第一章

随机事件及其概率

概率论产生于17世纪，是一门研究随机现象统计规律性数量关系的数学学科.赌博者们提出的各种输赢的概率问题是这门学科的起因.概率论的发展也在很大程度上促进了数理统计的发展.随着时间的推移，概率论与数理统计已渗透到人们生活中的各个领域.许多兴起的应用数学，如信息论、对策论、排队论、控制论等，都是以概率论作为基础的.

第一节　基本概念

一、随机现象与随机试验

自然现象与社会现象从结果能否预言的角度可分为两大类，一类现象在发生前就已经知道结果，例如，刹车时，由于惯性车体会继续行驶一段距离，抛起重物后会落下等，这一类现象称为**确定性现象**.另一类现象是不可预言结果的，例如抛起一枚硬币观察落地后哪一面向上，一个电子元件寿命有多长等.这类现象虽然结果不能预知，但可能出现的全部结果试验前是知道的，仅进行几次试验看不出规律，但通过大量重复的试验其结果会遵循某种规律，这一类现象称为**随机现象**.随机现象所体现出的这种规律性称为统计规律性，概率论与数理统计就是揭示这种统计规律性的学科.

为了揭示某种随机现象的出现规律而进行的大量重复试验称为**随机试验**，其具有以下特点：

(1) 试验可以在相同条件下重复进行；

(2) 试验出现多种可能结果，且所有可能出现的结果在试验前能预先知道；

(3) 试验前不能确定会出现哪一个结果.

随机试验简称为试验，通常记作 $E, E_1, E_2, \cdots$.本书中以后提到的试验都是指随机试验.

例如，

E_1：掷一颗骰子，观察出现的点数；

E_2：抽查一辆汽车百公里时速的刹车距离.

二、随机事件

1. 样本空间

由于随机试验的所有可能结果在试验前是已知的，称随机试验 E 每一个可能出现的结果为**基本事件**，也称为**样本点**，通常用 $e_1,e_2,e_3,\cdots$表示. 样本点的全体称为**样本空间**，记作 S 或 Ω.

例 1-1-1 掷一枚硬币，观察朝上一面的情况，则样本空间可表示为

$$S=\{正,反\}.$$

例 1-1-2 掷一颗骰子，观察出现的点数，若以"i"表示"掷得 i 点"($i=1,2,\cdots,6$)，则样本空间为

$$S=\{1,2,3,4,5,6\}.$$

例 1-1-3 统计某路口一小时内通过的车辆数，则样本空间为

$$S=\{0,1,2,3,\cdots\}.$$

例 1-1-4 在一批汽车轮胎中任意抽取一只进行耐久性实验. 若以"t"表示"轮胎连续工作的寿命(单位为小时)"，则样本空间为

$$S=\{t\mid t\geqslant 0\}.$$

2. 样本空间与随机事件

在进行随机试验时，有时关心的往往是带有某些特征的基本事件是否发生. 例如，例 1-1-3 中，研究"一小时内通过车辆数超过 300 辆"，例 1-1-4 中，研究"轮胎寿命少于 3000 小时". 这些都是样本空间的子集，是包含了若干基本事件的复杂事件，它们在试验中发生与否都带有随机性，我们把这种复杂事件称为**随机事件**，简称**事件**. 事件通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示.

在上面的表述中，"一小时内通过车辆数超过 300 辆"及"轮胎寿命少于 3000 小时"都是随机事件，可分别用集合表示为

$$A=\{301,302,303,304,\cdots\};$$
$$B=\{t\mid t<3000\}.$$

在每次试验中，当且仅当试验出现的结果为随机事件中的一个元素时，称这一事件发生. 例如例 1-1-2 中所述的掷骰子，事件 A 表示出现奇数点，当掷到"1"点时，可以说事件 A 发生了.

由于样本空间 S 是它自身的子集，并且包含所有的样本点，每次试验的结果必然出现在 S 中，也即 S 必然发生，因此称 S 为**必然事件**. 空集$\varnothing$不包含任何样本点，它也是样本空间的子集，所以也作为一个事件，由于它在每次试验中都不发生，因此称为**不可能事件**.

必然事件和不可能事件本身并无不确定性，但为今后讨论方便，我们将它们作为随机事件的极端情形.

