参见最后部分。)



图 TF5-1 iPhone 地图



图 TF5-2 GPS 卫星星座示意。每个平面内有 4 颗卫星,海拔 20 200km,轨道倾角 55°

1. 工作原理

三角测量技术确定任意物体在三维空间中的位置 (x_0, y_0, z_0) ,是利用测量该点到三个相互独立且空间位置已知的点 (x_1, y_1, z_1) 到 (x_3, y_3, z_3) 之间的距离 d_1, d_2 和 d_3 来实现的。在 GPS 中,通过测量信号从卫星传送到接收装置所花费的时间,然后再给时间乘以光速 $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$,即可得到接收装置到卫星的距离。时间的同步是利用原子钟来获得的。卫星使用非常精确的时钟,精度可达 3ns。而接收机中使用的普通且廉价的石英钟,精确度就稍差些。因此,接收机中的石英钟与卫星中的时钟相比,会有不确定的**时间偏移误差** t_0 。为了校正 GPS 接收机中的时间误差,则需要第四个卫星提供的信号。

汽车中的 GPS 接收机与 4 个 GPS 卫星的距离分别为 $d_1 \sim d_4$,如图 TF5-3 所示。每一个卫星通过发射信息来确定各自的轨道坐标,如 1 号卫星为 (x_1, y_1, z_1) ,其他卫星也是如此,它同时还会向其他所有卫星发送一串二进制码序列。GPS 接收器产生相同的二进制序列,并将这些码与从 1 号卫星接收到的序列相比较,来确定传输距离为 d_1 时所需要的时间 t_1 。2 号到 4 号卫星的处理过程也相似,可以得到下面 4 个方程:

$$d_1^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 = c[(t_1 + t_0)]^2,$$

$$d_2^2 = (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (z_2 - z_0)^2 = c[(t_2 + t_0)]^2,$$

$$d_3^2 = (x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2 + (z_3 - z_0)^2 = c[(t_3 + t_0)]^2,$$

$$d_4^2 = (x_4 - x_0)^2 + (y_4 - y_0)^2 + (z_4 - z_0)^2 = c[(t_4 + t_0)]^2.$$

4 颗卫星将各自的坐标 (x_1, y_1, z_1) 到 (x_4, y_4, z_4) 报告给 GPS 接收机,从中可以直接计算时间延迟 $t_1 \sim t_4$ 。未知量就是 (x_0, y_0, z_0) ,即 GPS 接收机的坐标,以及它的时钟偏移时间

t_0 , 联立求解这 4 个方程, 即可得到需要的位置信息。

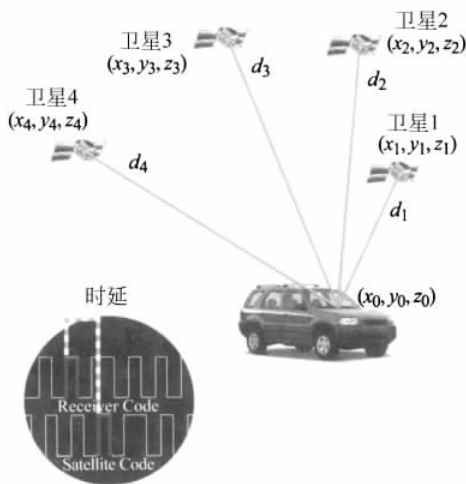


图 TF5-3 位于 (x_0, y_0, z_0) 处的车载 GPS 接收机

2. 差分全球定位系统

30-m GPS 定位不准确的原因包括: 取决于地球上接收器位置的**时延误差**(由于对流层中光速和实际信号速度不同)、高层建筑反射信号导致的延时以及卫星位置误报等。**差分全球定位系统**, 简称 DGPS, 使用位置坐标已知的固定参考接收机, 通过计算基于 GPS 估计的位置与它的真实位置的误差, **参考接收机** 可以建立坐标校正因子, 并把校正因子发送给该地区的所有 DGPS 接收机。利用这个校正信息, 定位误差通常可以降低到大约 1m。

例 3-5 球坐标系中的表面积。

球形带, 是半径为 3cm 的球面的一部分, 如图 3-15 所示。计算球带的面积。

解: 根据半径为 R 的球面元的面积, 即式(3-50(b)), 可得

$$S = R^2 \int_{\theta=30^\circ}^{60^\circ} \sin\theta d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = 9(-\cos\theta) \Big|_{30^\circ}^{60^\circ} \Big|_0^{2\pi} (\text{cm}^2) \\ = 18\pi(\cos 30^\circ - \cos 60^\circ) = 20.7 \text{ cm}^2.$$

例 3-6 球上的电荷。

半径为 2cm 的球, 包含电荷, 且体电荷密度 ρ_v 为

$$\rho_v = 4\cos^2\theta (\text{C/m}^3).$$

计算球包含的总电荷 Q 。

解:

$$Q = \int_V \rho_v dV = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{R=0}^{2 \times 10^{-2}} (4\cos^2\theta) R^2 \sin\theta dR d\theta d\phi \\ = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{R^3}{3} \right) \Big|_0^{2 \times 10^{-2}} \sin\theta \cos^2\theta d\theta d\phi$$

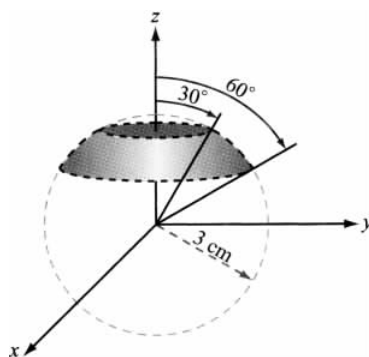


图 3-15 例 3-5 中的球带

$$\begin{aligned}
&= \frac{32}{3} \times 10^{-6} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \Big|_0^{\pi} d\phi \\
&= \frac{64}{9} \times 10^{-6} \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= \frac{128\pi}{9} \times 10^{-6} = 44.68(\mu\text{C}).
\end{aligned}$$

注意: 在计算关于 R 的积分之前, 先将 R 的单位转换成 m 。

3.3 坐标系间的变换

空间给定某一点的位置, 显然不取决于坐标系的选择, 即它的位置总是相同的, 与使用哪一种确定的坐标系去表示它无关, 对矢量也是如此。然而, 对于一个给定的问题, 某种确定的坐标系也许要比其他坐标系更适合, 因此, 使用某种方法, 将问题从一个坐标系变换到另一个坐标系是十分必要的。本节将建立直角坐标系中的变量 (x, y, z) 、圆柱坐标系中的变量 (r, ϕ, z) 以及球坐标系中的变量 (R, θ, ϕ) 之间的关系。以后利用这些关系, 可以将三种坐标系中任何一种表示的矢量, 变换到其他两种坐标系中去表示。

3.3.1 直角坐标到圆柱坐标间的变换

点 P 的直角坐标为 (x, y, z) , 圆柱坐标为 (r, ϕ, z) , 如图 3-16 所示。两个坐标系共用坐标 z , 另外两对坐标之间的关系则可以从如图 3-16 所示的几何关系得到。

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right), \quad (3-51)$$

相应的逆关系为

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi. \quad (3-52)$$

下面在 x - y 平面内画出了单位矢量 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{r}$ 以及 $\hat{\phi}$ 的方向, 如图 3-17 所示, 由此可以得到下述关系

$$\hat{r} \cdot \hat{x} = \cos \phi, \quad \hat{r} \cdot \hat{y} = \sin \phi, \quad (3-53(a))$$

$$\hat{\phi} \cdot \hat{x} = -\sin \phi, \quad \hat{\phi} \cdot \hat{y} = \cos \phi. \quad (3-53(b))$$

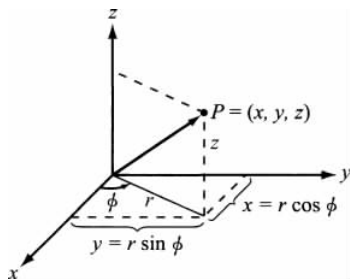


图 3-16 直角坐标 (x, y, z) 与圆柱坐标 (r, ϕ, z) 之间的关系

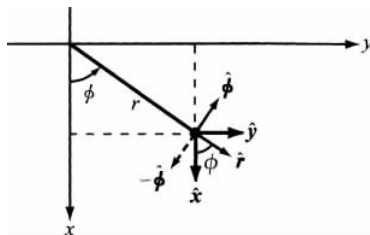


图 3-17 基矢量 $(\hat{x}, \hat{y})$ 与 $(\hat{r}, \hat{\phi})$ 之间的相互关系

为了用 $\hat{x}$ 、 $\hat{y}$ 表示 $\hat{r}$,将 $\hat{r}$ 写成以下形式

$$\hat{r} = \hat{x}a + \hat{y}b, \quad (3-54)$$

其中, a 和 b 是未知的变换系数。由点积 $\hat{r} \cdot \hat{x}$ 可得

$$\hat{r} \cdot \hat{x} = \hat{x} \cdot \hat{x}a + \hat{y} \cdot \hat{x}b = a. \quad (3-55)$$

比较式(3-55)与式(3-53(a)),可知 $a = \cos\phi$ 。类似地,对式(3-54)计算点积 $\hat{r} \cdot \hat{y}$,可得 $b = \sin\phi$ 。因此

$$\hat{r} = \hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi. \quad (3-56(a))$$

对 $\hat{\phi}$ 重复同样的运算,可得

$$\hat{\phi} = -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi. \quad (3-56(b))$$

对于两种坐标系,第三个基矢量 $\hat{z}$ 则是相同的。求解式(3-56(a))和式(3-56(b))中的 $\hat{x}$ 和 $\hat{y}$,可以得到以下逆关系

$$\hat{x} = \hat{r}\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi, \quad (3-57(a))$$

$$\hat{y} = \hat{r}\sin\phi + \hat{\phi}\cos\phi. \quad (3-57(b))$$

式(3-56)、式(3-57)给定的关系,不仅可用于基矢量 $(\hat{x}, \hat{y})$ 和 $(\hat{r}, \hat{\phi})$ 之间的相互转换,还可以用于将一个坐标系中矢量的分量表示转换成另外一个坐标系中矢量的分量表示。例如,直角坐标系中的矢量 $\mathbf{A} = \hat{r}A_x + \hat{\phi}A_y + \hat{z}A_z$,可以利用式(3-56(a))和式(3-56(b))将矢量 $\mathbf{A}$ 转换成圆柱坐标系中的 $\mathbf{A} = \hat{r}A_r + \hat{\phi}A_\phi + \hat{z}A_z$,即

$$A_r = A_x\cos\phi + A_y\sin\phi, \quad (3-58(a))$$

$$A_\phi = -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi, \quad (3-58(b))$$

相反地

$$A_x = A_r\cos\phi - A_\phi\sin\phi, \quad (3-59(a))$$

$$A_y = A_r\sin\phi + A_\phi\cos\phi. \quad (3-59(b))$$

本小节及后续两小节中给出的变换关系归纳在表 3-2 中。

表 3-2 坐标变换关系

变 换	坐标变量	单位基矢量	矢量的分量
直角坐标 到柱坐标	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\hat{r} = \hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi$	$A_r = A_x\cos\phi + A_y\sin\phi$
	$\phi = \tan^{-1}(y/x)$	$\hat{\phi} = -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi$	$A_\phi = -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi$
	$z = z$	$\hat{z} = \hat{z}$	$A_z = A_z$
柱坐标到 直角坐标	$x = r\cos\phi$	$\hat{x} = \hat{r}\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi$	$A_x = A_r\cos\phi - A_\phi\sin\phi$
	$y = r\sin\phi$	$\hat{y} = \hat{r}\sin\phi + \hat{\phi}\cos\phi$	$A_y = A_r\sin\phi + A_\phi\cos\phi$
	$z = z$	$\hat{z} = \hat{z}$	$A_z = A_z$

