

第 1 章

力系的简化

若刚体分别受到两个不同力系的作用而其运动状态产生完全相同的变化,则称这两个力系彼此**等效**(equivalence)。用简单力系等效代换复杂力系,可将力系简化。根据力系简化的结果,可导出力系的平衡条件,为构件强度、刚度和稳定性计算提供基础,而且也为动力学问题的研究创造条件。

本章首先介绍力、力矩和力偶的基本概念,然后研究空间任意力系的简化,最后讨论力系的简化结果。

1.1 力

力是物体间的相互作用,这种作用能使物体运动状态改变或使物体变形。实践表明,力对物体的作用效应取决于三个要素:大小、方向和作用点。在我国法定计量单位制中,力的单位是 N 或 kN。

可用有向线段表示力的三要素,线段的长度表示力的大小,箭头指向表示力的方向,线段的始端或末端表示力的作用点,因为两个共点力的合成符合矢量求和规则,即平行四边形法则,所以力是矢量。

设力 $\boldsymbol{F}$ 与直角坐标轴正向的夹角分别为 α, β, γ , 各坐标轴的单位矢量为 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, 如图 1.1(a)、(b)所示,则力 $\boldsymbol{F}$ 在各轴上的投影分别为

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{i} = F \cos \alpha \\ F_y &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{j} = F \cos \beta \\ F_z &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = F \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

则力 $\mathbf{F}$ 的解析表达式为

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (1.2)$$

力 $\mathbf{F}$ 的大小和方向余弦分别为

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (1.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= F_x / F \\ \cos \beta &= F_y / F \\ \cos \gamma &= F_z / F \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

当已知 φ 和 γ 时(见图 1.1(a)),可先将力 $\mathbf{F}$ 投影到 Oxy 平面,得到 $\mathbf{F}_{xy}$;投影到垂直于该平面的轴 z 上,得到 F_z ;然后再将 $\mathbf{F}_{xy}$ 向轴 x 和轴 y 投影,得到 F_x 和 F_y ,这就是常用的二次投影法。

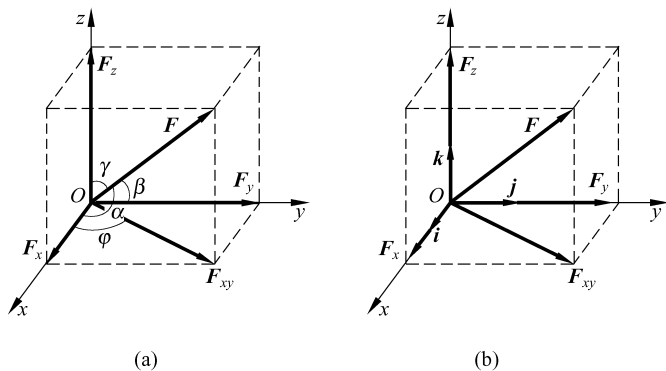


图 1.1

1.2 力对点的矩矢 力对轴的矩

1. 力对点的矩矢

如图 1.2 所示, $\mathbf{r}$ 表示点 O 至力 $\mathbf{F}$ 作用点 A 的矢径, 力 $\mathbf{F}$ 对点 O 的矩的矢量用 $\mathbf{M}_O(\mathbf{F})$ 表示。该矢量的模表示力矩的大小, 即

$$|\mathbf{M}_O(\mathbf{F})| = Fh = 2A_{\triangle OAB} = Fr \sin \alpha = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| \quad (1.5)$$

式中 $A_{\triangle OAB}$ 为 $\triangle OAB$ 的面积。此外, 力矩矢 $\mathbf{M}_O(\mathbf{F})$ 的方向与 $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ 的方向也一致, 所以有

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (1.6)$$

即力对点的矩矢等于矩心到力作用点的矢径与该力的矢量积。

显然,力对点的矩矢的大小与方向均与矩心 O 的位置有关,是固定矢(fixed vector),其始端必须放在矩心上。力矩的单位为 $\text{N} \cdot \text{m}$ 或 $\text{kN} \cdot \text{m}$ 。

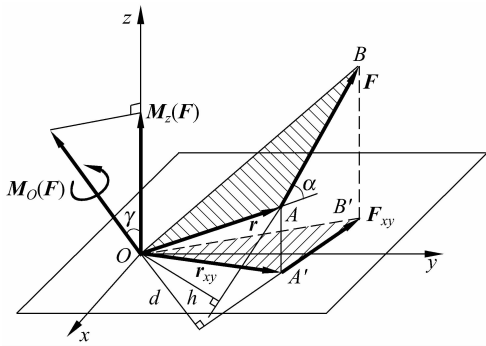


图 1.2

如图 1.2 所示,令 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 为各坐标轴的单位矢量,力 $\mathbf{F}$ 由式(1.2)表示, $\mathbf{r}$ 的解析式为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

则力对点 O 的矩矢的解析表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= (yF_z - zF_y)\mathbf{i} + (zF_x - xF_z)\mathbf{j} + (xF_y - yF_x)\mathbf{k} \end{aligned} \quad (1.7)$$

2. 力对轴的矩

如图 1.2 所示,力 $\mathbf{F}$ 对任意轴 z 的矩用 $M_z(\mathbf{F})$ 表示。由于 $\mathbf{F}$ 与轴 z 平行的分力 F_z 对轴 z 的矩为零,所以 $M_z(\mathbf{F})$ 就等于 Oxy 平面内分力 F_{xy} 对轴 z 与该面交点 O 的矩,即

$$M_z(\mathbf{F}) = M_O(\mathbf{F}_{xy}) = \pm F_{xy}d = \pm 2A_{\triangle OA'B'} \quad (1.8)$$

力对轴的矩是力使刚体绕该轴转动效应的度量,是代数量,其正负号由右手螺旋规则确定,即拇指指向与轴 Oz 方向一致为正,反之为负。由式(1.8)可知,当力沿作用线滑动时,力对轴的矩不变。若力的作用线与轴平行($F_{xy}=0$)或相交($d=0$),力对轴的矩为零。所以,力与轴共面时,力对轴的矩为零。

如图 1.2 所示,由几何学可知

$$A_{\triangle OAB} \cos \gamma = A_{\triangle OA'B'}$$

由式(1.5)和式(1.8)可得

$$M_O(\mathbf{F})\cos\gamma = M_z(\mathbf{F})$$

用 $[\mathbf{M}_O(\mathbf{F})]_z$ 表示 $\mathbf{M}_O(\mathbf{F})$ 在轴 z 上的投影,即

$$M_z(\mathbf{F}) = [\mathbf{M}_O(\mathbf{F})]_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \quad (1.9)$$