三、事件间的关系与运算

在研究随机试验时，我们发现一个随机试验往往包含很多随机事件，其中有些比较简

单，有些比较复杂．为了通过较简单的随机事件来揭示较为复杂的随机事件的性质及规律，需要研究随机试验的各随机事件之间的关系及运算．

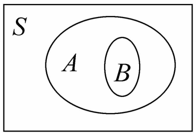

图 1-1　$A\subset B$

（1）**包含**　若事件 B 的发生必导致事件 A 发生，则称事件 A 包含事件 B，或称事件 B 是事件 A 的子事件，如图 1-1 所示．记为 $A\supset B$ 或 $B\subset A$．

例如，在例 1-1-2 中，令 A 表示"掷出 2 点"的事件，即 $A=\{2\}$，B 表示"掷出偶数点"的事件，即 $B=\{2,4,6\}$，则 $A\subset B$．

（2）**相等**　如果 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称事件 A 等于事件 B，记为 $A=B$．

例如，例 1-1-2 中，令 A 表示"掷到偶数点"的事件；B 表示"掷到的点数为 2，4，6 之一"的事件．则显然有 $A=B$．

（3）**和**　称事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件为事件 A 与事件 B 的和事件或并事件，记为 $A\cup B$，如图 1-2 所示．

例如，某车间甲、乙两台机器加工同样的产品，令 A 表示"甲生产出次品"的事件，B 表示"乙生产出次品"的事件，则 $A\cup B$ 表示"该车间生产出次品"的事件．

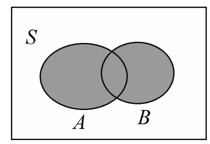

图 1-2　$A\cup B$

两个事件的和可推广到有限个或可列个的情形．一般用 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 表示 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的和事件；用 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 表示可列个事件 A_1，A_2，… 的和事件．

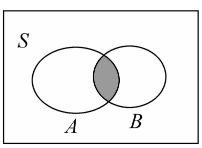

图 1-3　$A\cap B$

（4）**积**　称事件 A 与事件 B 同时发生的事件为 A 与 B 的积事件，简称为积，记为 $A\cap B$ 或 AB，如图 1-3 所示．

例如，在例 1-1-2 中，令 $A=\{$掷到偶数点$\}$，$B=\{$掷到的点数不超过 3 点$\}$，则 $A\cap B=\{$掷到 2 点$\}$．

类似地，用 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 表示 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的积事件；用 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 表示可列个事件 A_1，A_2，… 的积事件．

（5）**差**　称 A 发生但 B 不发生的事件为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$，如图 1-4 所示．

例如，例 1-1-4 中，令 $A=\{$轮胎寿命大于 2500 小时$\}$，$B=\{$轮胎寿命大于 2000 小时$\}$，则 $A-B=\varnothing$，$B-A=\{$轮胎寿命 $2000<t\leqslant 2500\}$．

（6）**互不相容**　若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 是互不相容的（或互斥的），如图 1-5 所示．

例如，掷骰子时，若 $A=\{1$ 点向上$\}$，$B=\{2$ 点向上$\}$，则 A 与 B 便是互不相容的．

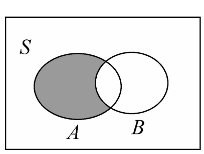

图 1-4　$A-B$

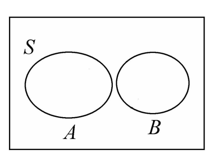

图 1-5　$A\cap B=\varnothing$

(7) **对立**　称 A 不发生的事件为 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$，如图 1-6 所示. 显然 $A\cup\overline{A}=S$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$. 例如，从有 3 个次品、7 个正品的 10 个产品中任取 3 个，若令 $A=$｛取得的 3 个产品中至少有一个次品｝，则 $\overline{A}=$｛取得的 3 个产品均为正品｝.

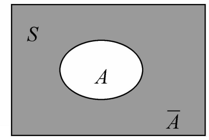

图 1-6　$\overline{A}$

四、事件的运算规律

在研究随机事件的概率问题时，经常需要对随机事件进行运算. 清楚事件的运算规律对事件的运算有很大帮助，下面将其整理如下：

(1) **交换律**　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2) **结合律**　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) **分配律**　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

(4) **对偶律**　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

对偶律可以推广到有限个事件：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i.$$

此外，还有如下一些常用性质：

$$A\cup B\supset A,\quad A\cup B\supset B\quad（越求和越大）;$$

$$A\cap B\subset A,\quad A\cap B\subset B\quad（越求积越小）.$$

若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$，$A\cap B=A$. 对任意的事件 A，B，$A-B=A-AB=A\overline{B}$ 等.