续表

变 换	坐标变量	单位基矢量	矢量的分量
直角坐标 到球坐标	$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\theta = \tan^{-1}[\sqrt{x^2 + y^2}/z]$ $\phi = \tan^{-1}(y/x)$	$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{x}}\sin\theta\cos\phi + \hat{\mathbf{y}}\sin\theta\sin\phi + \hat{\mathbf{z}}\cos\theta$ $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{x}}\cos\theta\cos\phi + \hat{\mathbf{y}}\cos\theta\sin\phi - \hat{\mathbf{z}}\sin\theta$ $\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\hat{\mathbf{x}}\sin\phi + \hat{\mathbf{y}}\cos\phi$	$A_R = A_x\sin\theta\cos\phi + A_y\sin\theta\sin\phi + A_z\cos\theta$ $A_\theta = A_x\cos\theta\cos\phi + A_y\cos\theta\sin\phi - A_z\sin\theta$ $A_\phi = -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi$
球坐标到 直角坐标	$x = R\sin\theta\cos\phi$ $y = R\sin\theta\sin\phi$ $z = R\cos\theta$	$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{R}}\sin\theta\cos\phi + \hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\cos\phi - \hat{\boldsymbol{\phi}}\sin\phi$ $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{R}}\sin\theta\sin\phi + \hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\sin\phi + \hat{\boldsymbol{\phi}}\cos\phi$ $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{R}}\cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta$	$A_x = A_R\sin\theta\cos\phi + A_\theta\cos\theta\cos\phi - A_\phi\sin\phi$ $A_y = A_R\sin\theta\sin\phi + A_\theta\cos\theta\sin\phi + A_\phi\cos\phi$ $A_z = A_R\cos\theta - A_\theta\sin\theta$
柱坐标到 球坐标	$R = \sqrt{r^2 + z^2}$ $\theta = \tan^{-1}(r/z)$ $\phi = \phi$	$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{r}}\sin\theta + \hat{\mathbf{z}}\cos\theta$ $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{r}}\cos\theta - \hat{\mathbf{z}}\sin\theta$ $\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}$	$A_R = A_r\sin\theta + A_z\cos\theta$ $A_\theta = A_r\cos\theta - A_z\sin\theta$ $A_\phi = A_\phi$
球坐标到 柱坐标	$r = R\sin\theta$ $\phi = \phi$ $z = R\cos\theta$	$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{R}}\sin\theta + \hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta$ $\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}$ $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{R}}\cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta$	$A_r = A_R\sin\theta + A_\theta\cos\theta$ $A_\phi = A_\phi$ $A_z = A_R\cos\theta - A_\theta\sin\theta$

例 3-7 直角坐标到圆柱坐标的变换。

在直角坐标系中给定点 $P_1 = (3, -4, 3)$, 以及矢量 $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}2 - \hat{\mathbf{y}}3 + \hat{\mathbf{z}}4$, 在圆柱坐标系中表示 P_1 和 $\mathbf{A}$, 并在 P_1 点计算 $\mathbf{A}$ 的值。

解: 对点 P_1 , 有 $x=3, y=-4, z=3$ 。利用式(3-51), 可得

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 5, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} = -53.1^\circ = 306.9^\circ,$$

而 z 保持不变。因此, 在圆柱坐标系中, $P_1 = (5, 306.9^\circ, 3)$ 。

对于矢量 $\mathbf{A}$ 在圆柱坐标系中的表示 $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}}A_r + \hat{\boldsymbol{\phi}}A_\phi + \hat{\mathbf{z}}A_z$, 其分量可由式(3-58(a))和式(3-58(b))确定如下:

$$\begin{aligned} A_r &= A_x\cos\phi + A_y\sin\phi = 2\cos\phi - 3\sin\phi, \\ A_\phi &= -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi = -2\sin\phi - 3\cos\phi, \\ A_z &= 4 \end{aligned}$$

因此

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}}(2\cos\phi - 3\sin\phi) - \hat{\boldsymbol{\phi}}(2\sin\phi + 3\cos\phi) + \hat{\mathbf{z}}4$$

在 P_1 点, $\phi = 306.9^\circ$, 则有

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}}3.60 - \hat{\boldsymbol{\phi}}0.20 + \hat{\mathbf{z}}4$$

3.3.2 直角坐标到球坐标的变换

根据图 3-18, 直角坐标 (x, y, z) 和球坐标 (R, θ, ϕ) 之间的关系如下

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (3-60(a))$$

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right], \quad (3-60(b))$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right). \quad (3-60(c))$$

它们的逆关系为

$$x = R \sin \theta \cos \phi, \quad (3-61(a))$$

$$y = R \sin \theta \sin \phi, \quad (3-61(b))$$

$$z = R \cos \theta. \quad (3-61(c))$$

单位矢量 $\hat{\mathbf{R}}$ 位于 $\hat{\mathbf{r}}$ - $\hat{\mathbf{z}}$ 平面内, 因此, 它可以表示为 $\hat{\mathbf{r}}$ 和 $\hat{\mathbf{z}}$ 的一个线性组合, 即

$$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{r}}a + \hat{\mathbf{z}}b, \quad (3-62)$$

其中, a 和 b 是变换系数。因为 $\hat{\mathbf{r}}$ 和 $\hat{\mathbf{z}}$ 互相垂直, 因此

$$\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = a, \quad (3-63(a))$$

$$\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = b. \quad (3-63(b))$$

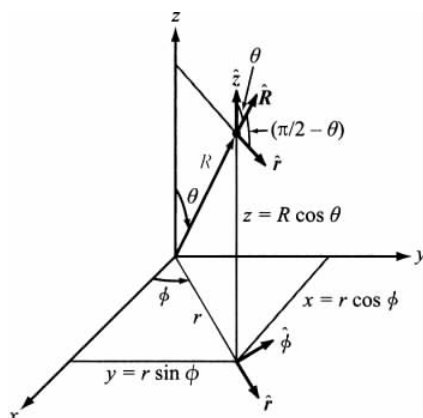


图 3-18 (x, y, z) 和 (R, θ, ϕ) 之间的关系

如图 3-18 所示, $\hat{\mathbf{R}}$ 和 $\hat{\mathbf{r}}$ 之间的夹角是 θ 的余角, $\hat{\mathbf{R}}$ 和 $\hat{\mathbf{z}}$ 之间的夹角是 θ 。因此, $a = \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \sin \theta$, $b = \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \cos \theta$ 。将 a 和 b 的表达式代入式 (3-62), 并用式 (3-56(a)) 代替 $\hat{\mathbf{r}}$, 则有

$$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{x}} \sin \theta \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \sin \theta \sin \phi + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta. \quad (3-64(a))$$

通过类似地运算, 可以得到 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 的表达式

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{x}} \cos \theta \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \cos \theta \sin \phi - \hat{\mathbf{z}} \sin \theta. \quad (3-64(b))$$

$\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 的表达式由式 (3-56(b)) 给出为

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\hat{\mathbf{x}} \sin \phi + \hat{\mathbf{y}} \cos \phi. \quad (3-64(c))$$

利用式 (3-64(a)) ~ 式 (3-64(c)) 的等式, 同时也可求出用 $(\hat{\mathbf{R}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}})$ 表示的 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$, 即

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{R}} \sin \theta \cos \phi + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cos \theta \cos \phi - \hat{\boldsymbol{\phi}} \sin \phi, \quad (3-65(a))$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{R}} \sin \theta \sin \phi + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cos \theta \sin \phi + \hat{\boldsymbol{\phi}} \cos \phi, \quad (3-65(b))$$

$$\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{R}} \cos \theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta. \quad (3-65(c))$$

通过将 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{R}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}})$ 用 $(A_x, A_y, A_z, A_R, A_\theta, A_\phi)$ 替换, 式 (3-64(a)) ~ 式 (3-65(c)) 也

可以把矢量 $\mathbf{A}$ 的直角坐标分量 (A_x, A_y, A_z) 转换成其对应的球坐标分量 (A_R, A_θ, A_ϕ) , 反之亦然。

例 3-8 直角坐标到球坐标的变换。

在球坐标系中表示矢量 $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}(x+y) + \hat{\mathbf{y}}(y-x) + \hat{\mathbf{z}}z$ 。

解: 利用表 3-2 所给 A_R 的变换关系, 有

$$\begin{aligned} A_R &= A_x \sin\theta \cos\phi + A_y \sin\theta \sin\phi + A_z \cos\theta \\ &= (x+y) \sin\theta \cos\phi + (y-x) \sin\theta \sin\phi + z \cos\theta \end{aligned}$$

利用式(3-61(a))~式(3-61(c))所给的 x, y, z 的表达式, 有

$$\begin{aligned} A_R &= (R \sin\theta \cos\phi + R \sin\theta \sin\phi) \sin\theta \cos\phi + \\ &\quad (R \sin\theta \sin\phi - R \sin\theta \cos\phi) \sin\theta \sin\phi + R \cos^2\theta \\ &= R \sin^2\theta (\cos^2\phi + \sin^2\phi) + R \cos^2\theta \\ &= R \sin^2\theta + R \cos^2\theta = R \end{aligned}$$

同样地,

$$\begin{aligned} A_\theta &= (x+y) \cos\theta \cos\phi + (y-x) \cos\theta \sin\phi - z \sin\theta, \\ A_\phi &= -(x+y) \sin\phi + (y-x) \cos\phi, \end{aligned}$$

采用与 A_R 相同的步骤, 可得

$$\begin{aligned} A_\theta &= 0, \\ A_\phi &= -R \sin\theta \end{aligned}$$

因此

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{R}} A_R + \hat{\boldsymbol{\theta}} A_\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}} A_\phi = \hat{\mathbf{R}} R - \hat{\boldsymbol{\phi}} R \sin\theta$$

3.3.3 圆柱坐标到球坐标的变换

圆柱坐标系与球坐标系间的变换, 可以通过组合前两小节的变换关系得到, 结果列于表 3-2 中。

3.3.4 两点间的距离

在直角坐标系中, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 两点之间的距离 d 由式(3-12)给出, 为

$$d = |\mathbf{R}_{12}| = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}. \quad (3-66)$$

利用式(3-52), 将点 P_1, P_2 的直角坐标转换成圆柱坐标, 则有

$$\begin{aligned} d &= [(r_2 \cos\phi_2 - r_1 \cos\phi_1)^2 + (r_2 \sin\phi_2 - r_1 \sin\phi_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2} \\ &= [r_2^2 + r_1^2 - 2r_1 r_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) + (z_2 - z_1)^2]^{1/2} \quad (\text{圆柱坐标}) \end{aligned} \quad (3-67)$$

利用式(3-61(a))~式(3-61(c))经过类似的变换后, 可得依据 P_1, P_2 的球坐标表示的距离 d 为

$$\begin{aligned} d &= \{R_2^2 + R_1^2 - 2R_1 R_2 [\cos\theta_2 \cos\theta_1 \\ &\quad + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)]\}^{1/2} \quad (\text{球坐标}) \end{aligned} \quad (3-68)$$

复习题

3-7 为什么要用多个坐标系?

3-8 为什么基矢量 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ 与点的位置无关,而 $\hat{r}$ 和 $\hat{\phi}$ 却不是?

3-9 下列各坐标系的基矢量的循环关系是什么? (a) 直角坐标系; (b) 圆柱坐标系; (c) 球坐标系。

3-10 某一点在圆柱坐标系中的位置矢量,与它在球坐标系中的位置矢量有何关系?

练习 3-7 已知点 P 的圆柱坐标 $(2\sqrt{3}, \pi/3, -2)$, 求点 P 的球坐标。

答案: $P(4, 2\pi/3, \pi/3)$ 。

练习 3-8 将矢量

$$\mathbf{A} = \hat{x}(x+y) + \hat{y}(y-x) + \hat{z}z$$

从直角坐标系转换到圆柱坐标系。

答案: $\mathbf{A} = \hat{r}r - \hat{\phi}\phi + \hat{z}z$ 。

3.4 标量场的梯度

当处理标量物理量时,它的幅值取决于单变量,例如温度 T 为高度 z 的函数, T 随高度的变化率可以用导数 dT/dz 来描述。然而,如果 T 同时也是直角坐标 x 和 y 的函数,它的空间变化率就变得难以描述,因为在这种情况下,必须处理三个分离的变量。尽管 T 沿 x 、 y 、 z 的微小变化,可以用 T 关于三个坐标变量的偏导数来描述。但是,如何将三个偏微分结合起来,表示 T 沿某一确定方向的空间变化率,却并不是那么明显。另外,在电磁学中处理的大多数物理量都是矢量,即幅值和方向都可能随空间位置变化。为此目的,将介绍三种基本运算来描述矢量和标量的微分空间变化,它们分别是**梯度**,**散度**,以及**旋度**运算,梯度运算处理标量场,这是本节的主题。另外两个运算处理的是矢量场,将在后续小节中介绍。

假定 $T_1 = T(x, y, z)$ 是空间某个区域中的点 $P_1 = (x, y, z)$ 的温度, $T_2 = T(x+dx, y+dy, z+dz)$ 是临近点 $P_2 = (x+dx, y+dy, z+dz)$ 的温度。如图 3-19 所示,微分距离 dx, dy, dz 是微分距离矢量 $d\mathbf{l}$ 的分量,即

$$d\mathbf{l} = \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz. \quad (3-69)$$

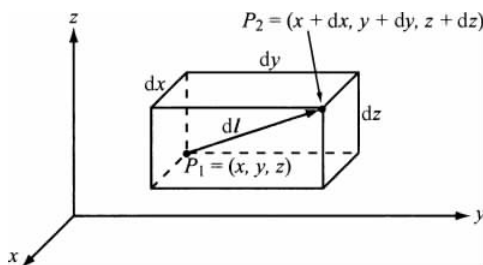


图 3-19 点 P_1 和 P_2 的微分距离矢量 $d\mathbf{l}$

根据微分学,点 P_1 和 P_2 间的微分温度 $dT = T_2 - T_1$ 为

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{\partial T}{\partial y}dy + \frac{\partial T}{\partial z}dz. \quad (3-70)$$