上式表明,力对点的矩矢在通过该点的任一轴上的投影等于力对该轴的矩。所以有

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = M_x(\mathbf{F})\mathbf{i} + M_y(\mathbf{F})\mathbf{j} + M_z(\mathbf{F})\mathbf{k} \quad (1.10)$$

比较式(1.7)和式(1.10)可得

$$\left. \begin{aligned} M_x(\mathbf{F}) &= yF_z - zF_y \\ M_y(\mathbf{F}) &= zF_x - xF_z \\ M_z(\mathbf{F}) &= xF_y - yF_x \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

例 1.1 托架 OC 套在转轴 z 上,在点 C 作用一力 $F=2\,000\text{N}$,方向如图 1.3(a) 所示。点 C 在 Oxy 平面内。试分别求力 $\mathbf{F}$ 对三个坐标轴的矩以及对点 O 的矩。

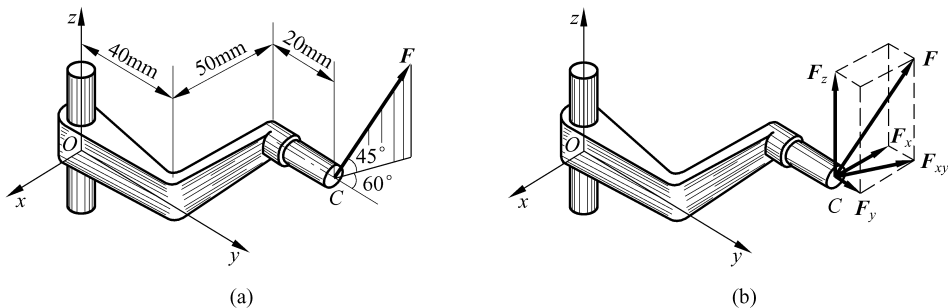


图 1.3

解 力 $\mathbf{F}$ 作用点 C 的坐标是

$$x = -50\text{mm}, \quad y = 60\text{mm}, \quad z = 0$$

力 $\mathbf{F}$ 沿各坐标轴的投影是

$$F_x = -(2\,000\text{N})\cos 45^\circ \sin 60^\circ = -1\,224.7\text{N}$$

$$F_y = (2\,000\text{N})\cos 45^\circ \cos 60^\circ = 707.1\text{N}$$

$$F_z = (2\,000\text{N})\sin 45^\circ = 1\,414.2\text{N}$$

将各量代入式(1.11),可得力 $\mathbf{F}$ 对三个坐标轴的矩分别为

$$M_x(\mathbf{F}) = (0.06\text{m}) \times (1\,414.2\text{N}) = 84.9\text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_y(\mathbf{F}) = -(-0.05\text{m}) \times (1\,414.2\text{N}) = 70.7\text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_z(\mathbf{F}) = (-0.05\text{m}) \times (707.1\text{N}) - (0.06\text{m}) \times (-1\,224.7\text{N}) = 38.1\text{N} \cdot \text{m}$$

由式(1.10)可得力 $\mathbf{F}$ 对点 O 的矩为

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = (84.9\mathbf{i} + 70.7\mathbf{j} + 38.1\mathbf{k})\text{N} \cdot \text{m}$$

例 1.2 刚架受力如图 1.4 所示,已知力 $\mathbf{F}$ 的模 F, a, b, c, θ 和 φ 。试求:

- (1) $\mathbf{F}$ 对点 O 的矩;
 (2) $\mathbf{F}$ 对轴 OA 的矩。

解 (1) 求 $\mathbf{M}_O(\mathbf{F})$

写出点 B 的矢径 $\mathbf{r}$ 和力 $\mathbf{F}$ 在该坐标系中的解析表达式:

$$\mathbf{r} = c\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = F(\sin\varphi\cos\theta\mathbf{i} + \sin\varphi\sin\theta\mathbf{j} - \cos\varphi\mathbf{k})$$

由式(1.7)可得

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & c \\ F\sin\varphi\cos\theta & F\sin\varphi\sin\theta & -F\cos\varphi \end{vmatrix} \\ &= Fc\sin\varphi(-\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j})\end{aligned}$$

- (2) 求 $M_{OA}(\mathbf{F})$

设 $\mathbf{e}$ 为 OA 轴的单位矢量, 则

$$\mathbf{e}_{OA} = \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{a\mathbf{i} + c\mathbf{k}}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

由式(1.9)可得

$$M_{OA}(\mathbf{F}) = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_{OA} = -\frac{Fac\sin\theta\sin\varphi}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

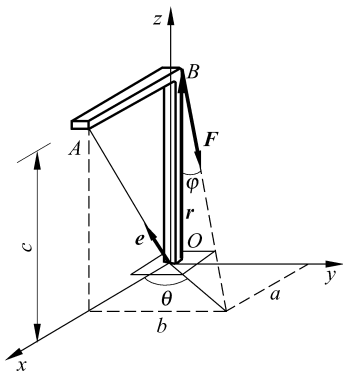


图 1.4

1.3 力偶矩矢

由大小相等、作用线不重合的两个反向平行力组成的特殊力系, 称为**力偶**(couple)。力偶能使刚体改变转动状态, 使变形体产生扭曲变形。

力偶两力所在的平面称为**力偶的作用面**, 两力作用线间的垂直距离称为**力偶臂**, 力偶中一个力的大小和力偶臂的乘积称为**力偶矩**(moment of couple)。空间力偶对刚体的作用效应取决于力偶矩的大小、作用面的方位和力偶的旋转方向, 称为**力偶三要素**(three elements of couple)。可以用一个矢量将这三个要素同时表示出来: 矢量的长短按一定比例表示力偶矩的大小, 矢量的方位表示力偶作用面法线的方位, 矢量的箭头指向按右手螺旋规则确定, 表示力偶的转向(见图 1.5)。这个矢量称为**力偶矩矢**(moment vector of couple), 用 $\mathbf{M}$ 表示。作用于刚体上的一组力偶称为力偶系, 力偶矩矢在空间任意分布的力偶系称为空间力偶系。

力偶对刚体的作用效果, 可用力偶中的两个力对空间某点之矩的矢量和来度量。设有力 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{F}'$ 组成空间力偶, 如图 1.6 所示。其力偶矩矢 $\mathbf{M}$ 就等于该力偶对空

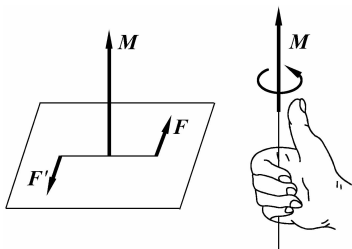


图 1.5

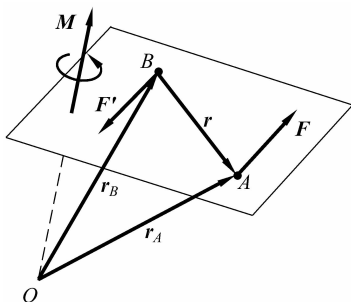


图 1.6

间任一点 O 的矩,由式(1.6)可得

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}' = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