例 1-1-5　考察居民对三种报纸的订购情况，设事件 A_1、A_2、A_3 分别表示订购第一种、第二种、第三种报纸，则：

只订购第一种、第二种应表示为 $A_1A_2\overline{A}_3$；

订购第一种或第二种应表示为 $A_1\cup A_2$；

只订购一种报纸应表示为 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$；

恰好订购两种报纸应表示为 $A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$；

至少订购一种报纸应表示为 $A_1\cup A_2\cup A_3$；

不订购任何报纸应表示为 $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

至多订购两种报纸可表示为 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1A_2A_3$，这样表示结果较为复杂，考虑到其对立事件是三种报纸全订购，所以还可以表示为 $\overline{A_1A_2A_3}$.

习题 1-1

1. 写出下列随机试验的样本空间：

(1) 一袋中放有 10 个球，其中 5 个红球、5 个白球，从中每次任取一个，取到红球为止，记录取到红球前取到的白球数；

(2) 测量某地水温.

2. 设某公司参加竞标，令事件 A 表示第一次竞标成功，事件 B 表示第二次竞标成功，试用 A，B 表示下列事件：

(1) 两次竞标都成功；

(2) 两次竞标都失败；

(3) 恰有一次竞标成功；

(4) 至少一次竞标成功.

3. 设 A,B,C 表示 3 个随机事件，试将下列事件用 A,B,C 表示出来：

(1) B,C 发生，A 不发生；

(2) A,B,C 都发生；

(3) A,B,C 都不发生；

(4) A,B,C 中恰好有两个事件发生；

(5) A,B,C 中至少有一个发生；

(6) A,B,C 中至少有两个发生；

(7) A,B,C 中至多有一个发生；

(8) A,B,C 中至多有两个发生.

第二节　频率与概率

在一个随机试验中，人们关心的某个随机事件可能发生，也可能不发生，人们往往会关心该随机事件发生的可能性有多大. 例如，将来的某天下雨的可能性，某海域将来某天有大风的可能性等，知道了这种可能性的大小，对指导人们的生产生活有很大帮助. 这种"可能性"的数字度量就是我们即将叙述的概率. 为了引出概率的定义，先给出频率的定义.

一、频率

为探寻统计规律性，需进行同条件下大量重复的随机试验. 随着试验次数增加，某随机事件 A 出现的次数与总试验次数的比值与该事件出现的可能性大小有密切的联系，这个比值就是我们常说的频率.

定义 1-2-1　在相同条件下，进行 n 次重复试验，设事件 A 出现了 n_A 次，称 n_A 是事件 A 发生的频数，比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**，记作 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}.$$

由频率的定义易得到以下基本性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(S)=1$；

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

大量试验证实，随着试验次数增大，某事件发生的频率总具有一定的稳定性，会越来越稳定的在某个客观存在的常数附近波动，这种稳定性即我们前面提到的统计规律性的一种体现. 下面例子是一些学者为了验证该结论而进行的抛硬币的试验. 具体数据见表 1-1.

表 1-1

试验者	抛硬币次数 n	正面 A 出现次数 n_A	正面 A 出现的频率 $f_n(A)$
德·摩根	2048	1061	0.5180
浦丰	4040	2148	0.5069
费勒	10 000	4979	0.4979
皮尔逊	12 000	6019	0.5016
皮尔逊	24 000	12 012	0.5005
维尼	30 000	14 994	0.4998

二、概率

一个随机事件的概率就是该随机事件发生可能性大小的数字度量.但精确的刻画其定义是比较困难的,下面从两个角度来叙述概率的定义.

1. 概率的统计定义

对一个随机事件来说,它的概率可通过它发生的频率来反映,所以频率与概率之间应该存在着某种联系.而由于一个随机事件的概率是由其自身决定的,比如一辆汽车有其质量、一块土地有其面积一样,是客观存在的,但是频率却会随着试验次数不同而不同.由大量的随机试验来看,随着试验次数增加,频率会在概率附近越来越稳定的摆动.由此,我们给出概率的统计性定义.