因为 $dx = \hat{x} \cdot d\mathbf{l}$, $dy = \hat{y} \cdot d\mathbf{l}$, $dz = \hat{z} \cdot d\mathbf{l}$, 式(3-70)可以重写为

$$\begin{aligned} dT &= \hat{x} \frac{\partial T}{\partial x} \cdot d\mathbf{l} + \hat{y} \frac{\partial T}{\partial y} \cdot d\mathbf{l} + \hat{z} \frac{\partial T}{\partial z} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \left[\hat{x} \frac{\partial T}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial T}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial T}{\partial z} \right] \cdot d\mathbf{l} \end{aligned} \quad (3-71)$$

式(3-71)中方括号内的矢量,表示了温度 dT 的变化与 $d\mathbf{l}$ 方向矢量变化的关系,这个矢量称为 T 的**梯度**,记为 $\text{grad}T$,简化表示为 ∇T ,即

$$\nabla T = \text{grad}T = \hat{x} \frac{\partial T}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial T}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (3-72)$$

式(3-71)也可表示为

$$dT = \nabla T \cdot d\mathbf{l}. \quad (3-73)$$

符号 ∇ 称为 **del 或梯度运算符**,定义为

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{直角坐标}). \quad (3-74)$$

尽管梯度运算符本身没有物理意义,但当它对一个标量物理量进行运算时,就具有物理意义,而且运算的结果是一个矢量,其幅值等于该物理量每单位距离的最大变化率,方向则指向该物理量增长最快的方向。

设 $d\mathbf{l} = \hat{a}_l d\mathbf{l}$, 这里 $\hat{a}_l$ 为 $d\mathbf{l}$ 的单位矢量,则 T 沿着 $\hat{a}_l$ 方向的**方向导数**定义为

$$\frac{dT}{dl} = \nabla T \cdot \hat{a}_l. \quad (3-75)$$

如果 $T_1 = T(x_1, y_1, z_1)$ 和 $T_2 = T(x_2, y_2, z_2)$ 分别表示点 $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 和点 $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ 处的温度 T 的大小,且点 P_1 和点 P_2 并不无限接近,则对式(3-73)两端积分,可以得到温差 $(T_2 - T_1)$ 为

$$T_2 - T_1 = \int_{P_1}^{P_2} \nabla T \cdot d\mathbf{l}. \quad (3-76)$$

例 3-9 方向导数。

求 $T = x^2 + y^2 z$ 沿方向 $\hat{x}2 + \hat{y}3 - \hat{z}2$ 的方向导数,并计算它在点 $(1, -1, 2)$ 处的值。

解: 首先求 T 的梯度

$$\begin{aligned} \nabla T &= \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) (x^2 + y^2 z) \\ &= \hat{x} 2x + \hat{y} 2yz + \hat{z} y^2 \end{aligned}$$

用 $\mathbf{l}$ 表示给定的方向,

$$\mathbf{l} = \hat{x}2 + \hat{y}3 - \hat{z}2$$

$\mathbf{l}$ 的单位矢量为

$$\hat{a}_l = \frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{l}|} = \frac{\hat{x}2 + \hat{y}3 - \hat{z}2}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{\hat{x}2 + \hat{y}3 - \hat{z}2}{\sqrt{17}}$$

应用式(3-75)得

$$\frac{dT}{dl} = \nabla T \cdot \hat{a}_l = (\hat{x}2x + \hat{y}2yz + \hat{z}y^2) \cdot \left(\frac{\hat{x}2 + \hat{y}3 - \hat{z}2}{\sqrt{17}} \right)$$

$$= \frac{4x + 6yz - 2y^2}{\sqrt{17}}$$

在点(1, -1, 2)处有

$$\left. \frac{dT}{dl} \right|_{(1, -1, 2)} = \frac{4 - 12 - 2}{\sqrt{17}} = \frac{-10}{\sqrt{17}}$$

3.4.1 圆柱坐标系和球坐标系中的梯度

式(3-73)是在直角坐标系中得到的,但它也同样适用于其他坐标系。为了将式(3-72)转换到圆柱坐标(r, ϕ, z),需要再次给出以下坐标关系

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \phi = \frac{y}{x}. \quad (3-77)$$

根据微分学有

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}. \quad (3-78)$$

因为 z 垂直与 x , 所以 $\partial z / \partial x = 0$, 式(3-78)的最后一项为零。利用式(3-77)的坐标关系, 可以推出下式

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \phi, \quad (3-79(a))$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{1}{r} \sin \phi. \quad (3-79(b))$$

因此

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \cos \phi \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi}. \quad (3-80)$$

这个表达式可以用于替换式(3-72)中 $\hat{x}$ 的系数, 经过类似的处理过程, 也可以用 r 和 ϕ 来表示 $\partial T / \partial y$ 。利用式(3-57(a))、式(3-57(b))的关系, 即 $\hat{x} = \hat{r} \cos \phi - \hat{\phi} \sin \phi$ 和 $\hat{y} = \hat{r} \sin \phi + \hat{\phi} \cos \phi$, 则式(3-72)变为

$$\nabla T = \hat{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \hat{\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (3-81)$$

因此, 在圆柱坐标系中的梯度运算符为

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{圆柱坐标}). \quad (3-82)$$

在球坐标系中使用相似的步骤, 也可得到梯度运算符为

$$\nabla = \hat{R} \frac{\partial}{\partial R} + \hat{\theta} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (\text{球坐标}). \quad (3-83)$$

3.4.2 梯度运算的性质

对于任意两个标量函数 U 和 V , 有以下关系式成立:

$$(1) \nabla(U+V) = \nabla U + \nabla V, \quad (3-84(a))$$

$$(2) \nabla(UV) = U \nabla V + V \nabla U, \quad (3-84(b))$$

$$(3) \nabla V^n = n V^{n-1} \nabla V, \quad (\text{对任何 } n) \quad (3-84(c))$$

例 3-10 梯度的计算。

求下面每个标量函数的梯度,并计算它们在给定点的值。

(a) 直角坐标系中: $V_1 = 24 V_0 \cos(\pi y/3) \sin(2\pi z/3)$, 点 $(3, 2, 1)$ 处。

(b) 圆柱坐标系中: $V_2 = V_0 e^{-2r} \sin 3\phi$, 点 $(1, \pi/2, 3)$ 处。

(c) 球坐标系中: $V_3 = V_0 (a/R) \cos 2\theta$, 点 $(2a, 0, \pi)$ 处。

解: (a) 在直角坐标系中,

$$\begin{aligned} \nabla V_1 &= \hat{x} \frac{\partial V_1}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial V_1}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial V_1}{\partial z} \\ &= -\hat{y} 8\pi V_0 \sin \frac{\pi y}{3} \sin \frac{2\pi z}{3} + \hat{z} 16\pi V_0 \cos \frac{\pi y}{3} \cos \frac{2\pi z}{3} \\ &= 8\pi V_0 \left[-\hat{y} \sin \frac{\pi y}{3} \sin \frac{2\pi z}{3} + \hat{z} 2 \cos \frac{\pi y}{3} \cos \frac{2\pi z}{3} \right] \end{aligned}$$

在点 $(3, 2, 1)$ 处,

$$\nabla V_1 = 8\pi V_0 \left[-\hat{y} \sin^2 \frac{2\pi}{3} + \hat{z} 2 \cos^2 \frac{2\pi}{3} \right] = \pi V_0 [-\hat{y} 6 + \hat{z} 4]$$

(b) 函数 V_2 是用圆柱坐标变量表示的, 因此使用式 (3-82) 的 ∇ ,

$$\begin{aligned} \nabla V_2 &= \left(\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) V_0 e^{-2r} \sin 3\phi \\ &= -\hat{r} 2 V_0 e^{-2r} \sin 3\phi + \hat{\phi} (3 V_0 e^{-2r} \cos 3\phi) / r \\ &= \left[-\hat{r} 2 \sin 3\phi + \hat{\phi} \frac{3 \cos 3\phi}{r} \right] V_0 e^{-2r} \end{aligned}$$

在点 $(1, \pi/2, 3)$ 处, $r=1, \phi=\pi/2$ 。因此

$$\begin{aligned} \nabla V_2 &= \left[-\hat{r} 2 \sin \frac{3\pi}{2} + \hat{\phi} 3 \cos \frac{3\pi}{2} \right] V_0 e^{-2} \\ &= \hat{r} 2 V_0 e^{-2} = \hat{r} 0.27 V_0 \end{aligned}$$

(c) 因为 V_3 是用球坐标表示的, 因此使用式 (3-83) 的 ∇ ,

$$\begin{aligned} \nabla V_3 &= \left(\hat{R} \frac{\partial}{\partial R} + \hat{\theta} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) V_0 \left(\frac{a}{R} \right) \cos 2\theta \\ &= -\hat{R} \frac{V_0 a}{R^2} \cos 2\theta - \hat{\theta} \frac{2 V_0 a}{R^2} \sin 2\theta \\ &= -[\hat{R} \cos 2\theta + \hat{\theta} 2 \sin 2\theta] \frac{V_0 a}{R^2} \end{aligned}$$

在点 $(2a, 0, \pi)$ 处, $R=2a, \theta=0$, 所以

$$\nabla V_3 = -\hat{R} \frac{V_0}{4a}$$

练习 3-9 给定 $V = x^2 y + x y^2 + x z^2$ 。(a) 求 V 的梯度; (b) 计算其在点 $(1, -1, 2)$ 的值。

答案: (a) $\nabla V = \hat{x}(2xy + y^2 + z^2) + \hat{y}(x^2 + 2xy) + \hat{z}(2xz)$;

(b) $\nabla V|_{(1, -1, 2)} = \hat{x}3 - \hat{y} + \hat{z}4$ 。

练习 3-10 求 $V = r z^2 \cos 2\phi$ 沿 $\mathbf{A} = \hat{r}2 - \hat{z}$ 的方向导数, 并计算其在点 $(1, \pi/2, 2)$ 的值。

答案: $(dV/dl)|_{\langle 1, \pi/2, 2 \rangle} = -4/\sqrt{5}$ 。

练习 3-11 一颗恒星辐射的功率密度按照 $S(R) = S_0/R^2$ 规律沿径向衰减, 如图 E3. 11(a) 所示, 其中 R 为到这颗恒星的径向距离, S_0 是一个常数。利用前面的结论, 一个标量函数的梯度表示了这个函数每单位距离的最大变化率, 它的方向则代表了该标量函数增长最快的方向, 用箭头表示出 ∇S 。

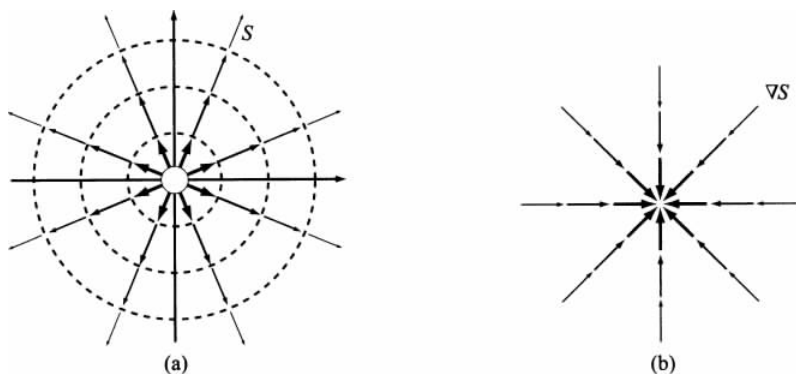


图 E3. 11

答案: $\nabla S = -\hat{\mathbf{R}} 2S_0/R^3$, 如图 E3. 11(b) 所示。

练习 3-12 如图 E3. 12(a) 所示, 描绘了从海洋上空的大气温度 T_1 到陆地上空的大气温度 T_2 的平缓变化。温度曲线可以用下述方程描述:

$$T(x) = T_1 + (T_2 - T_1)/(e^{-x} + 1)$$

其中, x 的单位是 km, $x=0$ 表示海平面。(a) ∇T 的方向是什么? (b) 当 x 取何值时, ∇T 最大?