计算表明:力偶矩矢恒等于矢积 $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$,力偶对任意点之矩与矩心的位置无关。即力偶对刚体的作用效果与矩心无关,所以力偶矩矢沿矩矢方向任意滑动或平行移动都不影响力偶对同一刚体的作用效果,可见力偶矩矢是自由矢 (free vector)。

由于力偶对刚体的作用效果完全由力偶矩矢来确定,而力偶矩矢是自由矢量,因此,两个力偶无论作用在刚体上什么位置,也不论力的大小、方向和力偶臂的长短,只要其力偶矩矢相等,就一定等效。所以,作用在刚体上两力偶的等效条件是:力偶矩矢相等。

能否以“力偶是自由矢”为理由,将图 1.7 中梁 CD 上的力偶 M 移到梁 AC 上?为什么?

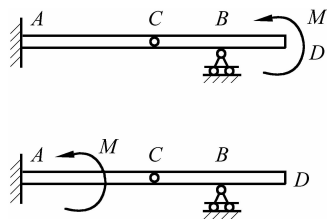


图 1.7

1.4 力系的简化 主矢和主矩

1. 力的平移

图 1.8 表示力 $\mathbf{F}$ 作用在刚体的点 A 上,为把它平移到刚体上的任意点 O ,可在点 O 加上一对与力 $\mathbf{F}$ 等值且平行的力 $\mathbf{F}'$ 和 $\mathbf{F}''$,由于 $\mathbf{F}'$ 和 $\mathbf{F}''$ 为共线平衡力系,合力为零,所以力系 $(\mathbf{F}, \mathbf{F}', \mathbf{F}'')$ 与原力 $\mathbf{F}$ 是等效的。若将 $\mathbf{F}'$ 看作 $\mathbf{F}$ 平移到点 O 的力,则 $\mathbf{F}$ 与 $\mathbf{F}''$ 构成一个附加力偶,若用 $\mathbf{r}$ 表示点 O 至点 A 的矢径,由式(1.6)可知,附加力偶矩矢等于原力 $\mathbf{F}$ 对点 O 的矩矢:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

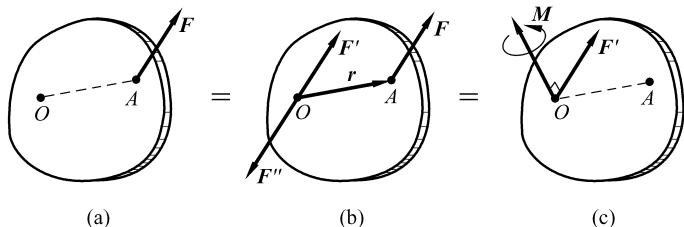


图 1.8

由此得到如下结论：作用在刚体上某一点的力可平移到该刚体上任一点，但需增加一附加力偶才能与原力等效，此力偶矩矢等于原力对新的作用点的矩矢。

当刚体上的力沿其作用线移动时，附加力偶的力偶矩矢等于零，即作用在刚体上的力可沿其作用线任意移动而不改变对刚体的作用效应，此性质称为力的可传性 (transmissibility of force)。这样，作用在刚体上力的三要素成为：大小、方向和作用线。因此，作用于刚体上的力是滑移矢 (sliding vector)。

力的可传性适用于变形体吗？为什么？试举例说明。

2. 力系向一点简化

力的作用线在空间任意分布的力系称为空间任意力系，各力作用线汇交于一点的空间力系称为空间汇交力系 (concurrent force system in space)。设刚体上作用有空间任意力系 $F_1, F_2, \dots, F_n$ ，如图 1.9 所示。以刚体内任意点 O 为简化中心，将力系中各力平移到点 O ，并加上相应的附加力偶，得到一个作用于点 O 的空间汇交力系 $(F'_1, F'_2, \dots, F'_n)$ 和一个由所有附加力偶组成的空间力偶系 $(F_1, F''_1), (F_2, F''_2), \dots, (F_n, F''_n)$ ，其力偶矩矢分别为 $M_1, M_2, \dots, M_n$ ，它们与原力系等效。

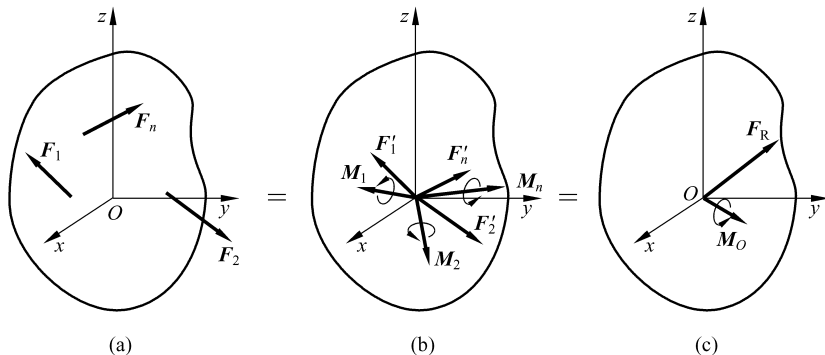


图 1.9

利用矢量合成的平行四边形法则分别对空间汇交力系和空间力偶系的各矢量逐次合成，得到作用线过点 O 的一个力和一个力偶，该力的力矢等于原力系各力的矢

量和 $\mathbf{F}_R$, 该力偶的力偶矩矢等于原力系中各力对简化中心的矩的矢量和 $\mathbf{M}_O$, 即

$$\mathbf{F}_R = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}'_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (1.12)$$

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i) \quad (1.13)$$

$\mathbf{F}_R$ 称为力系的主矢(principal vector), $\mathbf{M}_O$ 称为力系对简化中心 O 的主矩(principal moment)。

由此可见: 空间任意力系可简化为作用在简化中心上的一个力和一个力偶, 该力的力矢和力偶的力偶矩矢分别称为力系的主矢和对简化中心的主矩。所以, 刚体上两力系等效的条件是: 力系的主矢和对同一点的主矩分别相等。

主矢和力系中各力的解析式分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_R &= F_{Rx}\mathbf{i} + F_{Ry}\mathbf{j} + F_{Rz}\mathbf{k} \\ \mathbf{F}_i &= F_{ix}\mathbf{i} + F_{iy}\mathbf{j} + F_{iz}\mathbf{k} \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

代入式(1.12), 比较系数可得

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad F_{Rz} = \sum_{i=1}^n F_{iz}$$