定义 1-2-2 在相同条件下,将随机试验重复 n 次,随着重复试验次数 n 的增大,如果事件 A 的频率 $f_n(A)$越来越稳定地在某一常数 p 附近摆动,则称常数 p 为事件 A 的概率,记作

$$P(A)=p.$$

概率的统计定义只是一种描述性定义,虽然告诉了我们什么是概率,但是还不够严谨,无法具体确定定义中的频率稳定值 p.只能通过加大试验次数,通过一系列频率值的平均值作为 p 的近似值.为了更加准确地描述概率的本质,我们给出下面的公理化定义.

2. 概率的公理化定义(数学定义)

定义 1-2-3 设某随机试验的样本空间为 S,对其中每个事件 A,存在一个实数 $P(A)$,它满足下列三条公理:

(1) **非负性** 对于每一个事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$;

(2) **规范性** $P(S)=1$;

(3) **可列可加性** 对于两两互不相容的事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$,下式总成立:

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots,$$

则称 $P(A)$为 A 的概率.

该定义称为概率的**公理化定义**,这三条性质是概率的三个基本属性,是研究概率的基础与出发点.但概率的公理化定义并没有将事件的概率和它的频率、频率的稳定性直接结合起来,实际上概率的公理化定义是对概率的统计定义进行科学抽象的结果.理解概率的定义时,不应该将以上两个定义当作等价的定义单独进行理解,而应该将两者结合起来,才能更

好地把握住概率的本质.

由概率公理化定义的三个条件,可以得出以下概率的性质.

3. 概率的性质

性质 1-2-1　若 $A\subset B$,则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

证明　因为 $A\subset B$,所以 $B=A\cup(B-A)$(图 1-7)且 $A\cap(B-A)=\varnothing$. 由概率的可加性得

$$P(B)=P(A\cup(B-A))=P(A)+P(B-A).$$

即

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

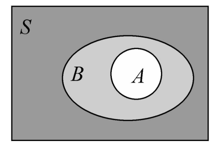

图 1-7　$B=A\cup(B-A)$

特别地,当 $B=S$ 时,得到如下性质:

性质 1-2-2　对任意事件 A,$P(\overline{A})=1-P(A)$.

在性质 1-2-2 中,当 $A=S$ 时,结合概率的规范性,可得到如下性质:

性质 1-2-3　$P(\varnothing)=0$.

性质 1-2-4　若 $A\subset B$,则 $P(A)\leqslant P(B)$.

证明　由性质 1-2-1 及概率的非负性得 $0\leqslant P(B-A)=P(B)-P(A)$,即 $P(A)\leqslant P(B)$.

性质 1-2-5　$P(A)\leqslant 1$.

证明　由于 $A\subset S$,由性质 1-2-4 及概率的规范性可得 $P(A)\leqslant 1$.

性质 1-2-6(有限可加性)　对于 n 个两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n). \tag{1.2.1}$$

证明　在式(1.2.1)中,令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$,则 $A_1,\cdots,A_n,A_{n+1},\cdots$是一组两两互不相容的事件. 由 $P(\varnothing)=0$,便得

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)&=P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)\\&=P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)\\&=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)+\sum_{k=n+1}^{\infty}P(\varnothing)\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).\end{aligned}$$

性质 1-2-7(加法公式)　对任意事件 A,B,有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

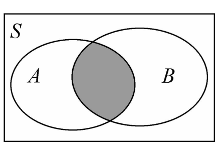

图 1-8　$A\cup B=A\cup(B-AB)$

证明　如图 1-8 所示,由于 $A\cup B=A\cup(B-AB)$且 $A\cap(B-AB)=\varnothing$,由概率的可加性及性质 1-2-1 得

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A\cup(B-AB))=P(A)+P(B-AB)\\&=P(A)+P(B)-P(AB).\end{aligned}$$

加法公式可推广到任意 n 个事件.

例如,对任意三个事件 A,B,C,有

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)=&P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)\\&-P(BC)-P(CA)+P(ABC).\end{aligned}$$

更一般地,对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,用数学归纳法可证得

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n).$$

计算随机事件概率的时候，会经常用到上述公式，读者一定要熟练记忆.