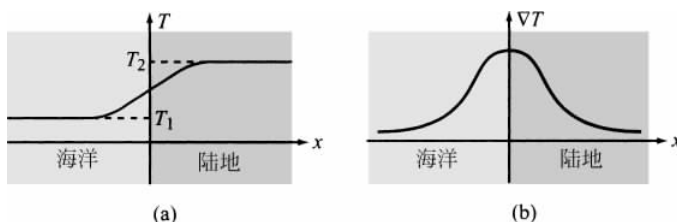


图 E3. 12

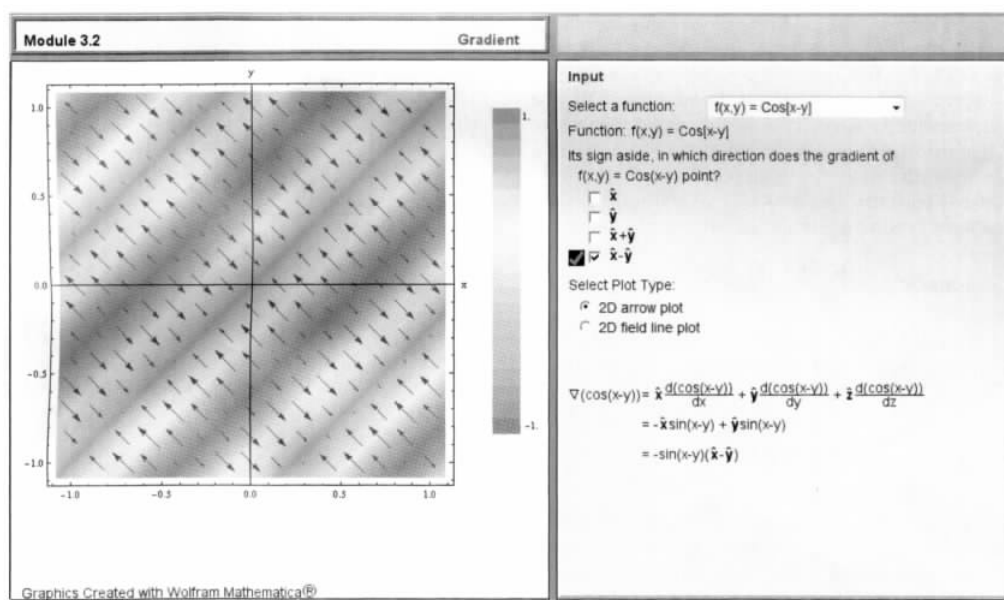
答案: (a) $+\hat{\mathbf{x}}$; (b) 在 $x=0$ 处。

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{e^{-x} + 1}$$

$$\nabla T = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial T}{\partial x} = \hat{\mathbf{x}} \frac{e^{-x}(T_2 - T_1)}{(e^{-x} + 1)^2}$$

◎CD 模块 3.2 梯度

选择一个标量函数 $f(x, y, z)$, 求它的梯度, 并且在一个合适的 2D 平面上显示标量函数以及它的梯度。



3.5 矢量场的散度

通过第1章对库仑定律的简单介绍,知道了一个孤立的正电荷 q ,在它周围的空间会产生电场 $\mathbf{E}$,电场 $\mathbf{E}$ 的方向从正电荷向外,电场 $\mathbf{E}$ 的强度(幅值)正比于 q ,并随它到电荷的距离 R ,以 $1/R^2$ 的关系减小。当用图形表示时,矢量场通常用场线来表示,如图3-20所示。场线的箭头表示所画点处场的方向,它的长度则定性地示意出场的幅值。

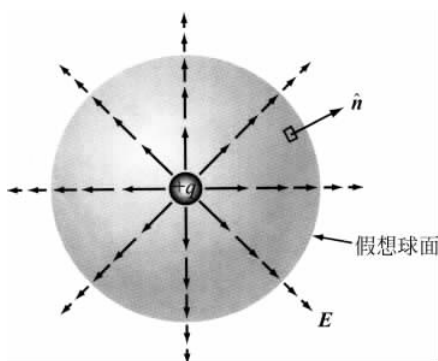


图 3-20 正电荷 q 产生的电场 $\mathbf{E}$ 的通量线

在边界表面上,通量密度定义为通过单位面元 ds 向外的通量,即

$$\mathbf{E} \text{ 的通量密度 } \mathbf{E} = \frac{\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}{|ds|} = \frac{\mathbf{E} \cdot \hat{n} ds}{ds} = \mathbf{E} \cdot \hat{n}, \quad (3-85)$$

其中, $\hat{n}$ 为面元 ds 的外法向矢量。对于一个闭合面 S ,例如,如图3-20所示的假想球的闭合面,穿过 S 向外的总通量为

$$\text{总通量} = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (3-86)$$

考虑一个微分长方体的情况,例如一个立方体,它的各边与直角坐标轴一致,如图 3-21 所示。沿 x, y 和 z 轴的边长分别为 $\Delta x, \Delta y$ 和 Δz 。若长方体所在空间区域存在场矢量 $\mathbf{E}(x, y, z)$, 下面来确定电场 $\mathbf{E}$ 通过该长方体总表面 S 的通量。因为 S 包含 6 个面, 则需要将通过 6 个面的通量相加, 通过任何面的通量, 是指从体积 ΔV 通过该面向外的通量。

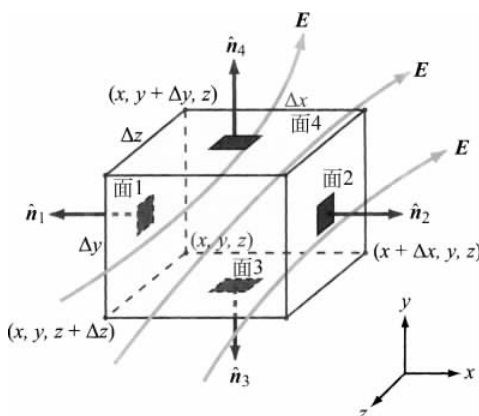


图 3-21 矢量场 $\mathbf{E}$ 通过体积为 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ 的微分长方体的通量线

$\mathbf{E}$ 可定义为

$$\mathbf{E} = \hat{x}E_x + \hat{y}E_y + \hat{z}E_z. \quad (3-87)$$

面 1 的面积为 $\Delta y \Delta z$, 如图 3-21 所示, 其单位矢量为 $\hat{n}_1 = -\hat{x}$ 。因此, 通过面 1 向外的通量 F_1 为

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_{\text{面1}} \mathbf{E} \cdot \hat{n}_1 d\mathbf{s} \\ &= \int_{\text{面1}} (\hat{x}E_x + \hat{y}E_y + \hat{z}E_z) \cdot (-\hat{x}) dy dz \\ &\approx -E_x(1) \Delta y \Delta z, \end{aligned} \quad (3-88)$$

其中, $E_x(1)$ 是在面 1 中心处 E_x 的数值。假定所考虑的微分体积元非常小, 那么整个面 1 上的 E_x , 就可以用它中心处的数值来近似表示。

同样地, 可得到通过面 2 ($\hat{n}_2 = \hat{x}$) 的通量为

$$F_2 = E_x(2) \Delta y \Delta z, \quad (3-89)$$

其中, $E_x(2)$ 是在面 2 中心处的 E_x 数值。面 1 和面 2 中心处的微分间隔为 Δx , $E_x(2)$ 与 $E_x(1)$ 的关系为

$$E_x(2) = E_x(1) + \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta x, \quad (3-90)$$

此处忽略了包含 $(\Delta x)^2$ 以及 Δx 更高次的项, 因为 Δx 很小, 它们的影响小到可以忽略不计。将式(3-90)代入式(3-89)得

$$F_2 = \left[E_x(1) + \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y \Delta z. \quad (3-91)$$

将式(3-88)和式(3-91)相加, 得到从面 1 和面 2 流出的通量和, 即

$$F_1 + F_2 = \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (3-92(a))$$

对其他两对面重复同样的过程,得到

$$F_3 + F_4 = \frac{\partial E_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (3-92(b))$$

$$F_5 + F_6 = \frac{\partial E_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (3-92(c))$$

将 F_1 到 F_6 的通量加在一起,即可得到通过长方体表面 S 的总通量为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = (\operatorname{div} \mathbf{E}) \Delta V, \quad (3-93)$$

其中, $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$, $\operatorname{div} \mathbf{E}$ 是一个标量函数,称为 $\mathbf{E}$ 的散度,在直角坐标系中定义为

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (3-94)$$

令体积 ΔV 趋近于零,从而得到某一点 $\mathbf{E}$ 的散度,等于通过一个闭合增量表面,每单位体积向外的净通量。

因此,根据式(3-93),有

$$\operatorname{div} \mathbf{E} \triangleq \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}{\Delta V}, \quad (3-95)$$

其中, S 包围着体积微元 ΔV 。除了将 $\mathbf{E}$ 的散度表示为 $\operatorname{div} \mathbf{E}$ 外,一个普遍使用的表示方法就是 $\nabla \cdot \mathbf{E}$,即

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (3-96)$$

式(3-96)适合直角坐标系中的矢量 $\mathbf{E}$ 。

根据式(3-95)给出的 $\mathbf{E}$ 的散度定义,如果流出表面 S 的净通量是正的,则 $\mathbf{E}$ 具有正的散度,这可以看成体积 ΔV 中包含着一个产生场线的源。如果散度是负的,则可以把 ΔV 看成一个汇集点,因为净通量是流入 ΔV 的。对于均匀的场 $\mathbf{E}$,流入和流出 ΔV 的通量相等,因此其散度为零,这种场称为无散场。

散度是一种微分运算,只能处理矢量,其结果为标量。这与梯度运算正好相反,梯度运算只能处理标量,而结果却为矢量。在本书的封底内页,给出了圆柱坐标系以及球坐标系中矢量的散度表达式。

散度运算遵从分配律。对于任意一对矢量 $\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$,有

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) = \nabla \cdot \mathbf{E}_1 + \nabla \cdot \mathbf{E}_2. \quad (3-97)$$

如果 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$,则矢量场 $\mathbf{E}$ 称为无散场。

如果对适用于微分体积 ΔV 的式(3-93)进行扩展,可以将 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 在任何体积 V 上的积分,与 $\mathbf{E}$ 穿过该体积 V 限定的闭合面 S 的通量联系起来,即

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{散度定理}) \quad (3-98)$$

这一关系称为散度定理,它在电磁学中应用广泛。

例 3-11 计算散度。

计算下面每个矢量场的散度,并计算它们在给定点的值。

(a) $\mathbf{E} = \hat{x}3x^2 + \hat{y}2z + \hat{z}x^2z$; 点 $(2, -2, 0)$ 。

(b) $\mathbf{E} = \hat{R}(a^3 \cos\theta/R^2) - \hat{\theta}(a^3 \sin\theta/R^2)$; 点 $(a/2, 0, \pi)$ 。

解:

(a)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2z) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2z) \\ &= 6x + 0 + x^2 = x^2 + 6x\end{aligned}$$

在点 $(2, -2, 0)$ 处, $\nabla \cdot \mathbf{E}|_{(2, -2, 0)} = 16$ 。

(b) 利用封底内页所给的球坐标系中的散度计算公式,有

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R}(R^2 E_R) + \frac{1}{R \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(E_\theta \sin\theta) + \frac{1}{R \sin\theta} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} \\ &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R}(a^3 \cos\theta) + \frac{1}{R \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{a^3 \sin^2\theta}{R^2}\right) \\ &= 0 - \frac{2a^3 \cos\theta}{R^3} = -\frac{2a^3 \cos\theta}{R^3}\end{aligned}$$

在 $R=a/2, \theta=0$ 处, $\nabla \cdot \mathbf{E}|_{(a/2, 0, \pi)} = -16$ 。

练习 3-13 给定 $\mathbf{A} = e^{-2y}(\hat{x}\sin 2x + \hat{y}\cos 2x)$, 求 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 。

答案: $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 。

练习 3-14 给定 $\mathbf{A} = \hat{r}r\cos\phi + \hat{\phi}r\sin\phi + \hat{z}3z$, 求点 $(2, 0, 3)$ 处的 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 。

答案: $\nabla \cdot \mathbf{A} = 6$ 。

练习 3-15 在球坐标系中,如果 $\mathbf{E} = \hat{R}AR$, 求 $\mathbf{E}$ 通过圆心在原点、半径为 a 的球面的通量。

答案: $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi A a^3$ 。

练习 3-16 计算练习 3-15 中场 $\mathbf{E}$ 的散度,通过由半径为 a 的球面所包围的体积的积分,验证散度定理。

练习 3-17 矢量场 $\mathbf{A} = \hat{x}x - \hat{y}y$ 的箭头表示如图 E3.17 所示。以空间某一给定的点为中心,假想一个无限大的体积,如果通过这个假想体积的表面向外流出的净通量是正的,则 $\mathbf{A}$ 在该点的散度 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 为正;如果净通量是流入这个体积的,则 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 为负;如果流入和流出的通量相同,则 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 。判断在 x - y 平面内的任意点处的 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 。

答案: 在任意点处, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 。

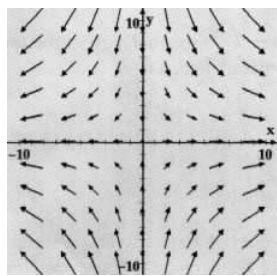


图 E3.17

科技摘要 6 X 射线计算机断层扫描

断层扫描起源于希腊词汇 tome(意思是层或者片)和 graphia(意思是书写)。计算机断层扫描,也被称为 **CT 扫描**或者 **CAT 扫描**(即计算机轴向层析成像),是一种能够生成扫描

对象的 X 射线衰减(或吸收)特性的三维图像技术。这与传统的 X 射线技术不同,传统的 X 射线技术只能生成物体的二维图像,如图 TF6-1 所示。1972 年,英国电气工程师 Godfrey Hounsfield 和南非出生的美国物理学家 Allan Cormack,各自独立发明了 CT。他们二人分享了 1979 年的诺贝尔生理学或医学奖。在诊断成像技术中,CT 在身体成像的灵敏度上有着极大的优势,它能在一个很宽的身体密度范围内成像,可以从软组织到血管和骨骼。



图 TF6-1 二维 X 射线图像(由通用电气提供)