或简写为

$$\left. \begin{aligned} F_{Rx} &= \sum F_x \\ F_{Ry} &= \sum F_y \\ F_{Rz} &= \sum F_z \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

主矢 $\mathbf{F}_R$ 的大小和方向余弦为

$$F_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{F}_R, \mathbf{i}) &= \frac{\sum F_x}{F_R} \\ \cos(\mathbf{F}_R, \mathbf{j}) &= \frac{\sum F_y}{F_R} \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\cos(\mathbf{F}_R, \mathbf{k}) = \frac{\sum F_z}{F_R}$$

根据式(1.10), 则式(1.13)可写为

$$M_{Ox}\mathbf{i} + M_{Oy}\mathbf{j} + M_{Oz}\mathbf{k} = \sum_{i=1}^n [M_x(\mathbf{F}_i)\mathbf{i} + M_y(\mathbf{F}_i)\mathbf{j} + M_z(\mathbf{F}_i)\mathbf{k}]$$

比较系数可得

$$M_{Ox} = \sum_{i=1}^n M_x(\mathbf{F}_i), \quad M_{Oy} = \sum_{i=1}^n M_y(\mathbf{F}_i), \quad M_{Oz} = \sum_{i=1}^n M_z(\mathbf{F}_i)$$

或简写为

$$\left. \begin{aligned} M_{Ox} &= \sum M_x \\ M_{Oy} &= \sum M_y \\ M_{Oz} &= \sum M_z \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

主矩 $\mathbf{M}_O$ 的大小和方向余弦分别为

$$M_O = \sqrt{(\sum M_x)^2 + (\sum M_y)^2 + (\sum M_z)^2} \quad (1.18)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{i}) &= \frac{\sum M_x}{M_O} \\ \cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{j}) &= \frac{\sum M_y}{M_O} \\ \cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{k}) &= \frac{\sum M_z}{M_O} \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

必须指出,主矢只有大小和方向,是自由矢。描述力系使物体平行移动的作用效应,力系对不同简化中心简化时,主矢大小和方向保持不变,是一个不变量。主矩描述力系使物体绕简化中心转动的作用效应,主矩一般随简化中心的不同而变化。

若力系中各力的作用线均在同一平面(如 Oxy 平面)内,则该力系为平面力系。显然,平面力系中各力沿垂直于该平面的轴 z 的投影以及对平面内的轴 x 和 y 的矩分别等于零。所以,由式(1.15)和式(1.18)可得平面力系的主矢和主矩大小的表达式分别为

$$F_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} \quad (1.20)$$

$$M_O = \sum M_{Oz}(\mathbf{F}_i) = \sum M_O(\mathbf{F}_i) \quad (1.21)$$

空间任意力系分别向 A, B 两点简化,可得主矢和主矩分别为 $\mathbf{F}_A, \mathbf{M}_A$ 及 $\mathbf{F}_B, \mathbf{M}_B$ 。试问 $\mathbf{F}_A$ 与 $\mathbf{F}_B$ 及 $\mathbf{M}_A$ 与 $\mathbf{M}_B$ 之间有什么关系?

1.5 力系的简化结果 合力矩定理

空间力系向任意点 O 简化后,随着主矢 $\mathbf{F}_R$ 和主矩 $\mathbf{M}_O$ 的不同,分下列四种情况讨论其简化结果:

(1) $\mathbf{F}_R = 0, \mathbf{M}_O = 0$ 。力系平衡,将在第3章和第4章中详细讨论这一情形。

(2) $\mathbf{F}_R \neq 0, \mathbf{M}_O = 0$ 。力系简化为作用线过点 O 的一个合力,其大小和方向等于力系的主矢。

(3) $\mathbf{F}_R=0, \mathbf{M}_O \neq 0$ 。力系简化为一个合力偶,该力偶的矩等于力系对点 O 的主矩。

(4) $\mathbf{F}_R \neq 0, \mathbf{M}_O \neq 0$ 。再分为两种情况讨论。

若 $\mathbf{F}_R \cdot \mathbf{M}_O = 0$, $\mathbf{F}_R$ 与 $\mathbf{M}_O$ 垂直,由力平移的逆过程,可进一步简化为一个作用线过点 O_1 的合力 $\mathbf{F}'_R$ (图 1.10(a)),点 O 与 O_1 间的距离 $r = M_O / F_R$, O 至 O_1 的矢径 $\mathbf{r}$ 的方向就是矢量 $\mathbf{F}_R \times \mathbf{M}_O$ 的方向,因此可得 $\mathbf{r}$ 的计算式

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}_R \times \mathbf{M}_O / F_R^2 \quad (1.22)$$

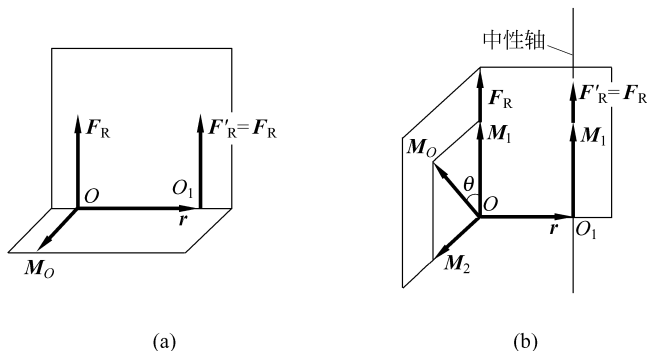


图 1.10

若 $\mathbf{F}_R \cdot \mathbf{M}_O \neq 0$, $\mathbf{F}_R$ 与 $\mathbf{M}_O$ 不垂直而成角度 θ (图 1.10(b)),将 $\mathbf{M}_O$ 分解为平行和垂直于 $\mathbf{F}_R$ 的两个分量 $\mathbf{M}_1$ 和 $\mathbf{M}_2$ 。 $\mathbf{F}_R$ 与 $\mathbf{M}_2$ 可进一步合成为作用线过 O_1 的力 $\mathbf{F}'_R$, 因为 $\mathbf{F}_R \times \mathbf{M}_2 = \mathbf{F}_R \times \mathbf{M}_O$, 所以 O 至 O_1 的矢径 $\mathbf{r}$ 仍可由式(1.22)计算。而 $\mathbf{M}_1$ 的计算式为

$$\mathbf{M}_1 = (\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{F}_R) \mathbf{F}_R / F_R^2 \quad (1.23)$$