例 1-2-1 在一次羽毛球国际比赛中，某国家有两名队员参赛，拿到奖牌的概率分别为 0.3 与 0.4，都拿到奖牌的概率为 0.05，问该国家能拿到奖牌的概率.

解 令 A=｛第一名队员拿到奖牌｝，B=｛第二名队员拿到奖牌｝，则 $A\cup B$=｛该国家能拿到奖牌｝，AB=｛两名队员都拿到奖牌｝，由概率的加法公式，

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.3 + 0.4 - 0.05 = 0.65.$$

例 1-2-2 设 A、B、C 为三个事件，已知 $P(A)=P(B)=P(C)=0.3$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=0.1$，求下列事件的概率：

(1) A 发生但 C 不发生；

(2) 至少有一个发生；

(3) 至少两个发生.

解 (1) A 发生但 C 不发生可表示为 $A\overline{C}$，由事件的运算关系，

$$A\overline{C} = A - AC,$$

所以

$$P(A\overline{C}) = P(A - AC).$$

由于 $A \supset AC$，由概率的性质，

$$P(A - AC) = P(A) - P(AC) = 0.2.$$

(2) 三个事件至少一个发生应表示为 $A\cup B\cup C$，由推广的加法公式，

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(CA) + P(ABC)$$

其中，由于 $ABC \subset AB$，故 $P(ABC) \leqslant P(AB)=0$，因此 $P(ABC)=0$，所以

$$P(A \cup B \cup C) = 0.3 + 0.3 + 0.3 - 0.1 - 0.1 = 0.7.$$

(3) 三个事件至少有两个发生可表示为 $AB\cup BC\cup AC$，由于 AB，BC，AC 中任意两个事件的交事件或三个事件的交事件都是 ABC，所以

$$P(AB \cup BC \cup AC) = P(AB) + P(BC) + P(AC) - 2P(ABC) = 0.2.$$

习题 1-2

1. 某市发行晨报和晚报. 在该市的居民中，订阅晨报的占 30%，订阅晚报的占 50%，同时订阅晨报及晚报的占 5%，求下列事件的概率：

(1) 只订阅晚报的；

(2) 至少订阅一种报纸的；

(3) 只订阅一种报纸的；

(4) 不订阅任何报纸的.

2. 设 A，B 为两个事件，且 $P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，求 $P(\overline{AB})$.

3. 设 A，B 为两个事件，且 $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$，$P(A)=p$，求 $P(B)$.

4. 设 A，B 互不相容，$P(A)=p$，$P(B)=q$，求 $P(A\cup B)$，$P(A\cup\overline{B})$，$P(\overline{A}B)$，$P(\overline{A}\overline{B})$.

第三节　等可能概型

求出随机事件发生的概率可以给人们的生产生活带来很大的方便，但是很多随机试验中随机事件的概率是不容易甚至不可能求出的，其中较为容易求解的是等可能概型. 求解过程中会用到如下预备知识.

计数原理：完成一件工作共有 N 类方法. 在第一类方法中有 m_1 种不同的方法，在第二类方法中有 m_2 种不同的方法，……，在第 N 类方法中有 m_N 种不同的方法，那么完成这件工作共有 $m_1+m_2+\cdots+m_N$ 种不同方法，这称为加法原理. 例如，从 A 地到 B 地可以选择乘火车，也可以选择乘飞机，火车有 6 班次，飞机有 3 个航班，所以 A 地到 B 地共有 $6+3=9$ 种方法.

完成一件工作共需 N 个步骤：完成第一个步骤有 m_1 种方法，完成第二个步骤有 m_2 种方法，……，完成第 N 个步骤有 m_N 种方法，那么，完成这件工作共有 $m_1\times m_2\times\cdots\times m_N$ 种方法，这称为乘法原理. 例如，从 A 地途经 B 地再到 C 地，已知 A 地到 B 地有 3 条路，B 地到 C 地有 4 条路，由于 A 地到 B 地是 A 地到 C 地的第一步，B 地到 C 地是 A 地到 C 地的第二步，所以 A 地到 C 地总共有 $3\times4=12$ 条路.

排列数与组合数：从 n 个不同元素中任意不重复地选取 m 个元素，按照一定顺序排成一个序列，这样的所有排列的个数称为从 n 个元素中取出的 m 个元素的排列数，记作 P_n^m，根据乘法原理，$\mathrm{P}_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)$.