1. 操作原理

在如图 TF6-2 所示的系统中,X 射线源和探测器阵列包含在一个圆形结构中,患者沿着传送带从中穿过。一个 CAT 扫描技术人员可以通过监视来重建图像,以确保这些图像不包含在检测过程中,由患者移动引起的如条纹或模糊部分的伪影。

CT 扫描仪使用具有狭缝的 **X 射线源**来产生一个**扇形射束**,它的宽度能够覆盖整个身体,但厚度只有几毫米,如图 TF6-3(a)所示。它被一个大约由 700 个**探测器**组成的阵列所捕获,而不是将 X 射线的衰减记录在胶片上。X 射线源和探测器阵列安装在一个圆形框架上,这个框架会围着患者每次旋转一个微小的角度,直至旋转一个完整的 360° ,而且每次旋转都会从不同角度的观测点来记录一个 X 射线衰减的属性。通常,在每一个窄的透析片上会记录 1000 个这样的属性。在今天的技术中,完成这一过程不到 1s。为了得到身体某一完整部分的影像,如胸部或者头部,这个过程在多个切片(层)会重复多次,通常需要大约 10s 来完成。

2. 图像重建

对于每个透析片,CT 扫描仪会按顺序生成 7×10^5 个测量值(1000 个角度方向 $\times$ 700 个探测器通道)。每个测量值代表了在 X 射线源和探测器之间,对窄束的综合路径衰减,如图 TF6-3(b)所示。每个体积元素(**体素**)贡献了 1000 个这样的测量光束。商业的 CT 机使用一种称为**滤波反投影技术**,"重建"透析片中每个体素的衰减率图像,扩展开来,该技术适用



图 TF6-2 CT 扫描仪(由通用电气提供)

于整个人体器官的每个体素。这是通过一个复杂矩阵求逆过程的应用来完成的。一张简单的脑部 CT 样片如图 TF6-3(c)所示。

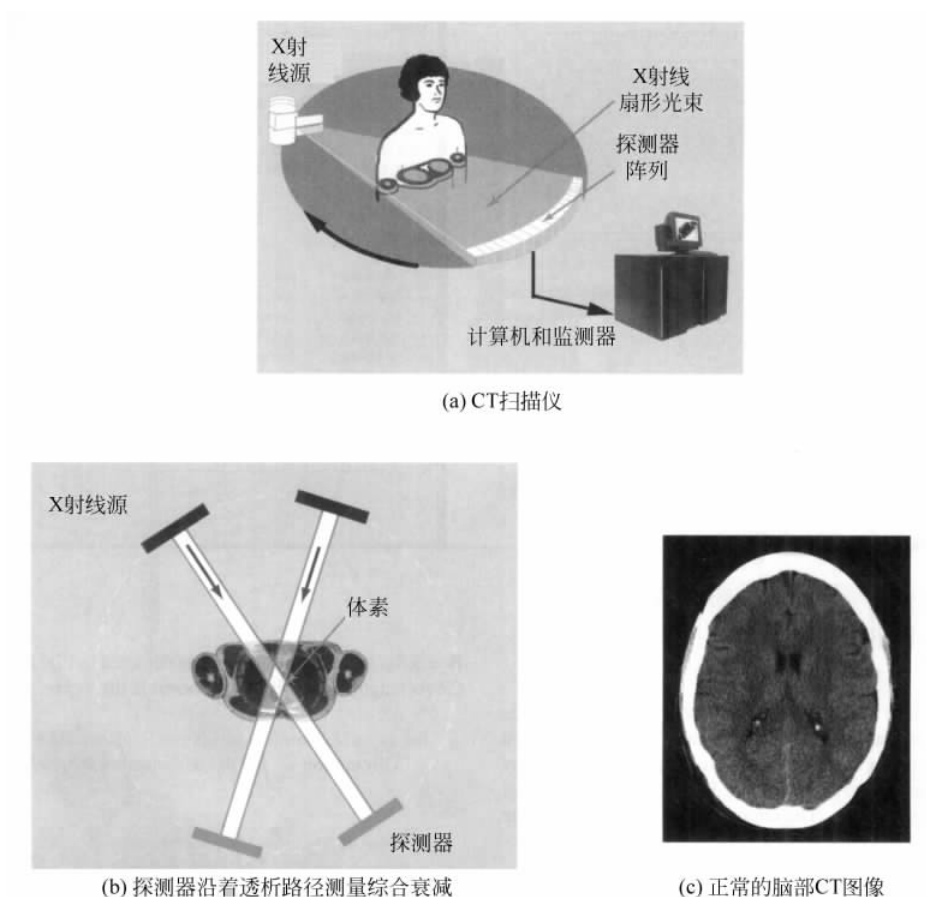
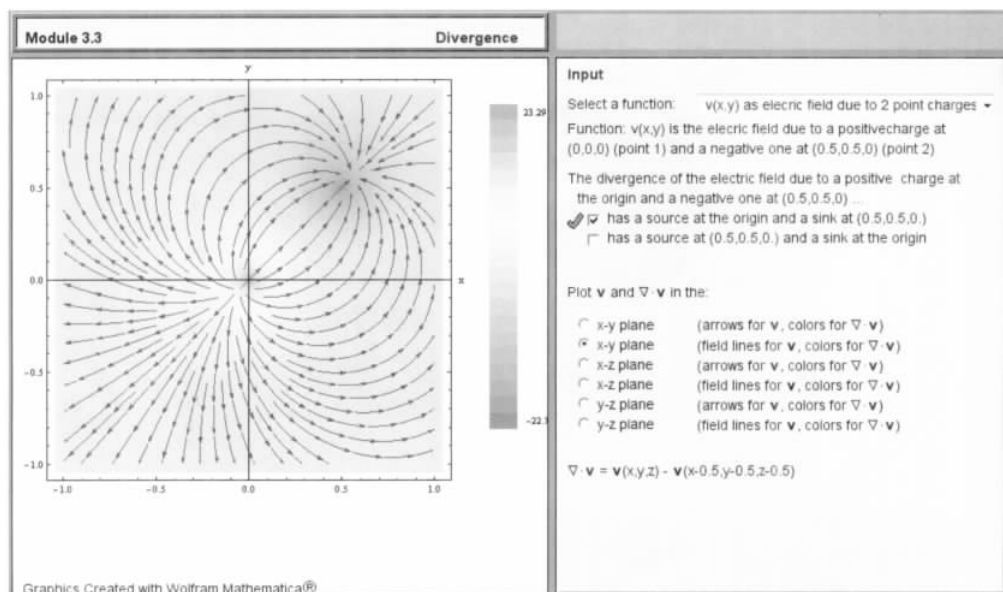


图 TF6-3 一台 CT 扫描仪的基本元素

◎CD 模块 3.3 散度

选择一个矢量函数 $\mathbf{v}(x, y, z)$, 求它的梯度, 并且将两者在一个合适的 2D 平面上显示。



3.6 矢量场的旋度

到目前为止,讨论了在矢量分析中常用的三个基本运算中的两个,即标量场的梯度和矢量场的散度。下面将介绍旋度运算。矢量场 $\mathbf{B}$ 的旋度描述了 $\mathbf{B}$ 的旋转特性,或环量特性。 $\mathbf{B}$ 的环量定义为 $\mathbf{B}$ 沿闭合路径 C 的线积分,即

$$\text{环量} = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}. \quad (3-99)$$

为了获得这一定义的物理本质,分析两个例子。第一个例子是对均匀场 $\mathbf{B} = \hat{x}B_0$,其场线如图 3-22(a) 所示。对于图中所示的矩形路径 $abcd$,有

$$\begin{aligned} \text{环量} &= \int_a^b \hat{x}B_0 \cdot \hat{x}dx + \int_b^c \hat{x}B_0 \cdot \hat{y}dy + \int_c^d \hat{x}B_0 \cdot \hat{x}dx + \int_d^a \hat{x}B_0 \cdot \hat{y}dy \\ &= B_0\Delta x - B_0\Delta x = 0, \end{aligned} \quad (3-100)$$

其中, $\Delta x = b - a = c - d$, 由于 $\hat{x} \cdot \hat{y} = 0$, 因此第二个和第四个积分为零。式(3-100)表明,均匀场的环量为零。

接下来考虑载有直流电流 I 的无穷长导线所产生的磁通密度 $\mathbf{B}$ 。如果电流位于自由空间,且沿着 z 的方向,那么根据式(1-13)可得

$$\mathbf{B} = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (3-101)$$

其中, μ_0 是真空磁导率, r 是 x - y 平面中场点到电流的径向距离。 $\mathbf{B}$ 的方向沿着方位角的单位矢量 $\hat{\phi}$, $\mathbf{B}$ 的场线是围绕电流的同心圆,如图 3-22(b) 所示。对于 x - y 平面内,半径为 r 且中心在原点的环形路径 C ,微分长度矢量为 $d\mathbf{l} = \hat{\phi} r d\phi$, $\mathbf{B}$ 的环量为

$$\text{环量} = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \hat{\phi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \hat{\phi} r d\phi = \mu_0 I. \quad (3-102)$$

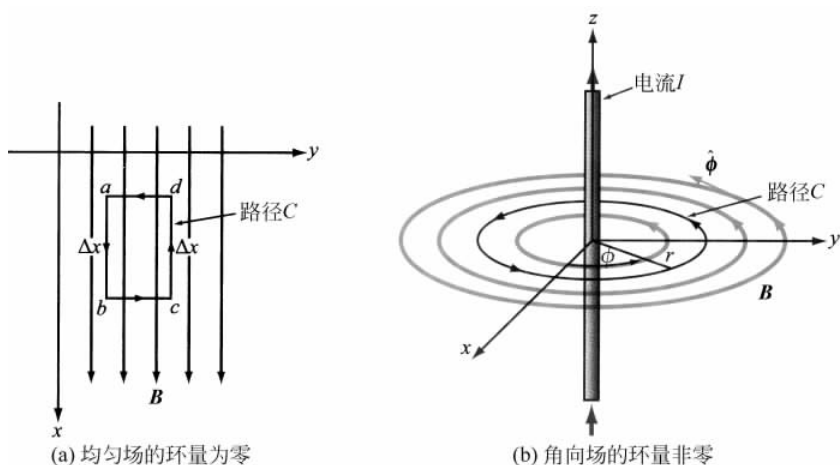


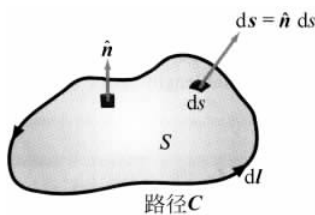
图 3-22 均匀场与角向场

在这种情况下,环量不是零。然而,如果路径 C 在 x - z 或 y - z 平面,则 $d\mathbf{l}$ 将没有 $\hat{\phi}$ 分量,积分所得的净环量将为零。很显然, $\mathbf{B}$ 的环量取决于路径的选择以及路径的绕行方向。例如,为了描述龙卷风的环量,就应选择风场的环量最大的路径,并希望环量既有幅度也有方向,并且环量的方向指向龙卷风的顶点。旋转运算就体现了这些特性。矢量场 $\mathbf{B}$ 的旋度,表示为 $\text{curl } \mathbf{B}$ 或 $\nabla \times \mathbf{B}$, 定义为

$$\nabla \times \mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{B} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \left[\hat{\mathbf{n}} \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \right]_{\max}. \quad (3-103)$$

可见,矢量场 $\mathbf{B}$ 的旋度就是每单位面积 $\mathbf{B}$ 的环量,并且路径 C 的面积 Δs 以最大环量为方向。

矢量场 $\mathbf{B}$ 的旋度的方向为 $\hat{\mathbf{n}}$, 即 Δs 的单位法向,由右手定则来确定,即让右手四指沿着路径的方向 $d\mathbf{l}$ 绕行,则大拇指的方向就是 $\hat{\mathbf{n}}$, 如图 3-23 所示。当使用符号 $\nabla \times \mathbf{B}$ 表示 $\mathbf{B}$ 的旋度时,不应该将其理解为 ∇ 与 $\mathbf{B}$ 的叉积。

图 3-23 让右手四指沿着路径的方向 $d\mathbf{l}$ 绕行,则大拇指的方向就是 $\hat{\mathbf{n}}$

在直角坐标系中给定的矢量 $\mathbf{B}$ 为

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}B_x + \hat{\mathbf{y}}B_y + \hat{\mathbf{z}}B_z, \quad (3-104)$$

经过非常烦琐的推导,由式(3-103)可以得到

$$\nabla \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{y}} \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (3-105)$$