是与简化中心无关的自由矢量,可平移到 $\mathbf{F}'_R$ 的作用线上。因此,力系简化为一个力 $\mathbf{F}'_R$ 和一个与其共线的力偶 $\mathbf{M}_1$ 。力 $\mathbf{F}'_R$ 和力偶 $\mathbf{M}_1$ 组成的力系称为力螺旋。当 $\mathbf{F}_R$ 与 $\mathbf{M}_1$ 同向时($\mathbf{F}_R \cdot \mathbf{M}_1 > 0$),称为右力螺旋,例如用改锥拧紧木螺钉时,改锥对木螺钉的作用就是一个右力螺旋。当 $\mathbf{F}_R$ 与 $\mathbf{M}_1$ 反向时($\mathbf{F}_R \cdot \mathbf{M}_1 < 0$),称为左力螺旋。力 $\mathbf{F}'_R$ 的作用线称为力螺旋的中心轴。力螺旋既不能与一力等效,又不能与一力偶等效,是最简力系,是空间力系简化后的最一般形式。空间力系简化结果如表 1.1 所示。

表 1.1 空间力系的简化结果

主 矢 和 主 矩			简 化 结 果
$\boldsymbol{F}_{\text{R}} \cdot \boldsymbol{M}_O = 0$	$\boldsymbol{F}_{\text{R}} = 0$	$\boldsymbol{M}_O = 0$	平 衡
		$\boldsymbol{M}_O \neq 0$	合力偶
	$\boldsymbol{F}_{\text{R}} \neq 0$	$\boldsymbol{M}_O = 0$	合 力
		$\boldsymbol{M}_O \neq 0$	
$\boldsymbol{F}_{\text{R}} \cdot \boldsymbol{M}_O \neq 0$	$\boldsymbol{F}_{\text{R}} // \boldsymbol{M}_O$		力螺旋
	$\angle(\boldsymbol{M}_O, \boldsymbol{F}_{\text{R}}) = \theta$		

若空间力系简化为点 O_1 的合力 $\mathbf{F}'_R$ (图 1.10(a)), 则有 $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}'_R) = \mathbf{M}_O$, 而主矩

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i), \text{ 因而有}$$

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}'_R) = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i) \quad (1.24)$$

即空间力系的合力对任一点的矩矢等于力系各力对同一点的矩矢的矢量和。将上式向通过点 O 的任意轴 z 投影, 可得

$$M_z(\mathbf{F}'_R) = \sum_{i=1}^n M_z(\mathbf{F}_i) \quad (1.25)$$

即空间力系的合力对任一轴的矩等于力系各力对同一轴的矩的代数和。式(1.24)和式(1.25)称为合力矩定理(theorem of moment of resultant force)。

例 1.3 如图 1.11(a)所示, 梁 AB 受外力系作用, $P=75\text{N}$, $F_1=100\text{N}$, $F_2=80\text{N}$, 力偶矩 $M=50\text{N}\cdot\text{m}$, 方向及作用位置如图, 求此外力系的简化结果。

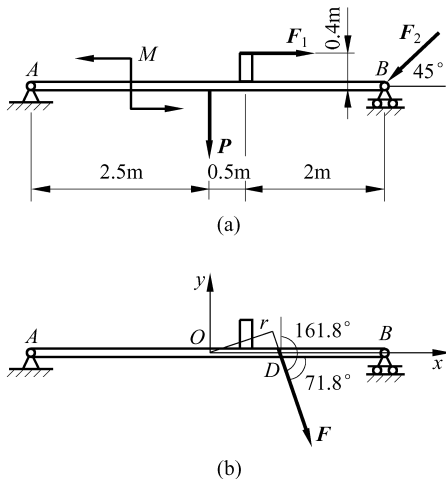


图 1.11

解 取梁的中点 O 为简化中心, 先计算外力系的主矢和对点 O 的主矩。为此, 选取坐标系 Oxy (图 1.11(b))。

主矢 $\mathbf{F}_R$ 在坐标轴上的投影分别为

$$F_{Rx} = \sum F_x = F_1 - F_2 \cos 45^\circ = \left(100 - 80 \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{N} = 43.4 \text{N}$$

$$F_{Ry} = \sum F_y = -P - F_2 \sin 45^\circ = \left(-75 - 80 \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{N} = -131.6 \text{N}$$

由式(1.20)得

$$F_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = 138.6 \text{N}$$

$$\cos(\mathbf{F}_R, \mathbf{i}) = \frac{F_{Rx}}{F_R} = 0.313, \text{ 则 } \angle(\mathbf{F}_R, \mathbf{i}) = 71.8^\circ$$

$$\cos(\mathbf{F}_R, \mathbf{j}) = \frac{F_{Ry}}{F_R} = -0.950, \text{ 则 } \angle(\mathbf{F}_R, \mathbf{j}) = 161.8^\circ$$

对点 O 的主矩为

$$\begin{aligned} M_O &= \sum M_O(\mathbf{F}) = M - F_1 \cdot h - F_2 \cdot OB \sin 45^\circ \\ &= (50 - 40 - 141.4) \text{ N} \cdot \text{m} \\ &= -131.4 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

由于 $\mathbf{F}_R \neq 0, M_O \neq 0$, 可知力系可简化为一合力 $\mathbf{F}$, 其大小和方向与主矢 $\mathbf{F}_R$ 相同, 作用线到点 O 的距离由式(1.22)得

$$r = \frac{|M_O|}{F_R} = \frac{131.4 \text{ N} \cdot \text{m}}{138.6 \text{ N}} = 0.948 \text{ m}$$

根据主矢的方向, 合力 $\mathbf{F}$ 的作用线应在点 O 的右侧, 以使 $\mathbf{F}$ 对点 O 的矩也为顺时针转向, 与主矩 M_O 的转向一致, 如图 1.11(b) 所示。设合力作用线与 x 轴的交点为 D , 则

$$OD = \frac{r}{\sin 71.8^\circ} = \frac{0.948 \text{ m}}{0.95} = 0.998 \text{ m}$$

例 1.4 已知 $F_1 = 6 \text{ N}, F_2 = 8 \text{ N}, F_3 = 10 \text{ N}, a = 3 \text{ m}, b = 4 \text{ m}$, 试求图 1.12 所示空间力系简化可得到最小主矩的大小和方向。

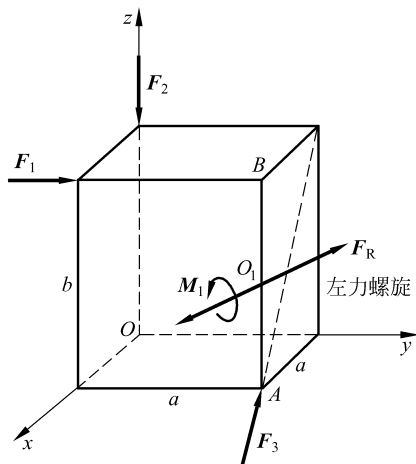


图 1.12

解 选取图中坐标系原点为简化中心。各力矢量的表达式为

$$\mathbf{F}_1 = 6\mathbf{j} \text{ N}, \quad \mathbf{F}_2 = -8\mathbf{k} \text{ N}, \quad \mathbf{F}_3 = 10(-3\mathbf{i} + 4\mathbf{k})/5 = (-6\mathbf{i} + 8\mathbf{k}) \text{ N}$$