从 n 个不同元素中任意不重复地选取 m 个并成一组，这样得到的所有组合的个数称为从 n 个元素中取出 m 个元素的组合数，记作 C_n^m，根据乘法原理及排列数的定义，

$$\mathrm{C}_n^m=\frac{\mathrm{P}_n^m}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

以下常用的性质应熟练记忆：$\mathrm{C}_n^0=1$，$\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_n^{n-m}$，$\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\cdots+\mathrm{C}_n^n=2^n$.

一、古典概型

对于给定的一个随机事件，如何求出它的概率是概率论中最基本的问题，其中最简单的，是前面提到的抛硬币、掷骰子这类问题. 这类随机试验具有以下特征：

(1) 全部基本事件个数是有限个；

(2) 每个基本事件发生的可能性相同.

将满足上面两条件的概率试验模型称为**古典概型**.

下面通过掷骰子的问题来看求解古典概型中概率的方法.

例如，一个袋子中有 10 个球，分别标有号码 1，2，…，10，其中 1～3 号是红球，4～10 号是黑球，现在从袋中任意取出一个球，则取到每个球的概率都一样. 令 $A=\{$取到 3 号球$\}=\{3\}$，$B=\{$取到红球$\}=\{1,2,3\}$. 此试验样本空间为 $S=\{1,2,\cdots,10\}$，于是，应有

$$P(S)=10P(A)=1,\quad \text{即}\quad P(A)=0.1.$$

而

$$P(B)=3P(A)=\frac{3}{10}=0.3=\frac{B\text{ 中基本事件数}}{\text{总基本事件数}}.$$

更一般地，设试验的样本空间为 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$. 由于在试验中每个基本事件发生的可能性相同，即

$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\}).$$

注意到

$$P(\{e_1\}\cup\{e_2\}\cup\{e_n\})=P(S)=1,$$

$$P(\{e_1\}\cup\{e_2\}\cup\{e_n\})=P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+\cdots+P(\{e_n\})=nP(\{e_i\}).$$

于是

$$P(\{e_i\})=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

若随机事件 A 包含 k 个样本点，即 $A=\{e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_k}\}$，则

$$P(A)=P\left(\bigcup_{j=1}^{k}\{e_{i_j}\}\right)=\sum_{j=1}^{k}P(\{e_{i_j}\})$$

$$=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{k\text{个}}=\frac{k}{n}.$$

所以有计算公式

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的样本点数}}{S\text{ 中样本点总数}}=\frac{k}{n}.$$

现在举一些常见的古典概型的例子.

例 1-3-1(分球问题) 袋中有同规格 10 个球，其中 6 个红球，4 个黑球，分别按下列三种取法在袋中取球：

(1) 从袋中取两次球，每次取一个，看后放回袋中，再取下一个球；

(2) 从袋中取两次球，每次取一个，看后不再放回袋中，再取下一个球；

(3) 从袋中任取两个球.

在以上三种取法中均求 $A=\{$恰好取得 2 个红球$\}$的概率.

解 (1) 从袋中取两球，第一次取球有 10 种取法，由于取后放回，第二次取球也有 10 种取法，由计数法的乘法原理，共有 $10\times10=100$ 种取法，因此样本空间所含样本点总数为 100. 又由于每次从 10 个球中任选 1 个，每个球被取到的机会均等，因此这 100 个基本事件发生的可能性相同. 恰好取到两个红球的时候，第一次有 6 种取法，第二次也有 6 种取法，因此，两次都取到红球的方法数为 $6\times6=36$，所以

$$P(A)=\frac{36}{100}=0.36.$$

(2) 无放回取球时，第一次取球有 10 种取法，由于不放回，所以第二次有 9 种取法，所以共有 $10\times9=90$ 种取法. 两次都取到红球时，第一次有 6 种取法，第二次有 5 种取法，因此，可能情况数为 $6\times5=30$. 所以

$$P(A)=\frac{30}{90}\approx0.33.$$

(3) 一次取球时，从 10 个球任意取两个，总取法为 $C_{10}^2=45$，恰好取到两个红球的取法有 $C_6^2=15$，所以

$$P(A)=\frac{15}{45}\approx0.33.$$