在本书的封底内页中,列出了本章介绍的三种正交坐标系的 $\nabla \times \mathbf{B}$ 表达式。

3.6.1 旋度的矢量恒等式

对于任意两个矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 以及标量 V ,有

$$(1) \nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}, \quad (3-106(a))$$

$$(2) \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0, \quad (3-106(b))$$

$$(3) \nabla \times (\nabla V) = 0. \quad (3-106(c))$$

3.6.2 斯托克斯定理

斯托克斯定理将矢量的旋度在一个开面 S 上的面积分,转换成该矢量沿面 S 限定的边界路径 C 的线积分。

斯托克斯定理的几何关系如图3-23所示,数学表达式如下

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{斯托克斯定理}), \quad (3-107)$$

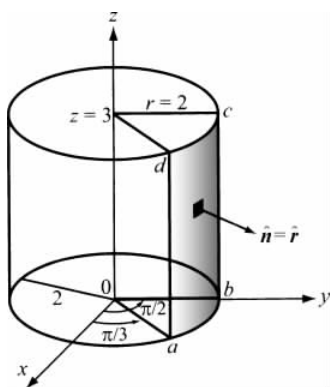


图 3-24 例 3-12 的几何图形

式(3-107)的正确性,可以由式(3-103)给出的 $\nabla \times \mathbf{B}$ 的定义式推出。如果 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$,则 $\mathbf{B}$ 称为保守场或无旋场,因为式(3-107)右边的环量为零,与积分回路的选择无关。

例 3-12 斯托克斯定理的验证。

给定矢量场 $\mathbf{B} = \hat{z} \cos \phi / r$,针对由 $r=2, \pi/3 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq z \leq 3$ 所确定的一段圆柱面,如图3-24所示,验证斯托克斯定理。

解:由斯托克斯定理,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}.$$

等式左端: $\mathbf{B}$ 仅有一个分量 $B_z = \cos \phi / r$,利用本书封底内页圆柱坐标系中 $\nabla \times \mathbf{B}$ 的表达式可得

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \hat{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right) + \hat{\phi} \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) + \hat{z} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) - \frac{\partial B_r}{\partial \phi} \right) \\ &= \hat{r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\cos \phi}{r} \right) - \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos \phi}{r} \right) \\ &= -\hat{r} \frac{\sin \phi}{r^2} + \hat{\phi} \frac{\cos \phi}{r^2}. \end{aligned}$$

在给定面 S 上 $\nabla \times \mathbf{B}$ 的面积分为

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = \int_{z=0}^3 \int_{\phi=\pi/3}^{\pi/2} \left(-\hat{r} \frac{\sin \phi}{r^2} + \hat{\phi} \frac{\cos \phi}{r^2} \right) \cdot \hat{r} r d\phi dz$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^3 \int_{\pi/3}^{\pi/2} -\frac{\sin\phi}{r} d\phi dz \\
 &= -\frac{3}{2r} = -\frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$

等式右端：面 S 以路径 $C=abcd$ 为边界，如图 3-24 所示。 C 的方向与面 S 的法向 $\hat{r}$ 满足右手定则。因此

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{B}_{ab} \cdot d\mathbf{l} + \int_b^c \mathbf{B}_{bc} \cdot d\mathbf{l} + \int_c^d \mathbf{B}_{cd} \cdot d\mathbf{l} + \int_d^a \mathbf{B}_{da} \cdot d\mathbf{l},$$

其中， $\mathbf{B}_{ab}$ 、 $\mathbf{B}_{bc}$ 、 $\mathbf{B}_{cd}$ 、 $\mathbf{B}_{da}$ 分别是 ab 、 bc 、 cd 、 da 几段路径上 $\mathbf{B}$ 的分量。在 ab 段， $\mathbf{B}_{ab} = \hat{\mathbf{z}}(\cos\phi)/2$ 与 $d\mathbf{l} = \hat{\boldsymbol{\phi}} r d\phi$ 的点积为零； cd 段也是如此。在 bc 段， $\phi = \pi/2$ ，因此 $\mathbf{B}_{bc} = \hat{\mathbf{z}}(\cos\pi/2)/2 = 0$ 。对于最后一段， $\mathbf{B}_{da} = \hat{\mathbf{z}}(\cos\pi/3)/2 = \hat{\mathbf{z}}/4$ ， $d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{z}} dz$ 。因此

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_d^a \left(\hat{\mathbf{z}} \frac{1}{4} \right) \cdot \hat{\mathbf{z}} dz = \int_3^0 \frac{1}{4} dz = -\frac{3}{4},$$

该结果与斯托克斯定理等式左端的计算结果相同。

练习 3-18 在圆柱坐标系中的矢量场

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}} 10e^{-2r} \cos\phi + \hat{\mathbf{z}} 10 \sin\phi$$

计算 $\nabla \times \mathbf{A}$ 在点 $(2, 0, 3)$ 处的值。

答案：

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\hat{\mathbf{r}} \frac{10 \cos\phi}{r} + \frac{\hat{\mathbf{z}} 10 e^{-2r} \sin\phi}{r} \right) \Big|_{2,0,3} = \hat{\mathbf{r}} 5.$$

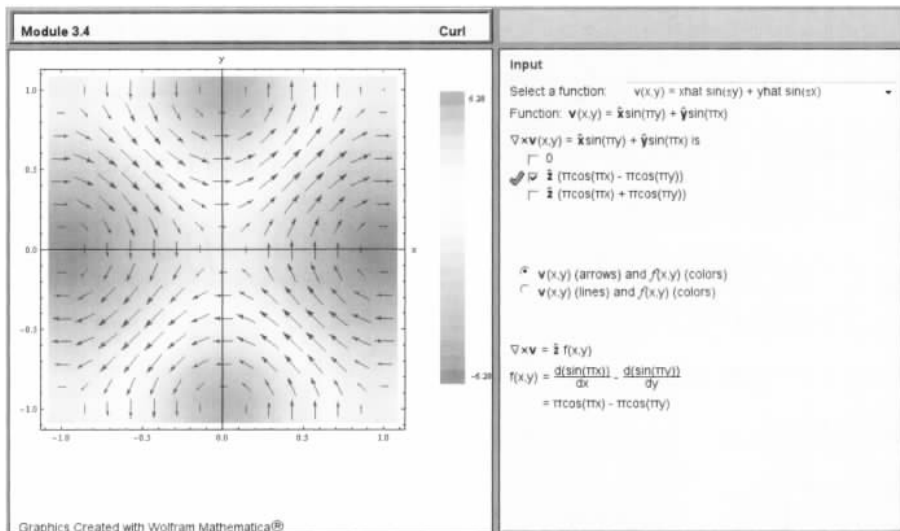
练习 3-19 在球坐标系中的矢量场 $\mathbf{A} = \hat{\boldsymbol{\theta}} 12 \sin\theta$ ，计算 $\nabla \times \mathbf{A}$ 在点 $(3, \pi/6, 0)$ 处的值。

答案：

$$\nabla \times \mathbf{A} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{12 \sin\theta}{R} \Big|_{3, \pi/6, 0} = \hat{\boldsymbol{\phi}} 2.$$

◎CD Modele 3.4 旋度

选择一个矢量 $\mathbf{v}(x, y)$ ，计算它的旋度，并将矢量 $\mathbf{v}$ 以及它的旋度显示在 x - y 平面内。



3.7 拉普拉斯算子

在后续几章,有时候会遇到标量和矢量运算多重组合的情况,其中最常见的组合是标量场梯度的散度。对于直角坐标系中的标量函数 V ,其梯度为

$$\nabla V = \hat{x} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial V}{\partial z} = \hat{x} A_x + \hat{y} A_y + \hat{z} A_z = \mathbf{A}, \quad (3-108)$$

定义矢量 $\mathbf{A}$ 的分量分别为 $A_x = \frac{\partial V}{\partial x}, A_y = \frac{\partial V}{\partial y}, A_z = \frac{\partial V}{\partial z}$ 。 ∇V 的散度为

$$\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (3-109)$$

为了方便, $\nabla \cdot (\nabla V)$ 称为 V 的拉普拉斯算子,表示为 $\nabla^2 V$ (其中符号 ∇^2 读作 del 平方)。即

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot (\nabla V) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \quad (3-110)$$

从式(3-110)可以看出,标量函数的拉普拉斯运算为标量。本书封底内页给出了在圆柱坐标系和球坐标系中 $\nabla^2 V$ 的表达式。

标量的拉普拉斯运算也可用来定义矢量的拉普拉斯运算。对于直角坐标系中的矢量 $\mathbf{E}$,

$$\mathbf{E} = \hat{x} E_x + \hat{y} E_y + \hat{z} E_z, \quad (3-111)$$

$\mathbf{E}$ 的拉普拉斯运算定义为

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{E} = \hat{x} \nabla^2 E_x + \hat{y} \nabla^2 E_y + \hat{z} \nabla^2 E_z. \quad (3-112)$$

因此,在直角坐标系中,矢量的拉普拉斯运算还是一个矢量,其分量等于原矢量各个分量的拉普拉斯运算。通过直接置换,可以证明

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}). \quad (3-113)$$

复习题

- 3-11 一个标量的梯度大小和方向代表什么?
- 3-12 在直角坐标系中,证明式(3-84(c))的正确性。
- 3-13 矢量场散度的物理意义是什么?
- 3-14 如果矢量场在空间某给定点是螺旋形的,在该点的矢量场必须为 0 吗? 请解释。
- 3-15 散度定理规定的转换的意义是什么?
- 3-16 某一点矢量场的旋度与矢量场的环量是如何联系的?
- 3-17 斯托克斯定理规定的转换的意义是什么?
- 3-18 矢量场为“保守场”的条件是什么?

第 3 章关系式

两点间的距离

$$d = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}$$

散度定理

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$$d = [r_2^2 + r_1^2 - 2r_1 r_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) + (z_2 - z_1)^2]^{1/2} \quad \text{矢量算符}$$

$$d = \{R_2^2 + R_1^2 - 2R_1 R_2 [\cos\theta_2 \cos\theta_1 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)]\}^{1/2}$$

坐标系 表 3-1

坐标转换 表 3-2

矢量乘法

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta_{AB}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{n} AB \sin \theta_{AB}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$\nabla T = \hat{x} \frac{\partial T}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial T}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \hat{x} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) +$$

$$\hat{y} \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right)$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

(圆柱坐标和球坐标见封底内页)

斯托克斯定理

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

本章要点

- 矢量代数规定了矢量的加法、减法和乘法规则, 矢量微积分包含了矢量的微分和积分定律。
- 在右手正交坐标系中, 在空间任何一点, 三个基矢量都是互相垂直的, 且规定基矢量的叉积的循环关系遵守右手定则。
- 两个矢量的点积结果是一个标量, 两个矢量的叉积结果是另一个矢量。
- 利用联系两个坐标系的坐标变化关系, 可以将一个坐标系中表示的矢量, 转换到另一个坐标系中去表示。
- 矢量微积分中基本的微分函数是梯度、散度和旋度。
- 标量函数的梯度是矢量, 其幅值等于该标量函数每单位距离最大的增长率, 方向沿着最大增长的方向。
- 矢量场的散度是衡量通过构成单位体积的封闭面向外的每单位体积的净通量。
- 散度定理将矢量场散度的体积分, 转换为该矢量场的通量穿过包围该体积的闭合面的面积分。
- 矢量场的旋度是衡量矢量场在每单位面积 Δs 上的环量, 且当 Δs 选择最大环量的方向。
- 斯托克斯定理将矢量场旋度的面积分, 转换成该矢量场沿包围该曲面的闭合路径的线积分。
- 标量函数的拉普拉斯算子定义为该函数梯度的散度。

重要术语汇总

给出下列术语的解释或定义。

方位角	无散场	径向距离 r
基矢量	散度运算符	距离矢量
直角(笛卡儿)坐标系	散度定理	范围半径 R
矢量的环量	点积(点乘)	标量积
保守场	场线	标量
差积(差乘)	通量密度	简单相乘
旋度运算符	通量线	螺旋场
圆柱坐标系	梯度运算符	球坐标系
微分面元矢量	无旋场	斯托克斯定理
微分长度矢量	拉普拉斯算子	单位矢量
微分体积	幅值	矢量积
方向导数	正交坐标系	矢量
距离矢量	位置矢量	天顶角

习题

3.1 节：矢量代数

* 3.1 矢量 $\mathbf{A}$ 起点为 $(1, -1, -3)$, 终点为 $(2, -1, 0)$ 。求沿 $\mathbf{A}$ 方向的单位矢量。

3.2 给定矢量 $\mathbf{A} = \hat{x}2 - \hat{y}3 + \hat{z}$, $\mathbf{B} = \hat{x}2 - \hat{y} + \hat{z}3$, 以及 $\mathbf{C} = \hat{x}4 + \hat{y}2 - \hat{z}2$, 证明 $\mathbf{C}$ 垂直于 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 。

* 3.3 直角坐标系中, 三角形的三个顶点分别为 $P_1 = (0, 4, 4)$, $P_2 = (4, -4, 4)$, 以及 $P_3 = (2, 2, -4)$, 计算三角形的面积。

3.4 给定 $\mathbf{A} = \hat{x}2 - \hat{y}3 + \hat{z}$, $\mathbf{B} = \hat{x}B_x + \hat{y}2 + \hat{z}B_z$:

(a) 若 $\mathbf{A}$ 平行于 $\mathbf{B}$, 计算 B_x 和 B_z 。

(b) 若 $\mathbf{A}$ 垂直于 $\mathbf{B}$, 求 B_x 和 B_z 之间的关系。

3.5 给定矢量 $\mathbf{A} = \hat{x} + \hat{y}2 - \hat{z}3$, $\mathbf{B} = \hat{x}2 - \hat{y}4$, 以及 $\mathbf{C} = \hat{y}2 - \hat{z}4$, 求

* (a) $\mathbf{A}$ 和 $\hat{a}$,

(b) $\mathbf{B}$ 沿 $\mathbf{C}$ 的分量,

(c) θ_{AC} ,

(d) $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$,

* (e) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$,

(f) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$,

(g) $\hat{x} \times \mathbf{B}$,

(h) $(\mathbf{A} \times \hat{y}) \cdot \hat{z}$ 。

3.6 给定矢量 $\mathbf{A} = \hat{x}2 - \hat{y} + \hat{z}3$, $\mathbf{B} = \hat{x}3 - \hat{z}2$, 求矢量 $\mathbf{C}$, 其幅值为 9, 且方向垂直于 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 。

* 3.7 给定矢量 $\mathbf{A} = \hat{x}(x+2y) - \hat{y}(y+3z) + \hat{z}(3x-y)$, 求在点 $P(1, -1, 2)$ 处平行于

* 答案见附录 D。

$\mathbf{A}$ 的单位矢量。

3.8 在直角坐标系中,证明:

(a) 式(3-29)所给的标量三重积关系;

(b) 式(3-33)所给的矢量三重积关系。

◎3.9 求过直线 $x=1, z=-3$ 上的任意一点,且指向原点的单位矢量的表达式。

3.10 求从 $z=-5$ 平面上的任意一点 $Q(x, y, -5)$ 出发,指向 z 轴上的点 $P(0, 0, h)$ 的单位矢量。

*3.11 求平行于直线 $2x+z=4$ 任一方向的一个单位矢量。

3.12 x - y 平面中的两直线为

直线 1: $x+2y=-6$

直线 2: $3x+4y=8$

运用矢量代数的知识,求两直线交点处较小的角。

*3.13 给定直线的表达式为

$$x+2y=4$$

求从原点出发,终止在该直线上某点 P 处,且垂直于该直线的矢量 $\mathbf{A}$ 的表达式。

3.14 对于给定矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$,证明:

(a) 矢量 $\mathbf{B}$ 在矢量 $\mathbf{A}$ 方向上的分量 $\mathbf{C}$ 为

$$\mathbf{C} = \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{a}}) = \frac{\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})}{|\mathbf{A}|^2}$$

其中, $\hat{\mathbf{a}}$ 是矢量 $\mathbf{A}$ 的单位矢量。

(b) 矢量 $\mathbf{B}$ 垂直于矢量 $\mathbf{A}$ 的分量 $\mathbf{D}$ 为

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} - \frac{\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})}{|\mathbf{A}|^2}$$

*3.15 某平面由下式确定:

$$2x+3y+4z=16$$

求从原点出发且垂直于该平面的单位矢量。

3.16 给定 $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}(z-3y) + \hat{\mathbf{y}}(2x-3z) - \hat{\mathbf{z}}(x+y)$, 求经过点 $P(1, 0, -1)$ 且平行于 $\mathbf{B}$ 的单位矢量。

◎3.17 求矢量 $\mathbf{G}$, 它的模为 4, 方向垂直于矢量 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{F}$ 。其中 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{F}$ 的表达式为

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}2 - \hat{\mathbf{z}}2, \quad \mathbf{F} = \hat{\mathbf{y}}3 - \hat{\mathbf{z}}6.$$

3.18 给定直线的表达式为

$$y = x - 1$$

矢量 $\mathbf{A}$ 的起点为 $P_1(0, 2)$, 终点为该直线上某点 P_2 , 且矢量 $\mathbf{A}$ 垂直于该直线, 求矢量 $\mathbf{A}$ 的表达式。

◎3.19 矢量场 $\mathbf{E}$ 为

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{R}}5R\cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{12}{R}\sin\theta\cos\phi + \hat{\boldsymbol{\phi}}3\sin\phi$$

确定 $\mathbf{E}$ 在 $R=2$ 的球面上的点 $P(2, 30^\circ, 60^\circ)$ 处的切向分量。

3.20 当图示或演示矢量场的空间变化时,经常使用箭头来表示,如题图 3.20 所示。

其中箭头的长度与场的强度成正比,而箭头的方向则与场的方向相同。矢量场 $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{r}}r$ 的示意图如图 3.20 所示,其箭头指向沿径向且远离原点,箭头的长度则随着离开原点的距离而线性增加。采用相同的表示方法,画出下列每个矢量场的草图。

(a) $\mathbf{E}_1 = -\hat{\mathbf{x}}y$;

⊙ (b) $\mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{y}}x$;

(c) $\mathbf{E}_3 = \hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}y$;

(d) $\mathbf{E}_4 = \hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}2y$;

⊙ (e) $\mathbf{E}_5 = \hat{\boldsymbol{\phi}}r$;

(f) $\mathbf{E}_6 = \hat{\mathbf{r}}\sin\phi$ 。

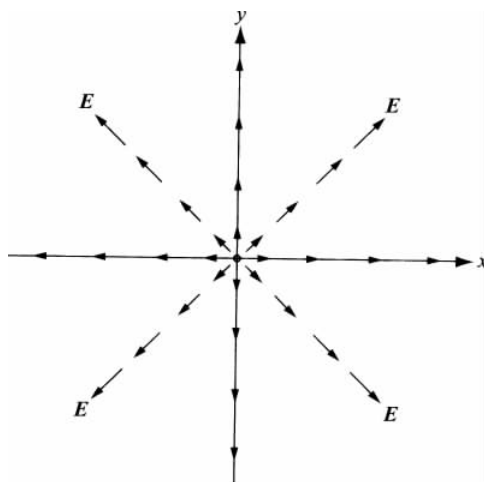


图 P3.20 用箭头表示的矢量场 $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{r}}r$

3.21 使用箭头画出下列矢量场的草图。

(a) $\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{x}}x - \hat{\mathbf{y}}y$;

(b) $\mathbf{E}_2 = -\hat{\boldsymbol{\phi}}$;

(c) $\mathbf{E}_3 = \hat{\mathbf{y}}(1/x)$;

(d) $\mathbf{E}_4 = \hat{\mathbf{r}}\cos\phi$ 。

3.2 节和 3.3 节: 坐标系

* 3.22 将下列直角坐标中的点转换到圆柱坐标和球坐标。

⊙ (a) $P_1(1, 2, 0)$;

(b) $P_2(0, 0, 2)$;

(c) $P_3(1, 1, 3)$;

(d) $P_4(-2, 2, -2)$ 。

⊙ 3.23 将下列圆柱坐标中的点转换到直角坐标。

(a) $P_1(2, \pi/4, -3)$;

(b) $P_2(3, 0, -2)$;

(c) $P_3(4, \pi, 5)$ 。

* 3.24 将下列球坐标中的点转换到圆柱坐标。

- (a) $P_1(5, 0, 0)$;
 (b) $P_2(5, 0, \pi)$;
 (c) $P_3(3, \pi/2, 0)$ 。

3.25 采用适当的微分面元 ds 的表达式, 确定下列表面的面积, 并绘出每个面的草图。

- (a) $r=3; 0 \leq \phi \leq \pi/3; -2 \leq z \leq 2$;
 (b) $2 \leq r \leq 5; \pi/2 \leq \phi \leq \pi; z=0$;
 (c) $2 \leq r \leq 5; \phi=\pi/4; -2 \leq z \leq 2$;
 (d) $R=2; 0 \leq \theta \leq \pi/3; 0 \leq \phi \leq \pi$;
 (e) $0 \leq R \leq 5; \theta=\pi/3; 0 \leq \phi \leq 2\pi$ 。

* 3.26 求以下区域的体积, 并画出每个体积的草图。

- (a) $2 \leq r \leq 5; \pi/2 \leq \phi \leq \pi; 0 \leq z \leq 2$;
 (b) $0 \leq R \leq 5; 0 \leq \theta \leq \pi/3; 0 \leq \phi \leq 2\pi$ 。

3.27 给定球的一部分为 $0 \leq R \leq 2, 0 \leq \theta \leq 90^\circ, 30^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$, 求

- (a) 该区域的表面积;
 (b) 包围的体积。

并画出该区域的草图。

* 3.28 圆柱坐标系中的一个矢量场为

$$\mathbf{E} = \hat{r}r \cos \phi + \hat{\phi}r \sin \phi + \hat{z}z^2$$

点 $P=(2, \pi, 3)$ 位于 $r=2$ 的圆柱面上, 求点 P 处

- (a) 垂直于该圆柱的 $\mathbf{E}$ 的矢量分量;
 (b) 与该圆柱相切的 $\mathbf{E}$ 的矢量分量。

3.29 在空间给定的某点, 球坐标中矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的表示式分别为

$$\mathbf{A} = \hat{R}4 + \hat{\theta}2 - \hat{\phi}$$

$$\mathbf{B} = -\hat{R}2 + \hat{\phi}3$$

求

- (a) $\mathbf{B}$ 在 $\mathbf{A}$ 方向上的投影, 或标量分量;
 (b) $\mathbf{B}$ 在 $\mathbf{A}$ 方向上的矢量分量;
 (c) $\mathbf{B}$ 垂直于 $\mathbf{A}$ 的矢量分量。

* 3.30 给定矢量

$$\mathbf{A} = \hat{r}(\cos \phi + 3z) - \hat{\phi}(2r + 4 \sin \phi) + \hat{z}(r - 2z)$$

$$\mathbf{B} = -\hat{r} \sin \phi + \hat{z} \cos \phi$$

求

- (a) 点 $(2, \pi/2, 0)$ 处的 θ_{AB} ;
 (b) 过点 $(2, \pi/3, 1)$, 且垂直于 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的单位矢量。

3.31 求下列两点之间的距离。

- (a) 直角坐标系中的点 $P_1(1, 2, 3)$ 和点 $P_2(-2, -3, -2)$ 。
 (b) 圆柱坐标系中的点 $P_3(1, \pi/4, 3)$ 和点 $P_4(3, \pi/4, 4)$ 。

(c) 球坐标系中的点 $P_5(4, \pi/2, 0)$ 和点 $P_6(3, \pi, 0)$ 。

* 3.32 确定下列两点间的距离。

(a) $P_1(1, 1, 2)$ 和 $P_2(0, 2, 3)$;

(b) $P_3(2, \pi/3, 1)$ 和 $P_4(4, \pi/2, 3)$;

(c) $P_5(3, \pi, \pi/2)$ 和 $P_6(4, \pi/2, \pi)$ 。

◎ 3.33 将矢量 $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{R}} \sin^2 \theta \cos \phi + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cos^2 \phi - \hat{\boldsymbol{\phi}} \sin \phi$ 转换成圆柱坐标, 并求出其在点 $P(2, \pi/2, \pi/2)$ 处的值。

3.34 将下列矢量转换到圆柱坐标系, 并计算其在给定点的值。

(a) $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}(x+y)$; $P_1 = (1, 2, 3)$ 。

(b) $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}(y-x) + \hat{\mathbf{y}}(x-y)$; $P_2 = (1, 0, 2)$ 。

(c) $\mathbf{C} = \hat{\mathbf{x}}y^2/(x^2+y^2) - \hat{\mathbf{y}}x^2/(x^2+y^2) + \hat{\mathbf{z}}4$; $P_3 = (1, -1, 2)$ 。

(d) $\mathbf{D} = \hat{\mathbf{R}} \sin \theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cos \theta + \hat{\boldsymbol{\phi}} \cos^2 \phi$; $P_4 = (2, \pi/2, \pi/4)$ 。

(e) $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{R}} \cos \phi + \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \phi + \hat{\boldsymbol{\phi}} \sin^2 \theta$; $P_5 = (3, \pi/2, \pi)$ 。

* 3.35 将下列矢量转换到球坐标系, 并计算其在给定点的值。

(a) $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}y^2 + \hat{\mathbf{y}}xz + \hat{\mathbf{z}}4$; $P_1 = (1, -1, 2)$ 。

(b) $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{y}}(x^2+y^2+z^2) - \hat{\mathbf{z}}(x^2+y^2)$; $P_2 = (-1, 0, 2)$ 。

◎ (c) $\mathbf{C} = \hat{\mathbf{r}} \cos \phi - \hat{\boldsymbol{\phi}} \sin \phi + \hat{\mathbf{z}} \cos \phi \sin \phi$; $P_3 = (2, \pi/4, 2)$ 。

(d) $\mathbf{D} = \hat{\mathbf{x}}y^2/(x^2+y^2) - \hat{\mathbf{y}}x^2/(x^2+y^2) + \hat{\mathbf{z}}4$; $P_4 = (1, -1, 2)$ 。

3.4 节~3.7 节: 梯度、散度和旋度运算

3.36 求下列标量函数的梯度。

(a) $T = 3/(x^2+z^2)$;

(b) $V = xy^2z^4$;

(c) $U = z \cos \phi / (1+r^2)$;

◎ (d) $W = e^{-R} \sin \theta$;

(e) $S = 4x^2 e^{-z} + y^3$;

(f) $N = r^2 \cos^2 \phi$;

(g) $M = R \cos \theta \sin \phi$ 。

3.37 求下列标量场的梯度 ∇T 的解析解, 并用相应的箭头表示。

(a) $T = 10 + x, -10 \leq x \leq 10$ 。

(b) $T = x^2, -10 \leq x \leq 10$ 。

(c) $T = 100 + xy, -10 \leq x \leq 10$ 。

(d) $T = x^2 y^2, -10 \leq x, y \leq 10$ 。

(e) $T = 20 + x + y, -10 \leq x, y \leq 10$ 。

(f) $T = 1 + \sin(\pi x/3), -10 \leq x \leq 10$ 。

(g) $T = 1 + \cos(\pi x/3), -10 \leq x \leq 10$ 。

(h) $T = 15 + r \cos \phi, 0 \leq r \leq 10, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ 。

(i) $T = 15 + r \cos^2 \phi, 0 \leq r \leq 10, 0 \leq \phi \leq 2\pi$.