点 O 至各力作用点的矢径为

$$\mathbf{r}_1 = (3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}) \text{ m}, \quad \mathbf{r}_2 = 4\mathbf{k} \text{ m}, \quad \mathbf{r}_3 = (3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \text{ m}$$

力系向点 O 简化得到主矢 $\mathbf{F}_R$ 和主矩 $\mathbf{M}_O$:

$$\mathbf{F}_R = \sum_{i=1}^3 \mathbf{F}_i = (-6\mathbf{i} + 6\mathbf{j})\text{N}$$

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 8 \end{vmatrix} = (-24\mathbf{j} + 36\mathbf{k})\text{N} \cdot \text{m}$$

由 $\mathbf{F}_R \cdot \mathbf{M}_O < 0$ 可知,力系可进一步简化为一个左力螺旋。根据式(1.22),将 $\mathbf{F}_R$ 沿矢径

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}_R \times \mathbf{M}_O / F_R^2 = \frac{1}{72} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & -24 & 36 \end{vmatrix} = (3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})\text{m}$$

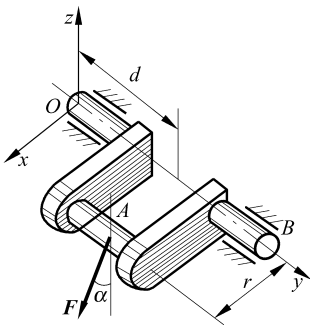
平移至 AB 边中点 O_1 ,与由式(1.23)求得的力偶 $\mathbf{M}_1 = (\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{F}_R) \mathbf{F}_R / F_R^2 = -\frac{144}{72}(-6\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) = (12\mathbf{i} - 12\mathbf{j})\text{N} \cdot \text{m}$ 组成中心轴过点 O_1 的一个左力螺旋。 $\mathbf{M}_1$ 就是力系向不同点简化时的最小主矩,因此,中心轴也称为最小力矩轴。

习 题

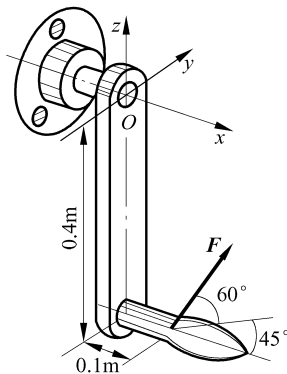
1.1 力 $\mathbf{F}$ 作用在曲轴的曲柄中点 A 如图所示。已知 $\alpha = 30^\circ$, $F = 1\text{kN}$, $d = 400\text{mm}$, $r = 50\text{mm}$ 。试分别求力 $\mathbf{F}$ 对坐标轴 x, y, z 的矩。

1.2 作用在手柄上的力 $F = 100\text{N}$,作用线位置及手柄尺寸如图所示。试求:

- (1) 力 $\mathbf{F}$ 对 x 轴的矩;
- (2) 力 $\mathbf{F}$ 对原点 O 的矩。



题 1.1 图

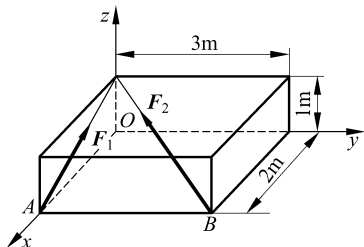


题 1.2 图

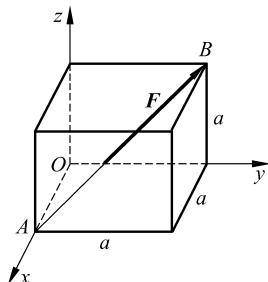
1.3 长方体的顶角 A 和 B 处分别有力 F_1 和 F_2 作用如图所示。已知 $F_1 = 500\text{N}$, $F_2 = 700\text{N}$ 。试分别求二力对坐标轴 x, y, z 的矩。

1.4 图示正立方体的边长为 a , 在顶点 A 沿对角线 AB 作用一力 F , 大小已知。试求:

- (1) 力 F 对坐标轴 x, y, z 的矩;
- (2) 力 F 对坐标轴原点 O 的矩。



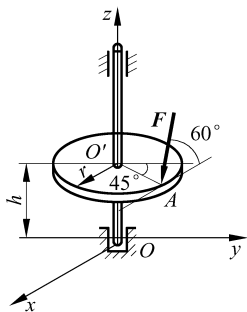
题 1.3 图



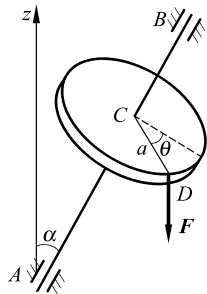
题 1.4 图

1.5 设在图中水平轮上点 A 作用一力 F , 方向与轮面成 60° 角, 且在过点 A 与轮缘相切的铅垂面内, 而点 A 与轮心 O' 的连线与通过点 O' 平行于轴 y 的直线成 45° 角。试求力 F 在三坐标轴上的投影与对三个坐标轴的矩。设 $F = 1\,000\text{N}$, $h = r = 1\text{m}$ 。

1.6 轴 AB 与铅垂线成 α 角, 轮盘盘面与轴垂直。半径 $CD = a$, 且与铅垂面 zAB 成 θ 角, 如图所示。如在点 D 作用一铅垂向下的力 F , 大小已知, 试求此力对轴 AB 的矩。