* 3.38 已知标量函数 T 的梯度为

$$\nabla T = \hat{z} e^{-2z}$$

如果在 $z=0$ 处 $T=10$, 求 $T(z)$ 。

3.39 按照推导式(3-82)的类似步骤, 推导球坐标系中 ∇ 的表达式(3-83)。

* 3.40 对于标量函数 $V = xy^2 - z^2$, 求其沿矢量 $\mathbf{A} = (\hat{x} - \hat{y}z)$ 方向的方向导数, 并计算它在 $P(1, -1, 4)$ 处的值。

◎ 3.41 求 $\mathbf{E} = \hat{x}x - \hat{y}y$ 沿着如图 P3.41 所示的圆形路径上 P_1 到 P_2 段的线积分。

3.42 对于标量函数 $T = \frac{1}{2} e^{-r/5} \cos \phi$, 确定其沿着径向 $\hat{r}$ 的方向导数, 并计算其在点 $P(2, \pi/4, 3)$ 处的值。

* 3.43 对于给定的标量函数 $U = \frac{1}{R} \sin^2 \theta$, 确定其沿半

径 $\hat{R}$ 方向的方向导数, 并计算其在点 $P(5, \pi/4, \pi/2)$ 处的值。

3.44 图 P3.44 表示各个矢量场的矢量图, 分析确定 $\nabla \cdot \mathbf{A}$, 然后将结果与基于示意图的期望结果相比较。

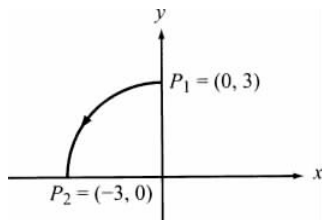
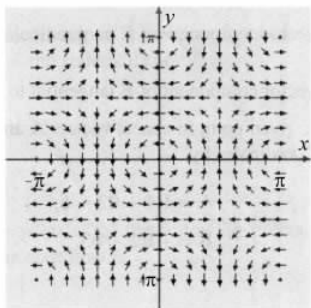
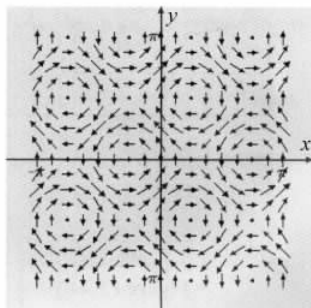


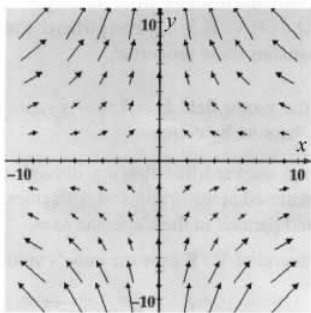
图 P3.41 题 3.41 图



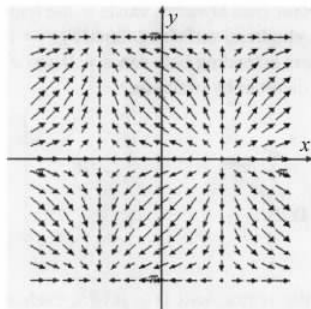
(a) $\mathbf{A} = -\hat{x} \cos x \sin y + \hat{y} \sin x \cos y, -\pi \leq x, y \leq \pi$



(b) $\mathbf{A} = -\hat{x} \sin 2y + \hat{y} \cos 2x, -\pi \leq x, y \leq \pi$



(c) $\mathbf{A} = -\hat{x}xy + \hat{y}y^2, -10 \leq x, y \leq 10$



(d) $\mathbf{A} = -\hat{x} \cos x + \hat{y} \sin y, -\pi \leq x, y \leq \pi$

图 P3.44 题 3.44 图

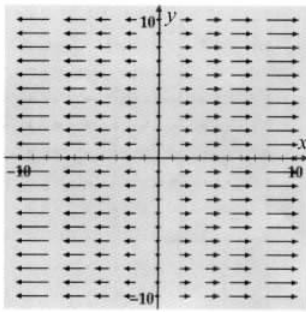
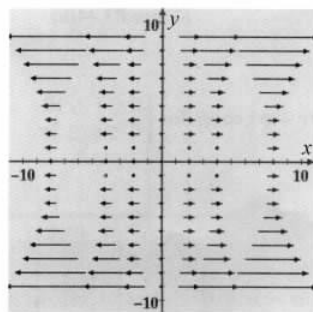
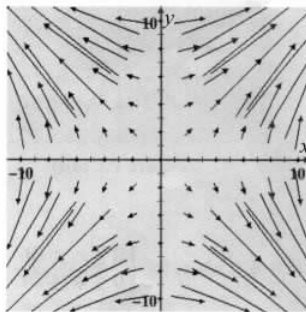
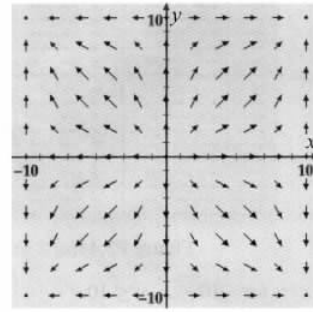
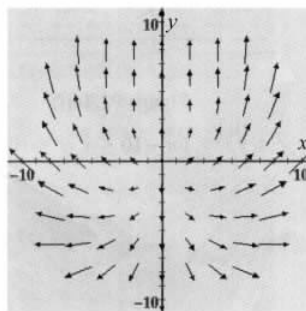
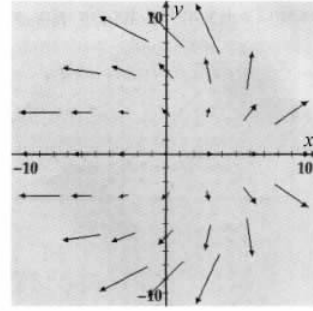
(e) $A = \hat{x}x, -10 \leq x \leq 10$ (f) $A = \hat{x}xy^2, -10 \leq x, y \leq 10$ (g) $A = \hat{x}xy^2 + \hat{y}x^2y, -10 \leq x, y \leq 10$ (h) $A = \hat{x} \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) + \hat{y} \sin\left(\frac{\pi y}{10}\right), -10 \leq x, y \leq 10$ (i) $A = \hat{r}r + \hat{\phi}r \cos \phi, 0 \leq r \leq 10, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ (j) $A = \hat{r}r^2 + \hat{\phi}r^2 \sin \phi, 0 \leq r \leq 10, 0 \leq \phi \leq 2\pi$

图 P3.44 (续)

3.45 矢量场 $\mathbf{E}$ 具有以下几个特点: (a) $\mathbf{E}$ 的方向沿着 $\hat{\mathbf{R}}$ 的方向; (b) $\mathbf{E}$ 的大小仅与到原点的距离有关; (c) $\mathbf{E}$ 在原点不存在; (d) $\nabla \cdot \mathbf{E} = 12$ 在处处均成立。求满足这些条件的 $\mathbf{E}$ 的表达式。

* 3.46 对于矢量场 $\mathbf{E} = \hat{x}xz - \hat{y}yz^2 - \hat{z}xy$, 通过下面的计算来验证散度定理。

(a) 流出以原点为中心的立方体表面的总通量, 该立方体的边长为 2 个单位, 且各边平行于直角坐标轴。

(b) $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 在该立方体上的体积分。

3.47 对于矢量场 $\mathbf{E} = \hat{r}10e^{-r} - \hat{z}3z$, 在由 $r=2, z=0, r=4$ 构成的圆柱区域内, 验证散

度定理。

* 3.48 已知矢量场 $\mathbf{D} = \hat{\mathbf{r}}r^3$, 存在于 $r=1$ 和 $r=2$ 的两个同心圆柱面之间, 且两个同心圆柱体延伸到 $z=0$ 和 $z=5$ 之间的区域。计算以下积分, 验证散度定理。

(a) $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$ 。

(b) $\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} \cdot dV$ 。

3.49 已知矢量场 $\mathbf{D} = \hat{\mathbf{R}}3R^2$, 针对由 $R=1$ 和 $R=2$ 确定的球壳之间的区域, 计算散度定理两边的值。

◎ 3.50 已知矢量场 $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}xy - \hat{\mathbf{y}}(x^2 + 2y^2)$, 计算

(a) 沿图 P3.50(a) 的三角形路径的 $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 。

(b) 该三角形区域的 $\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s}$ 。

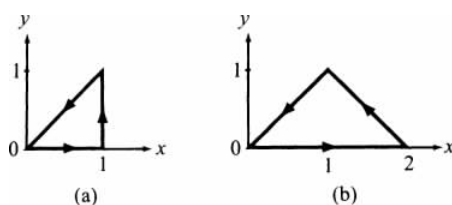


图 P3.50 (a) 习题 3.50 和 (b) 习题 3.51

3.51 利用图 P3.50(b) 的路径, 重新计算习题 3.50。

* 3.52 已知矢量场

$$\mathbf{B} = (\hat{\mathbf{r}}r \cos \phi + \hat{\boldsymbol{\phi}} \sin \phi)$$

计算以下积分, 验证斯托克斯定理。

(a) 沿图 P3.52(a) 的半圆路径的 $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 。

(b) 该半圆区域的 $\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}$ 。

3.53 利用图 P3.52(b) 的路径, 重新计算题 3.52。

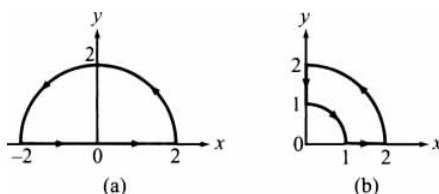


图 P3.52 (a) 习题 3.52 以及 (b) 习题 3.53

3.54 针对矢量 $\mathbf{A} = (\hat{\mathbf{R}}\cos\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}}\sin\theta)$, 在单位半径的半球区域上验证斯托克斯定理。

◎ 3.55 已知矢量场

$$\mathbf{B} = (\hat{\mathbf{r}}\cos\phi + \hat{\boldsymbol{\phi}}\sin\phi)$$

计算以下积分以验证斯托克斯定理。

(a) 沿图 P3.55 的 $1/4$ 圆路径的 $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 。

(b) 该 $1/4$ 圆区域的 $\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}$ 。

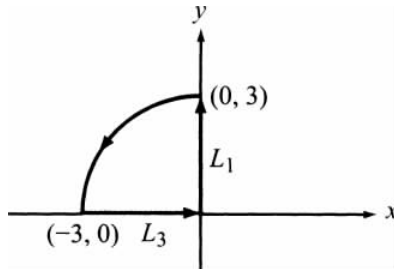


图 P3.55 题 3.55

* 3.56 判断以下矢量场是有旋场还是保守场,或者两者都是?

(a) $\mathbf{A} = \hat{x}x^2 - \hat{y}2xy$;

(b) $\mathbf{B} = \hat{x}x^2 - \hat{y}y^2 + \hat{z}2z$;

(c) $\mathbf{C} = \hat{r}(\sin\phi)/r^2 + \hat{\phi}(\cos\phi)/r^2$;

(d) $\mathbf{D} = \hat{R}/R$;

(e) $\mathbf{E} = \hat{r}\left(3 - \frac{r}{1+r}\right) + \hat{z}z$;

(f) $\mathbf{F} = (\hat{x}y + \hat{y}x)/(x^2 + y^2)$;

(g) $\mathbf{G} = \hat{x}(x^2 + z^2) - \hat{y}(y^2 + x^2) - \hat{z}(y^2 + z^2)$;

(h) $\mathbf{H} = \hat{R}(Re^{-R})$ 。

◎ 3.57 求下列标量函数的拉普拉斯运算。

(a) $V = 4xy^2z^3$;

(b) $V = xy + yz + zx$;

(c) $V = 3/(x^2 + z^2)$;

(d) $V = 5e^{-r}\cos\phi$;

(e) $V = 10e^{-R}\sin\theta$ 。

3.58 求下列标量函数的拉普拉斯运算。

(a) $V_1 = 10r^3\sin 2\phi$;

(b) $V_2 = (2/R^2)\cos\theta\sin\phi$ 。