题 1.5 图

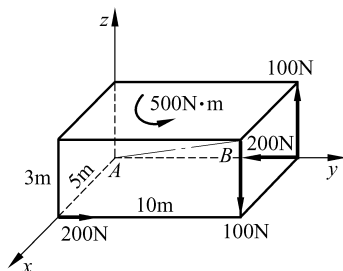


题 1.6 图

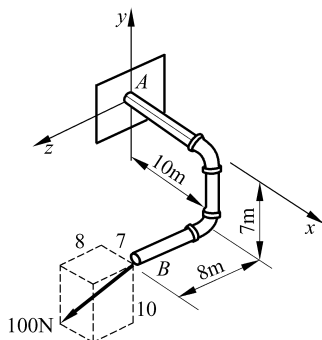
1.7 试求题 1.3 图所示力系的主矢 F_R 和对原点的主矩 M_O 。

1.8 求图示力系的合力偶沿长方体对角线 AB 的分量。

1.9 试将作用于图示构件管端 B 的 100N 的力向点 A 简化。



题 1.8 图

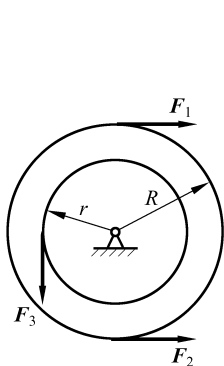


题 1.9 图

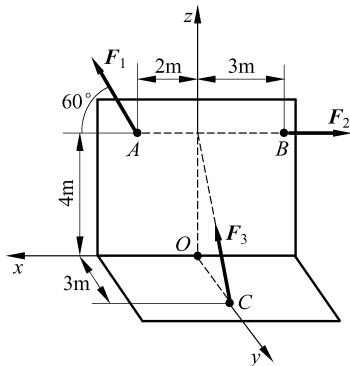
1.10 试将图示滑轮上所受的力系 F_1, F_2, F_3 向其中心简化, 其中 $F_1 = 1\,200\text{ iN}$, $F_2 = 900\text{ iN}$, $F_3 = -500\text{ jN}$, $R = 0.3\text{m}$, $r = 0.2\text{m}$ 。

1.11 如图示, 已知 $F_1 = 400\text{N}$, $F_2 = 300\text{N}$, $F_3 = 500\text{N}$ 。试将力系 (F_1, F_2, F_3) 向点 O 简化。

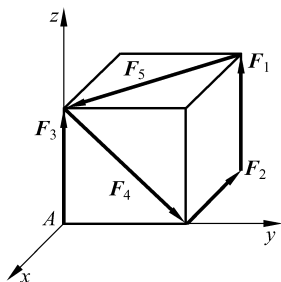
1.12 图示正方体边长为 b , 其上作用 5 个力, 其中, $F_1 = F_2 = F_3 = F$, $F_4 = F_5 = \sqrt{2}F$ 。试将 5 力向点 A 简化, 并给出简化的最后结果。



题 1.10 图



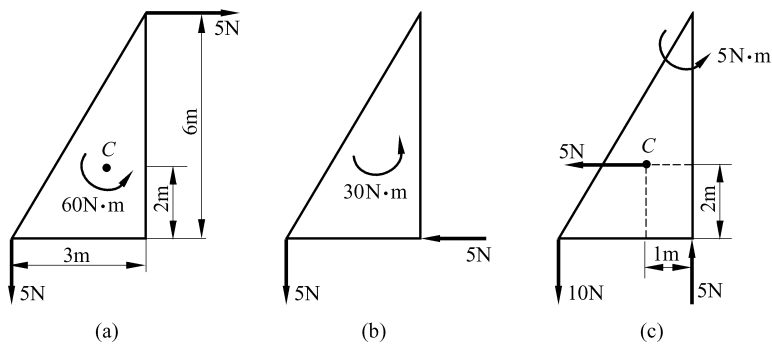
题 1.11 图



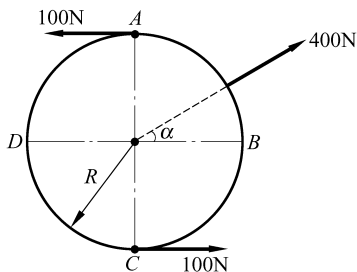
题 1.12 图

1.13 将三角板上作用的力系加以简化, 如图示, 并确定哪些力系是相互等效的。

1.14 图示力和力偶可用一等效力来代替, 为使此等效力的作用线通过点 B , 求角度 α 的值。

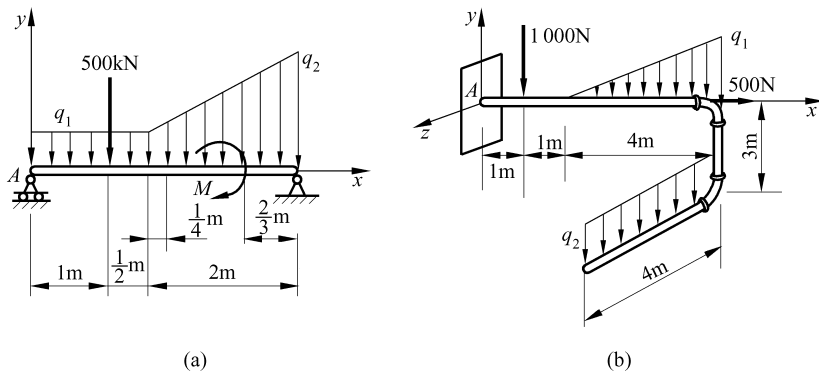


题 1.13 图



题 1.14 图

1.15 将图示各力系简化为最简单力系。已知在图(a)中： $q_1 = 10\text{kN/m}$, $q_2 = 80\text{kN/m}$, $M = 100\text{kN} \cdot \text{m}$ 。已知在图(b)中： $q_1 = 50\text{N/m}$, $q_2 = 30\text{N/m}$ 。



题 1.15 图

第 2 章

物体的受力分析

在静力学中,对物体进行正确的受力分析是解决问题的关键。本章首先介绍约束和约束力,接着研究作用在物体上的载荷以及重心的计算,最后讨论物体的受力分析。

2.1 约束与约束力

在空间运动不受限制的物体称为**自由体**(free body),如飞行中的飞机、火箭等。位移受到限制的物体称为**非自由体**(unfree body),如行驶中的火车、汽车等。限制物体自由运动的条件称为**约束**(constraint)。约束一般是由非自由体周围的其他物体构成的,因此往往把这些周围物体也称为约束。如钢轨是火车的约束,公路路面是汽车的约束等。约束对非自由体的作用力称为**约束力**(constraint force)。因此,约束力的方向与其所限制的非自由体的运动方向或趋势相反。

下面介绍工程中几种基本约束,并对其约束力进行分析。

1. 柔索

工程中的钢丝绳、胶带和链条等物体可简化为柔索,其特点是不计自重,不可伸长,只承受拉力。因此,柔索对物体的约束力 F_T 作用在接触点处,方位沿柔索,指向则背离物体(图 2.1)。

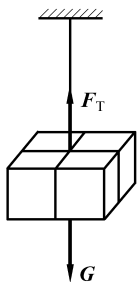


图 2.1

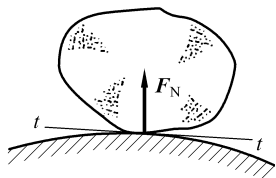


图 2.2

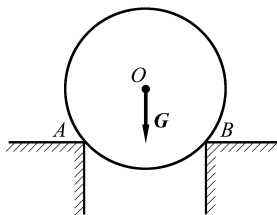


图 2.3

2. 光滑接触面

若两物体的接触面上摩擦力很小,可忽略,则接触面可简化为光滑表面,如齿轮的齿面、车床导轨等。光滑接触面只能限制物体沿接触面法向的位移,而不能限制物体沿约束面切向的位移。因此,光滑面对物体的约束力 F_N 作用在接触点上,沿接触面公法线,并指向与物体运动趋势相反的方向(图 2.2)。

请画出图 2.3 中光滑尖角对均质球的约束力,并说明理由。

3. 光滑圆柱铰链

用圆柱销钉将两个带有销钉孔的构件连接在一起组成圆柱铰链,如图 2.4 所示。销钉对孔的约束力 F_A 作用在接触点 A,且沿公法线方向。由于约束力方向不能预先确定,通常用两个正交分力 F_{Ax} , F_{Ay} 表示(图 2.5)。若将圆柱铰链中的一个构件与地面或机架固定则构成**固定铰链支座**(fixed support of pin joint)(图 2.6(a)),其简图如图 2.6(b)所示。销钉对孔的约束力可用两个正交分力 F_x , F_y 表示(图 2.6(c))。图 2.7(a)所示的支座与支承面间有辊轴,称为**可动铰链支座**(roller support of pin joint),其示意图如图 2.7(b)所示,支座沿支承面的运动不受限制,因此约束力 F_N 垂直支承面(图 2.7(c))。可动铰链支座可避免因温差引起构件伸缩而造成的结构破坏。

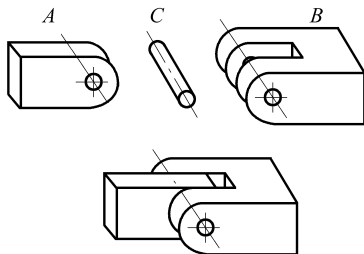


图 2.4

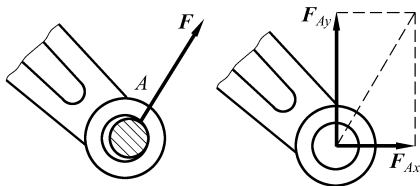
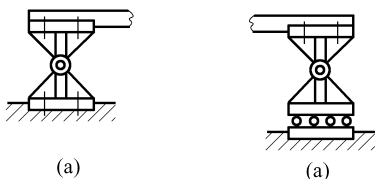


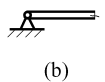
图 2.5

向心球轴承是工程中常见的约束,其对轴颈的约束力可用两个正交分力 F_x, F_y 表示(图 2.8)。



(a)

(b)

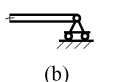


(b)

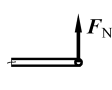


(c)

图 2.6



(b)



(c)

图 2.7

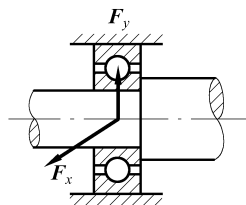


图 2.8

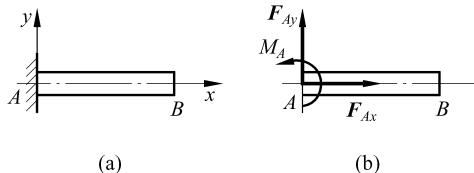
光滑圆柱铰链约束的特点是只限制两物体相对移动,而不能限制两物体绕铰链中心轴的相对转动。

4. 二力构件

只受两个力作用而处于平衡状态的刚性构件称为**二力构件**。例如两端用铰链连接且不计自重,杆上又无其他外力作用的刚性杆就是**二力杆**。由于二力构件只受两个力作用而平衡,因而这两个力必等值、反向、共线。因此,二力构件对物体的约束力沿二力作用点的连线。

5. 固定端

物体嵌固于另一物体的约束,称为**固定端**(fixed end)。固定端既限制物体的移动又限制物体的转动。夹紧在卡盘上的工件,嵌固在墙上的悬臂梁(图 2.9(a))都是固定端的实例。当梁上外载荷可简化为平面力系(如 xy 平面)时,梁的插入部分受到平面约束力系作用,向梁根部截面 A 的形心简化,可得面内一力 F_A 和一力偶 M_A , 由于该力的方向不能预先确定,可用两个正交分力 F_{Ax}, F_{Ay} 表示(图 2.9(b))。



(a)

(b)

图 2.9

除以上几种常见约束外,还有其他类型的空间约束,将在第4章中介绍。

2.2 载荷 重心

约束力以外的其他力统称为**主动力**(active force),工程中常称为**载荷**(load)。载荷可分为**体积力**(body force)和**表面力**(surface force)两类。体积力是分布在物体体积内的力,如重力;表面力是分布在物体较大表面上的力,如土压力和闸门上的水压力等。若力作用面积很小,可近似看成作用在一个点上,则称为**集中力**(concentrated force)。合理地估计和确定载荷是正确进行结构计算的重要前提,通常要参考有关规范或进行专门的载荷实验研究。

1. 重力 重心

地球中心对物体的吸引力称为**重力**(gravity)。如果把物体看成由许多质点组成,由于地球比所研究的物体大得多,作用在这些质点上的重力形成的力系可认为是一个铅垂的平行力系,该平行力系的合力的大小就等于物体的重力,这个合力作用点称为物体的**重心**(center of gravity)。显然,物体的重心是物体内一个确定的几何点,与该物体在空间的放置状态无关。

设物体各微元受的重力为 ΔG_i ,则所有微元重力的合力大小 $G = \sum \Delta G_i$ 。设在物体上固连一坐标系 $Oxyz$ (图 2.10),微元重力作用点的坐标为 (x_i, y_i, z_i) ,重心 C 的坐标为 (x_C, y_C, z_C) 。对 y, x 两轴分别应用合力矩定理,得

$$\begin{aligned} x_C G &= \sum x_i \Delta G_i \\ -y_C G &= \sum (-y_i \Delta G_i) \end{aligned}$$

将物体上坐标系固连在一起绕 x 轴旋转 90° ,则重力沿 y 轴方向,重心 C 的坐标仍不变。对 x 轴由合力矩定理得

$$z_C G = \sum z_i \Delta G_i$$

从而得到物体重心的坐标公式:

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\sum x_i \Delta G_i}{G} \\ y_C &= \frac{\sum y_i \Delta G_i}{G} \\ z_C &= \frac{\sum z_i \Delta G_i}{G} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

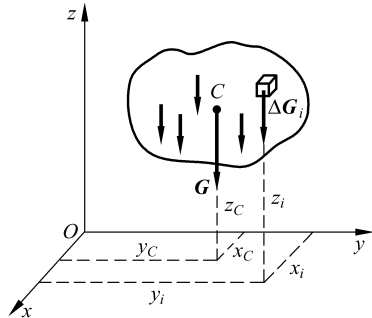


图 2.10